

GROUPES LINÉAIRES DE RANG DE MORLEY FINI

BRUNO POIZAT

RÉSUMÉ. Un groupe linéaire dont le rang de Morley est fini contient un sous-groupe définissable connexe nilpotent qui est généreux. De plus, si le groupe est simple, ce sous-groupe généreux est abélien et divisible.

ABSTRACT. A linear group of finite Morley rank contains a definable connected nilpotent subgroup which is generous. If moreover the group is simple, this generous subgroup is abelian and divisible.

0. Préliminaires

Dans cet article, il est question de groupes de rang de Morley fini, lesquels constituent une abstraction, issue de la théorie des modèles, de la notion de groupe algébrique ; comme le rapporteur et l'éditeur (que leurs noms soient mille fois bénis !) m'ont demandé de ne pas abandonner dans les ténèbres le lecteur générique de ce journal, qui n'est probablement pas un logicien confirmé, et qui est sans doute plus familier de la dimension au sens géométrique du terme que du rang de Morley, je commence par un bref exposé de la géométrie algébrique, biaisé par le point de vue d'un théoricien des modèles.

Soit K un corps algébriquement clos ; un *fermé de Zariski* est une partie de K^m définie par un système (fini !) d'équations polynômes en m variables, à coefficients dans K ; une partie de K^m est dite *constructible* si c'est une combinaison booléenne d'un nombre fini de fermés de Zariski. Les ensembles constructibles sont bien plus faciles à manier que les fermés, les variétés et les morphismes des géomètres ; en effet, d'une part l'image d'un constructible par une fonction de graphe constructible est également constructible ; d'autre part, si A est une partie constructible de K^m , toute relation d'équivalence $E(\underline{x}, \underline{y})$ constructible entre éléments de A est de la forme $f(\underline{x}) = f(\underline{y})$ pour une certaine fonction (de graphe) constructible de A dans K^n , si bien que le quotient A/E peut être assimilé à l'ensemble constructible $f(A)$.

Nous appelons *dimension* d'un ensemble constructible non vide A celle de sa clôture de Zariski, que les géomètres définissent au choix par le degré de transcendance d'un corps de fonctions ou par la hauteur de Krull d'un idéal ; elle est caractérisée au niveau constructible par l'induction suivante.

Propriété caractéristique

(i) $\dim(A) \geq 0$ si et seulement si A n'est pas vide, l'ensemble vide n'ayant pas de dimension.

(ii) $\dim(A) \geq d + 1$ si et seulement si il existe une suite infinie A_n de parties constructibles de A deux à deux disjointes telles que $\dim(A_n) \geq d$.

Elle possède en outre les propriétés suivantes :

Uniformité. Si $A(\underline{x}, \underline{y})$ est une partie constructible de K^{m+n} , il existe une borne finie aux cardinaux des parties de K^m de la forme $A(\underline{x}, \underline{a})$ qui sont finies.

Définissabilité. Si $A(\underline{x}, \underline{y})$ est une partie constructible de K^{m+n} et d est un entier, les $\underline{a}$ tels que $\dim(A(\underline{x}, \underline{a})) = d$ forment une partie constructible de K^n .

Additivité. Si A et B sont deux ensembles constructibles, et si f est une application surjective constructible de A sur B , dont chaque fibre est de dimension d , alors $\dim(A) = \dim(B) + d$.

Un *groupe constructible* est un groupe dont l'ensemble sous-jacent et la loi de groupe sont constructibles ; les groupes algébriques sont constructibles et, en fait, tout groupe constructible est constructiblement isomorphe à un groupe algébrique. Si G est une groupe algébrique, tous ses sous-groupes constructibles sont des fermés de Zariski ; sa composante connexe G° est donc son plus petit sous-groupe constructible d'indice fini ; il est bien connu que le quotient d'un groupe algébrique connexe par son centre est affine, soit encore isomorphe, pour un certain n , à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(K)$; c'est en particulier le cas des groupes constructibles simples.

J'espère que le mathématicien qui lit ces préliminaires trouvera en lui-même le moyen de se convaincre que ce ne sont pas des affirmations gratuites ; sinon, il sera dans la triste nécessité de consulter des manuels de logique, comme [14], [15] et [1].

Dans la préface de l'avant-dernier ouvrage, il trouvera la définition suivante des groupes de rang de Morley fini : il s'agit de groupes vivant au sein d'une famille d'ensembles, qu'on qualifie de *définissables*, contenant son ensemble sous-jacent, sa loi de groupe, ses singletons, son égalité, et qui est close par combinaisons booléennes finies, par produit cartésien, par image par les fonctions définissables et par quotient par les relations d'équivalence définissables. À chaque partie définissable non vide doit être associé un nombre entier positif ou nul, son *rang de Morley*, défini par les conditions (i) et (ii) ci-dessus (où on remplace le mot « constructibles » par « définissables »), et qui satisfait en outre Uniformité et Définissabilité. Additivité est donnée en sus.

On appelle toujours *composante connexe* G° du groupe de rang de Morley fini G son plus petit sous-groupe définissable d'indice fini, bien qu'il ne soit malheureusement pas question de topologie dans ce contexte abstrait (on ne sait pas distinguer, parmi les ensembles définissables, ceux qui pourraient jouer le rôle des fermés de Zariski parmi les constructibles). Si $G = G^\circ$, on dit que G est *connexe*.

Un grand nombre de propriétés classiques des groupes algébriques ont été étendues aux groupes de rang de Morley fini, si bien qu'on s'est demandé si ces groupes n'étaient pas extrêmement proches des groupes algébriques ; cela a conduit Cherlin et Zilber à

poser chacun de son côté la question suivante : *Est-ce qu'un groupe de rang de Morley fini simple est un groupe algébrique ?* Elle est ouverte depuis plus de trente ans.

Le présent article montre que des phénomènes génériques bien connus dans le cas algébrique s'étendent aux groupes *linéaires* de rang de Morley fini ; c'est une illustration de [17], bien qu'il puisse être lu de manière indépendante de ce dernier (qui est écrit sans aucune charité pour ses lecteurs non-logiciens). Les deux définitions suivantes y jouent un rôle essentiel ; elles ne supposent aucune propriété particulière du groupe G ni de l'ensemble A :

- une partie A du groupe G est dite *générique* si G est recouvert par un nombre fini de translatés de A ; autrement dit $G = a_1.A.b_1 \cup \dots \cup a_n.A.b_n$;
- une partie A du groupe G est dite *généreuse* si la réunion de ses conjuguées $x.A.x^{-1}$ est générique.

Mais quand A est définissable et G est de rang de Morley fini, A est générique si et seulement si elle a même rang que G (c'est-à-dire même dimension dans le cas algébrique ; revoir [15]). Il est par ailleurs clair, au moins pour les personnes habituées à la chose, que si A est définissable la réunion de ses conjuguées l'est aussi. La générosité est apparue dans [9].

Nous en ferons preuve tout au long de cet article, en l'agrémentant de quelques scholies devant faciliter la vie des lecteurs sans bagage de logique. Ils pourront trouver leur justification dans les manuels cités ci-dessus.

1. Introduction

Beaucoup d'énergie a été dépensée ces dernières années en vue de montrer l'existence, dans un quelconque groupe de rang de Morley fini, de sous-groupes définissables connexes nilpotents généreux (comme sont les tores maximaux d'un groupe algébrique simple). Pour l'historique de ces tentatives, on peut consulter [8] et [2].

Nous montrons ici que c'est bien le cas pour les groupes de rang de Morley fini linéaires, c'est-à-dire ceux d'entre eux qui se plongent, pour un certain entier n , dans $GL_n(K)$, où K est un corps qu'on peut supposer gratuitement algébriquement clos.

Nous commencerons par montrer que, si le groupe est en outre simple (ou, plus généralement, s'il n'a pas de sous-groupe normal unipotent non-trivial) et infini, les centralisateurs de ses points génériques sont des groupes abéliens divisibles et généreux ; ils sont tous conjugués, puisqu'on est alors dans les hypothèses du théorème final de [17].

Notre démonstration repose sur deux types d'ingrédients :

- des propriétés bien connues de groupes algébriques ;
- la théorie, due à [18] (voir aussi [13]), de la généricité pour les sous-groupes non-définissables d'un groupe stable, qui permet de transférer à un groupe linéaire certaines des propriétés de sa clôture de Zariski.

2. La théorie de Wagner

Nous reproduisons dans cette section les résultats de la théorie susdite dans le cadre qui nous est utile. Si H est un sous-groupe d'un groupe algébrique G , sa clôture de Zariski est le plus petit sous-groupe de G contenant H qui soit constructible, c'est-à-dire définissable au sens de la théorie du corps algébriquement clos K .

Lemme de Wagner. *Soit G un groupe algébrique, et soit H un sous-groupe de G dont il soit la clôture de Zariski ; alors tout type générique de $S_1(G)$ est finiment satisfaisable dans H .*

Démonstration. Comme chaque classe de G/G° a un représentant dans H , on est ramené au cas où G est connexe. Soit F l'ensemble des types finiment satisfaisables dans H ; comme c'est un fermé dans l'espace des types, il ne contient qu'un nombre fini de points de rang de Morley (c'est-à-dire de dimension au sens géométrique) maximal. Soit p l'un d'entre eux ; nous notons G_p son stabilisateur pour l'action à gauche de G sur ses types ; $G_p \cap H$ est d'indice fini dans H ; comme G_p est définissable et que G est le plus petit groupe définissable contenant H , il faut que G_p soit d'indice fini dans G , c'est-à-dire soit égal à G . Le type p , étant invariant sous l'action de G , est donc son unique type générique. $\square$

Scholie. Dans ce lemme, la théorie des modèles intervient seulement au niveau de la géométrie ; supposons, pour simplifier, que G soit affine, son ensemble sous-jacent étant un fermé de K^m ; l'espace $S_1(G)$ des 1-types est formé des idéaux premiers de $K[x_1, \dots, x_m]$ qui contiennent les équations définissant G , muni de la topologie constructible (dans laquelle les fermés de Zariski sont des ouverts-fermés) ; il s'agit d'un espace compact. Un type est générique s'il est de dimension maximale ; un groupe connexe n'a qu'un seul type générique. Un type est finiment satisfaisable dans H s'il est dans l'adhérence de l'ensemble des idéaux principaux associés aux points de H .

Corollaire 1. *Sous les hypothèses du lemme précédent, si A est une partie constructible générique de G , on peut trouver un uplet $a_0, \dots, a_n$ d'éléments de H tels que $G = a_0.A \cup \dots \cup a_n.A$.*

Démonstration. On se ramène également au cas où G est connexe. Considérons alors, dans une extension élémentaire Γ de G , des points $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ génériques et indépendants au-dessus de G , n étant la dimension de G . Par un argument de poids, quel que soit x dans Γ il existe un a_i qui reste indépendant de x , si bien que $a_i^{-1}.x$ est générique sur G , et finalement $\Gamma = \alpha_0.A \cup \dots \cup \alpha_n.A$. Par ailleurs $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ réalise le type générique de $G^{n+1} = G \times G \times \dots \times G$, qui est finiment satisfaisable dans $H^{n+1} = H \times \dots \times H$. $\square$

Scholie. L'extension élémentaire est une construction générale en théorie des modèles, qui correspond à l'augmentation du corps K dans le cadre géométrique où nous travaillons maintenant : nous étendons K en un corps K' de gros degré de transcendance, afin de trouver dans le groupe G' extension naturelle de G des points qui sont génériques sur K . Les points $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de G' sont indépendants au-dessus de G si le degré de transcendance sur K de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est la somme de ceux des α_i ; le poids

de x est le nombre maximal de α_i d'un uplet indépendant dont x peut faire baisser le degré de transcendance ($d^\circ(\alpha_i/K(x)) < d^\circ(\alpha_i/K)$) ; dans le cas présent, le poids est en fait égal au degré de transcendance.

Corollaire 2. *Sous ces mêmes hypothèses, et si A est une partie constructible de G , A est générique dans G si et seulement si $B = A \cap H$ est générique dans H .*

Démonstration. Si $H = a_0.B.b_0 \cup \dots \cup a_n.B.b_n$, le complément dans H de $a_0.A.b_0 \cup \dots \cup a_n.A.b_n$ n'est pas satisfaisable dans H , et n'est donc pas générique dans G d'après le lemme de Wagner ; par conséquent, $a_0.A.b_0 \cup \dots \cup a_n.A.b_n$ l'est, ainsi que A . L'autre direction est conséquence du lemme précédent. $\square$

Corollaire 3. *On reprend les hypothèses du lemme de Wagner en supposant en outre que H est un groupe de rang de Morley fini, qui soit connexe relativement à sa propre théorie, et que la paire (G, H) est suffisamment saturée. Alors on peut trouver g dans $H \cap G^\circ$ qui soit générique (sur $\emptyset$, ou sur un ensemble convenu de paramètres dans H) à la fois au sens de G et au sens de H .*

Remarques. (i) Si on remplace la paire (G, H) par une de ses extensions élémentaires, G reste la clôture de Zariski de H .

(ii) Si H n'est pas connexe en le remplace par sa composante connexe.

(iii) Ce corollaire ne dit pas que tout générique de H est générique dans G .

Démonstration. Soit A une partie générique de G définissable (i.e., constructible) sur $\emptyset$. On a vu qu'il existait $a_0, \dots, a_n$ dans H tels que $G = a_0.A \cup \dots \cup a_n.A$. Soit g dans H , qui au sens de ce dernier soit générique sur $(a_0, \dots, a_n)$; pour une certain i , $a_i^{-1}.g$ est un point générique de H qui est dans A . Par compacité, on en déduit l'existence d'un point g de H qui satisfait toutes les formules sans paramètres qui sont génériques au sens de H , ainsi que celles qui sont génériques au sens de G et incluses dans G° . Le même raisonnement vaut si on introduit des paramètres dans H . $\square$

Scholie. La théorie des modèles intervient maintenant à deux niveaux : celui de G , qui concerne les ensembles constructibles, et celui des ensembles définissables au sens de H . La compacité de la logique du premier ordre, à laquelle il est fait allusion, généralise celle de la topologie constructible des idéaux premiers.

3. Groupes simples

On considère ici un groupe infini simple H de rang de Morley fini, qui soit linéaire : pour un certain entier n , H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$, où K est un corps algébriquement clos. Nous notons G la clôture de Zariski de H dans $\mathrm{GL}_n(K)$.

Si G a un sous-groupe propre normal N Zariski-clos, $H \cap N = 1$, si bien que H se plonge dans G/N , qui est aussi un groupe linéaire. En récurrant sur la dimension de G , on peut supposer qu'il n'y a pas de N infini ; comme G est connexe, ses sous-groupes finis normaux sont centraux, si bien qu'après l'avoir divisé par son centre on est ramené au cas où G est simple, ce que nous supposons désormais.

Scholie. Un groupe algébrique qui n'a pas de sous-groupe normal constructible propre est en fait simple ; plus généralement, un groupe de rang de Morley fini sans sous-groupe normal définissable non trivial est simple.

Le but de cette section est de montrer que les centralisateurs des points génériques de H sont des groupes abéliens divisibles et génériques.

Quitte à la remplacer par une extension élémentaire, nous pouvons supposer que la paire (G, H) est autant saturée qu'on veut, si bien que nous trouvons un point g de H qui est générique à la fois au sens de G et au sens de H .

Il est bien connu que le centralisateur T de g dans G est un tore connexe ; c'est un groupe commutatif divisible, à torsion bornée (pour chaque entier n , il ne contient qu'un nombre fini d'éléments d'ordre n), et qui est générique : d'une part il est d'indice fini dans son normalisateur, ce qui signifie que T ne contient qu'un nombre fini de conjugués de g , c'est-à-dire que g ne commute qu'avec un nombre fini de ses conjugués, et d'autre part les points de T qui appartiennent qu'à un nombre fini de conjugués de T , c'est-à-dire ceux qui ne commutent qu'avec un nombre fini de conjugués de g (nombre en fait borné par un certain entier m), forment une partie générique de T .

Comme T est divisible, pour chaque entier n on peut y trouver g' tel que $(g')^n = g$; comme g' algérise un générique, il est générique lui-aussi, et son centralisateur est T puisqu'il a même dimension et même degré que celui de g . Pour dire les choses dans l'autre sens, si g est générique dans G , g et g^n ont même centralisateur pour chaque entier n non-nul.

Une autre propriété des tores algébriques que nous allons utiliser est leur rigidité : leurs sous-groupes algébriques forment une famille bornée ; en conséquence, comme T est générique, g est générique dans T , si bien que T est le plus petit sous-groupe algébrique de G qui contient g . En fait, les points de T qui n'appartiennent à aucun autre conjugué de T forment une partie générique de T : cela est conforme au théorème principal de [9].

$Z = H \cap T$ est le centralisateur de g dans H ; comme g ne commute qu'avec un nombre fini de ses conjugués au sens de H , il est d'indice fini dans son normalisateur dans H .

Notons Z° la composante connexe de Z au sens de H . Comme la torsion de Z est bornée, Z° est un groupe divisible, et toute cosette de Z/Z° est de la forme $\alpha.Z^\circ$ où α est d'ordre fini.

Comme g et g^n ont dans H même centralisateur Z , et que la torsion de Z est bornée, g^n algérise g au sens de H , et est lui aussi générique dans H , et donc de même type que g . Comme pour n assez grand g^n appartient à la composante connexe de son centralisateur, il faut que g soit dans Z° .

Pour la même raison, si α est un élément de torsion de Z , alors $\alpha.g$ est aussi générique dans H , et appartient à Z° ; autrement dit $Z = Z^\circ$.

Comme T est le plus petit groupe algébrique contenant g , c'est la clôture de Zariski de Z . On peut donc trouver h dans Z qui soit générique sur g à la fois au sens de T et au sens de Z : h ne commute qu'avec un nombre fini de conjugués de g au sens de G ,

et a fortiori au sens de H . Par conséquent, d'après la formule de Jaligot, Z est générique dans H .

Remarques. (i) Les sous-groupes constructibles génériques de G , devant contenir un conjugué de g , sont ceux qui contiennent un conjugué de T ; comme T est d'indice fini dans son normalisateur, les conjugués de T sont les seuls sous-groupes de G constructibles connexes nilpotents génériques. Nous ne savons pas si Z est le plus petit sous-groupe définissable au sens de H qui contienne g ; cependant, d'après [9], les sous-groupes de H définissables connexes nilpotents et génériques sont les conjugués de Z .

(ii) Comme tous les centralisateurs génériques de H sont conjugués de Z , ce sont des morceaux de tores, et tous les points génériques sont semi-simples. Il n'est pas évident que la réunion des conjugués de Z soit l'ensemble des points semi-simples de H , bien que la réunion des conjugués de T soit l'ensemble des points semi-simples de G .

(iii) Peut-on transférer d'autres propriétés de G à H , comme la conjugaison des sous-groupes de Borel ?

4. Groupes réductifs

Les propriétés de G que nous avons utilisées n'exigent pas sa simplicité; elles s'étendent à une classe plus vaste de groupes, les groupes algébriques linéaires réductifs, qui sont ceux qui n'ont pas de sous-groupe normal unipotent non-trivial. Cela nous amène à dire deux mots de la décomposition de Jordan.

Rapелons qu'une matrice de $\mathrm{GL}_n(K)$ est dite unipotente si toutes ses valeurs propres sont égales à 1; cela signifie qu'elle s'écrit $I + M$, où M est une matrice nilpotente, dont toutes les valeurs propres sont nulles, et qui vérifie $M^n = 0$. En caractéristique p , les matrices unipotentes sont les p -éléments de $\mathrm{GL}_n(K)$: leur ordre divise p^m , où m est le plus petit entier tel que $p^m \geq n$.

Une matrice est dite semi-simple si elle se diagonalise dans une certaine base. En caractéristique p , les éléments semi-simples de $\mathrm{GL}_n(K)$ sont ceux qui sont divisibles par p^m , et qui sont en fait indéfiniment p -divisibles.

Dans un groupe algébrique linéaire, tout élément se décompose de manière unique comme produit d'un élément unipotent et d'un élément semi-simple qui commutent. La chose peut se démontrer par compacité une fois qu'on a remarqué que, si K est la clôture algébrique de $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, cette décomposition correspond à la décomposition comme produit d'un p -élément et d'un p' -élément dans un groupe périodique. On voit de même que cette décomposition est respectée par les homomorphismes de groupe constructibles; qu'un sous-groupe algébrique abélien de $\mathrm{GL}_n(K)$ s'écrit comme produit d'un groupe unipotent et d'un groupe semi-simple, tout deux définissables; qu'un groupe unipotent (c'est-à-dire composé d'éléments unipotents) est nilpotent; que si G est un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}_n(K)$, ayant un sous-groupe normal constructible H tel que H et G/H soient unipotents, alors G est unipotent.

En caractéristique p , si H est un sous-groupe de rang de Morley fini de $\mathrm{GL}_n(K)$, nous verrons dans le lemme 2 qui suit que la décomposition de Jordan est intrinsèque. Par contre, en caractéristique nulle, elle dépend de la représentation linéaire considérée. C'est ainsi que le groupe additif des nombres complexes, qui est unipotent en tant que groupe algébrique, se plonge dans leur groupe multiplicatif, qui est semi-simple ; et même, si on le plonge dans $C^+ \times C^*$ par (z, e^z) , il n'a plus de décomposition de Jordan ! Donc, quand nous dirons que H est un groupe linéaire réductif, nous voudrions dire par là qu'il est plongé dans $\mathrm{GL}_n(K)$ sans avoir de sous-groupe normal non-trivial composé d'éléments unipotents ; mais, en caractéristique nulle, il est possible qu'il puisse avoir une autre représentation linéaire qui n'est pas réductive. Cela étant dit, voici le prochain résultat.

Théorème 1. *Dans un groupe H connexe de rang de Morley fini linéaire réductif (en particulier si H n'a pas de sous-groupe normal nilpotent), les centralisateurs des points génériques de H sont des groupes abéliens divisibles généreux.*

Démonstration. On suppose donc que H , un groupe de rang de Morley fini connexe relativement à sa propre théorie, est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ sans sous-groupe normal propre composé d'éléments unipotents. Si sa clôture de Zariski G avait un sous-groupe normal unipotent, elle en aurait un qui soit Zariski-clos N ; $N \cap H = 1$, G/N est un groupe linéaire, et H a les mêmes unipotents dans G et dans G/N .

On se ramène donc au cas où G est sans sous-groupe normal unipotent infini, mais le problème est qu'il pourrait ne pas être connexe. Si G° avait des sous-groupes normaux unipotents infinis, il en aurait un unique définissable connexe maximal, qui serait normal dans G , ce qui est impossible ; et s'il en avait de finis, ils seraient contenus dans la composante unipotente de son centre, qui serait aussi normale dans G , et dont on se débarrasse par un quotient.

On peut donc supposer que G° est un groupe connexe réductif, dont les centralisateurs génériques sont des tores connexes généreux. Soit g dans H qui soit à la fois générique dans G° et dans H ; notons T le centralisateur de g dans G° , T_1 son centralisateur dans G , et Z son centralisateur dans H . Comme deux éléments de T_1 qui sont congrus modulo G le sont modulo T , T est d'indice fini dans T_1 . Comme T est le plus petit groupe algébrique contenant g , il est contenu dans le centre de T_1 , si bien que la torsion de T_1 est bornée.

Soit n un entier positif ; g a une racine n -ème g' dans T , qui algérise $g = (g')^n$, et est donc générique, et de même type que g puisque dans G° . Autrement dit, g et g^n ont même centralisateur ; g^n est générique, et n'a qu'un nombre fini de racines n -èmes, puisqu'elles lui sont toutes co-algébriques.

Comme $Z = T_1 \cap H$, et comme le centre de T_1 est d'indice fini dans ce dernier, Z° est central dans Z . Il est divisible puisque sa torsion est bornée. Pour n assez grand, g^n est dans Z° , et comme il n'a qu'un nombre fini de racines n -ièmes dans H , il y algérise g et est aussi générique dans H . Comme il appartient à la composante connexe de son centralisateur, il en est de même de g , qui a même type : g est dans Z° .

Chaque point générique de H est donc contenu dans un groupe abélien divisible, sans sous-groupes propres d'indice fini, qui est donc inclus dans G° . Il en est de même

de H dont tout point est produit de deux génériques. G est donc connexe, et nous pouvons conclure comme dans le cas simple. $\square$

5. Groupes de Carter

On appelle groupe de Carter d'un groupe de rang de Morley fini un sous-groupe définissable, connexe, nilpotent et d'indice fini dans son normalisateur ; à propos de ces groupes se pose la triple question de l'existence (résolue positivement dans [7]), de la générosité et de la conjugaison ; [9] montre que les carters génériques, s'ils existent, sont conjugués et deux à deux génériquement disjoints.

Lemme 1. *Soit H un groupe de rang de Morley fini ; si F est un sous-groupe fini du centre de H , et si H/F a un groupe abélien définissable connexe T générique, H aussi.*

Démonstration. Soit Θ l'image réciproque de T ; Θ° est central dans Θ car chaque point n'y a qu'un nombre fini de conjugués ; comme Θ° a pour image T ,

$$\Theta = a_1.\Theta^\circ \cup \dots \cup a_n.\Theta^\circ$$

où les a_i sont centraux dans H ; comme Θ est générique dans H , il faut que Θ° le soit. $\square$

Théorème 2. *Tout groupe de rang de Morley fini linéaire a des sous-groupes définissables nilpotents connexes génériques.*

Démonstration. Soient H notre groupe et G sa clôture de Zariski ; nous pouvons supposer H connexe relativement à sa propre théorie. Notons N son plus grand sous-groupe définissable connexe résoluble ; comme tout sous-groupe résoluble d'un groupe de rang de Morley fini est contenu dans un groupe définissable connexe normal résoluble, les sous-groupes résolubles normaux de H/N sont finis ; comme H/N est connexe, ils sont contenus dans son centre, qui est fini ; la clôture de Zariski N_1 de N est résoluble et normalisée par H et par G ; N est donc d'indice fini dans $H \cap N_1$ si bien que ce dernier est définissable au sens de H ; $H/H \cap N_1$ est donc un sous-groupe de rang de Morley fini du groupe linéaire G/N_1 . D'après le théorème 1, le quotient de $H/H \cap N_1$ par son centre fini a un sous-groupe définissable connexe commutatif générique, et d'après le lemme 1 ci-dessus il en est de même de H/N .

Par conséquent, H a un sous-groupe définissable R connexe résoluble générique. D'après [19] et [6], qu'on peut simplifier en utilisant la linéarité de R , ce dernier a un sous-groupe C définissable connexe nilpotent générique, et comme R est connexe C est générique dans H . $\square$

Scholie. La transitivité de la générosité, pour des sous-groupes définissables connexes, est assurée par la formule de [9].

6. Groupes définissablement linéaires

Nous avons travaillé ici sous deux hypothèses sans lien entre elles : un groupe H de rang de Morley fini qui par ailleurs se trouve être un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$; les rapports entre le groupe H et le corps K peuvent être assez lâches. C'est sous les mêmes hypothèses que se place [12], où il est montré qu'il n'y a pas de contre-exemple à la Conjecture de Cherlin-Zilber parmi les sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(K)$ ou de $\mathrm{PSL}_2(K)$.

Une version antérieure de [12], [11], ainsi que [16], travaillent sous une hypothèse beaucoup plus forte, celle où la représentation linéaire elle-même est de rang de Morley fini. Nous voulons dire par là que le corps K , équipé de la relation n^2 -aire interprétant le groupe H comme sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$, forme une structure de rang de Morley fini. Nous parlerons alors de groupe *définissablement linéaire* de rang de Morley fini ; dans ce contexte, la décomposition de Jordan, et tous les outils liés à la représentation, sont respectés. Plus précisément :

Lemme 2. (i) *En caractéristique p , si H est un groupe linéaire de rang de Morley fini, et si a est un élément de H , sa partie semi-simple et sa partie unipotente sont dans H .*

(ii) *En caractéristique nulle, si H est un groupe définissablement linéaire de rang de Morley fini, et si a est un élément de H , sa partie semi-simple et sa partie unipotente sont dans H .*

Démonstration. (i) Soit M le plus petit sous-groupe définissable contenant a ; c'est un groupe abélien, qui s'écrit comme produit d'un p -groupe fini cyclique et d'un groupe D définissable p -divisible ; comme la p -torsion de H est d'exposant borné, D ne contient pas de p -éléments, et le produit est direct. Par ailleurs D ne contient que des éléments diagonalisables, puisque tout élément suffisamment p -divisible est ainsi.

(ii) Considérons la décomposition de Jordan $a = u.d$ et supposons que u n'est pas trivial ; le groupe algébrique minimal de u est isomorphe au groupe additif de K , lequel ne peut avoir de sous-groupes propres définissables dans un contexte de rang de Morley fini : c'est donc le groupe minimal de u . Quant au groupe minimal de d , c'est un groupe D diagonalisable, et le groupe M minimal de a est un sous-groupe du produit (direct) $K^+ \times D$, dont les deux projections sont surjectives vu l'unicité de la décomposition. Si l'intersection de M et de $K^+ \times 1$ est égale à $K^+ \times 1$, $M = K^+ \times D$; sinon, cette intersection est réduite à l'élément neutre, et M est le graphe d'un homomorphisme surjectif de K dans D ; d'après le lemme 3 qui suit, $d = 1$. $\square$

Dans les deux lemmes suivants, nous entendons par « corps de rang de Morley fini » une structure de rang de Morley fini formée d'un corps, nécessairement algébriquement clos, enrichi de relations supplémentaires.

Scholie. Un corps de rang de Morley fini de caractéristique nulle n'a pas de sous-groupe additif définissable propre ; s'il a des sous-groupes multiplicatifs définissables non-constructibles (des mauvais tores), on dit que c'est un mauvais corps.

Lemme 3. *Si K est un corps de rang de Morley fini, tout homomorphisme définissable de $(K^+)^n$ dans $(K^*)^m$ est trivial.*

Démonstration. En caractéristique p , $(K^+)^n$ est un p -groupe tandis que $(K^*)^m$ n'a pas de p -éléments, si bien que tout homomorphisme (définissable ou non !) du premier dans le second est trivial. En caractéristique nulle, comme $(K^+)^n$ est somme de n copies de K^+ , il suffit de le montrer pour $n = 1$. Par minimalité de K^+ , tout homomorphisme définissable de K^+ dans K^* est injectif ou trivial ; mais il ne peut être injectif car K^* est un groupe connexe de même rang de Morley que K^+ , et il ne lui est pas isomorphe puisqu'il contient de la torsion. En conséquence, si h est un homomorphisme définissable de K^+ dans $(K^*)^m$ les projections de son image sont triviales. $\square$

Et pour être complet, ajoutons le lemme suivant.

Lemme 4. *Si K est un corps de rang de Morley fini, tout homomorphisme définissable de $(K^*)^n$ dans $(K^+)^m$ est trivial.*

Démonstration. C'est clair en caractéristique p puisque K^* est p -divisible. En caractéristique nulle, un homomorphisme définissable de K^* dans K^+ ne peut être surjectif, puisque son noyau contient la torsion et est donc infini. Il est donc trivial et on procède comme ci-dessus. $\square$

D'après [16], en caractéristique p , un groupe simple définissablement linéaire de rang de Morley fini est définissablement isomorphe à un groupe algébrique (ce qui ne signifie pas qu'il soit nécessairement Zariski-clos). En caractéristique nulle, si H est un groupe connexe de rang de Morley fini définissablement linéaire et non Zariski-clos, il a un plus grand sous-groupe algébrique connexe H_a (en effet des sous-groupes Zariski-clos connexes engendrent toujours, en un nombre fini de pas, un groupe de même nature) ; H_a est normal, et contient tous les éléments unipotents de H d'après une observation de [16] ; le quotient H/H_a est lui-aussi définissablement linéaire, et ne contient que des éléments semi-simples ; d'après le théorème de triangulation de Lie-Kolchin-Malcev, ses sous-groupes définissables résolubles connexes sont commutatifs ; il est engendré par une famille de tores non-algébriques, ses centralisateurs génériques ; s'il n'est pas commutatif, on y trouve un mauvais groupe simple.

Scholie. Un mauvais groupe est un contre-exemple hypothétique à la conjecture de Cherlin-Zilber, un groupe simple dont les sous-groupes de Borel seraient commutatifs ; un tel groupe ne pourrait contenir d'involutions.

On peut donc rêver de construire un contre-exemple à la conjecture de Cherlin-Zilber en partant d'un tore non-algébrique T , et en le conjugant en un tore T' de sorte que le groupe engendré par T et T' ne soit pas commutatif et ne contiennent pas d'unipotent non trivial. On construirait par la même occasion un groupe simple linéaire sans involutions, ce qui résoudrait un problème semble-t-il ouvert en pure théorie des groupes.

Malheureusement, les résultats négatifs dont nous avons parlé laissent penser que la chose ne doit pas être si simple, d'autant plus que [4] et [5] montrent que les seuls mauvais tores de rang de Morley fini qui ont été construits jusqu'à présent, ceux des corps verts de [3], ne permettent pas de définir de mauvais groupes.

RÉFÉRENCES

- [1] T. Altinel, A. V. Borovik et G. Cherlin, *Simple groups of finite Morley rank*, Mathematical Surveys and Monographs, **145**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. xx+556 pp.
- [2] T. Altinel, J. Burdges et O. Frécon, *A Jordan decomposition for groups of finite Morley rank*, à paraître.
- [3] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro et F. O. Wagner, *Die böse Farbe*, J. Inst. Math. Jussieu **8** (2009), no. 3, 415–443.
- [4] T. Blossier, A. Martin-Pizarro et F. O. Wagner, *Géométries relatives*, prépublication, arXiv.org :1009.0367.
- [5] T. Blossier, A. Martin-Pizarro et F. O. Wagner, *À la recherche du tore perdu*, prépublication, arXiv.org :1211.7235.
- [6] G. Cherlin et E. Jaligot, *Tame minimal subgroups of finite Morley rank*, J. Algebra **276** (2004), no. 1, 13–79.
- [7] O. Frécon et E. Jaligot, *The existence of Carter subgroups in groups of finite Morley rank*, J. Group Theory **8** (2005), no. 5, 623–633.
- [8] O. Frécon et E. Jaligot, *Conjugacy in groups of finite Morley rank*, Model theory with applications to algebra and analysis, Vol. 2, 1–58, London Math. Soc. Lectures Notes Series, **350**, Cambridge Univ. Press, 2008.
- [9] E. Jaligot, *Generix never gives up*, J. Symbolic Logic **71** (2006), no. 2, 599–610.
- [10] E. Jaligot, *Cosets, genericity, and the Weyl Group*, J. Algebra **322** (2009), no. 4, 1060–1071.
- [11] Y. Mustafin, *Structure des groupes linéaires définissables dans un corps de rang de Morley fini*, J. Algebra **281** (2004), no. 2, 753–773.
- [12] Y. Mustafin et B. Poizat, *Sous-groupes superstables de $SL_2(K)$ et de $PSL_2(K)$* , J. Algebra **297** (2006), no. 1, 155–167.
- [13] L. Newelski, *On type definable subgroups of a stable group*, Notre Dame J. Formal Logic **32** (1991), no. 2, 173–187.
- [14] B. Poizat, *Cours de théorie des modèles*, Nur al Mantiq wal-Ma’arifah, B. Poizat, Lyon, 1985. vi+584 pp. ; traduit en anglais par Moses Klein, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2000. xxxii+443 pp.
- [15] B. Poizat, *Groupes stables*, Nur al-Mantiq wal-Ma’arifah, vol. 2, B. Poizat, Lyon, 1987. vi+218 pp. ; traduit en anglais par Moses Klein, Mathematical Surveys and Monographs, **87**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. xiv+129 pp.
- [16] B. Poizat, *Quelques modestes remarques à propos d’une conséquence inattendue d’un résultat surprenant de Monsieur Frank Olaf Wagner*, J. Symbolic Logic **66** (2001), no. 4, 1637–1646.
- [17] B. Poizat, *Centralisateurs génériques*, J. Symbolic Logic **78** (2013), no. 1, 290–306.
- [18] F. O. Wagner, *Subgroups of stable groups*, J. Symbolic Logic **55** (1990), no. 1, 151–156.
- [19] F. O. Wagner, *Nilpotent complements and Carter subgroups in stable $\mathbb{R}$ -groups*, Arch. Math. Logic **33** (1994), no. 1, 23–34.

B. POIZAT, INST. CAMILLE JORDAN, U. CLAUDE BERNARD, 43, BOUL. DU 11 NOVEMBRE 1918,
69622 VILLEURBANNE-CEDEX, FRANCE
poizat@math.univ-lyon1.fr