

QUELQUES REMARQUES SUR LES BIVECTEURS ET LES TRIVECTEURS

NOUREDDINE MIDOUNE

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous rappelons l'essentiel des résultats déjà connus sur les formes bilinéaires alternées, nous donnons des méthodes plus simples pour les obtenir et nous présentons quelques résultats nouveaux. Nous donnons en complément la classification des sous-espaces vectoriels de $\wedge^2 F$ pour F de dimension 5, 7 et d'autres résultats semblables en vue de la classification des trivecteurs 3-scindables de rang 8 sur un corps algébriquement clos. On termine par des remarques sur les trivecteurs de rang 6.

ABSTRACT. In this paper, we recall the main results already known about the alternating bilinear forms, we give simpler methods to obtain them and we present some new results. We complement the classification of vector subspaces of $\wedge^2 F$, F of dimension 5, 7 and other similar results for the classification of 3-step splitting trivectors of rank 8 over an algebraically closed field. We conclude with some remarks on trivectors of rank 6.

1. Introduction

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K . La classification des p -vecteurs est l'étude de l'action du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel $\wedge^p E$. Si $p = 2$, il s'agit des bivecteurs et l'action de $GL(E)$ sur $\wedge^2 E$ est bien connue. Comme $\wedge^p E^* \simeq (\wedge^p E)^*$, on parle indifféremment des formes p -linéaires alternées et des p -vecteurs. Plusieurs études ont été consacrées au cas $p = 3$ et $n \leq 9$, soit sur un corps algébriquement clos, soit dans le cas général. L'action de $GL(E)$ sur $\wedge^p E$ est définie par $f.\omega = (\wedge^p f)(\omega)$, pour $f \in GL(E)$, $\omega \in \wedge^p E$ et $p \geq 2$.

Soit ω un p -vecteur. Le *support* S_ω de ω est le plus petit sous-espace F de E tel que $\omega \in \wedge^p F$. Sa *dimension* est le rang de ω , notée $d_o(\omega)$ ou $rg(\omega)$. Le *support* de ω est le sous-espace vectoriel F engendré par $x_1, \dots, x_p$, soit $S_\omega = \text{vect} \{x_1, \dots, x_p\}$. Dans ce cas, $d_o(\omega) = \dim S_\omega = p$ car $\{x_1, \dots, x_p\}$ est un système libre puisque $\omega \neq 0$. Un p -vecteur non nul ω est *décomposable* s'il existe $x_1, \dots, x_p \in E$ tel que $\omega = x_1 \wedge \dots \wedge x_p$ (produit extérieur). Un p -vecteur est somme de p -vecteurs décomposables et le nombre minimal de p -vecteurs nécessaires est un invariant intéressant appelé la *longueur*.

Soit $\omega \in \wedge^p E^*$ une forme p -linéaire. Le *radical* $Rad \omega$ de ω est l'ensemble des x de E tels que $\omega(x, x_2, \dots, x_p) = 0$ quels que soient $x_2, \dots, x_p$ dans E . Le *support* de

ω est le sous-espace $(\text{Rad } \omega)^\circ$ de E^* , isomorphe à $(E/\text{Rad } \omega)^*$. Si $\text{Rad } \omega = \{0\}$, on dit que ω est *non dégénérée* ou de *rang maximal*.

Théorème 1.1. *Un système de puissances divisées γ_n existe dans l'idéal $\bigoplus_{k \geq 1} \wedge^{2k} E$ de l'algèbre $\wedge^\circ E = \bigoplus_{k \geq 0} \wedge^{2k} E$. Si $u \in \wedge^2 M^*$, alors u est non dégénérée si et seulement si $\gamma_m(u)$ engendre le A -module $\wedge^{2m} M^*$. De plus, si $u = \sum_{i=1}^r x_{2i-1} x_{2i}$, où $\{x_1, \dots, x_{2r}, \dots, x_n\}$ est une base de M , alors*

$$\gamma_k(u) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq r} x_{2i_1-1} x_{2i_1} \dots x_{2i_k},$$

de sorte que $\text{rg}(u) = 2r$ équivaut à $\gamma_k(u) \neq 0$ et $\gamma_{k+1}(u) = 0$.

Le résultat précédent provient de [7]. Les puissances divisées permettent d'étudier en [8] les sous-espaces vectoriels de $\wedge^2 E$ et comme conséquence les algèbres de Lie 2-nilpotentes.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E , de sorte que $\wedge^p E$ s'identifie à

$$\bigoplus_{k=0}^p \left(\wedge^k E_1 \otimes \wedge^{p-k} E_2 \right).$$

Un élément $\omega \in \wedge^p E$ est dit *scindable* s'il existe une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$ telle que $\omega \in E_1 \otimes \wedge^{p-1} E_2$, vu comme facteur direct de $\wedge^p E$. Si $\dim E_1 = r$, on dit que ω est *r -scindable*. La scindabilité est une généralisation de la divisibilité ; en effet, ω est divisible si et seulement si ω est 1-scindable.

Pour classifier les éléments r -scindables de rang maximal dans $\wedge^p E$, il suffit d'étudier l'action de $GL(E_2)$ sur la grassmannienne $Gr_r(\wedge^{p-1} E_2)$ des sous-espaces vectoriels de dimension r de $\wedge^{p-1} E_2$. C'est ce qui est fait dans [5] et [6] pour $p = 3$ et pour certaines valeurs du couple $(r, n-r) = (\dim E_1, \dim E_2)$. Le cas où $n-r$ est pair est plus simple car on peut y utiliser les puissances divisées sous la forme de pfaffiens.

Remarquons qu'un même p -vecteur peut être scindable pour plusieurs valeurs de l'entier r comme le montre la remarque 3.3. Si $p = 3$, l'étude des 3-vecteurs scindables est très liée à celle des algèbres de Lie 2-nilpotentes, voir [10], [2], [3] et [8].

Le but de ce travail est d'étudier les sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\wedge^2 K^5$ et, en conséquence, les classes d'équivalence de trivecteurs 3-scindables de rang 8 dans $\wedge^3 K^8$. Dans [7], Revoy a donné un covariant polynomial dont la non-nullité caractérise les trivecteurs de rang 6. Ces résultats sont complétés et précisés.

2. Certaines propriétés des formes bilinéaires alternées ou des bivecteurs

Soit u un élément de $\wedge^2 E$. Il existe une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E pour laquelle $u = \sum_{i=1}^k e_{2i-1} e_{2i}$ et $2k \leq n$. Le support S_u est le sous-espace de E engendré par $e_1, \dots, e_{2k}$ et le rang de u est $2k$. Pour que u soit non dégénérée, il faut que E soit de

dimension paire et $2k = n$. Deux bivecteurs u_1 et u_2 sont équivalents sous l'action du groupe $GL(E)$ si et seulement s'ils ont le même rang.

Proposition 2.1. [6] Soit H un plan vectoriel dans $\wedge^2 K^5$ non contenu dans $\wedge^2 E$, pour tout hyperplan E de K^5 . Alors il existe une base $\{e_1, \dots, e_5\}$ de K^5 telle que H possède une base de l'un des deux types suivants :

$$\begin{cases} u_1 = e_1 e_2, \\ u_2 = e_2 e_3 + e_4 e_5, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4, \\ u_2 = e_1 e_3 + e_4 e_5. \end{cases}$$

Proposition 2.2. Sur un corps K de caractéristique différente de 2 et 3, $\wedge^2 K^6$ admet sept types de sous-espaces vectoriels de dimension 2 et de rang maximal donnés par une base $\{u_1, u_2\}$ (on désigne par $\{e_1, \dots, e_6\}$ une base de K^6) :

$$\left\{ \begin{array}{lll} H_1 : & u_1 = e_1 e_3 + e_2 e_4, & u_2 = e_1 e_5 + e_2 e_6; & 0, \\ H_2 : & u_1 = e_1 e_4 + e_2 e_5 + e_3 e_6, & u_2 = e_1 e_2; & x^3, \\ H_3 : & u_1 = e_1 e_4 + e_2 e_5 + e_3 e_6, & u_2 = e_1 e_2 + e_3 e_4; & x^3, \\ H_4 : & u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4, & u_2 = e_1 e_3 + e_5 e_6, & x^2 y, \\ H_5 : & u_1 = e_1 e_2, & u_2 = e_3 e_4 + e_5 e_6; & x^2 y, \\ H_6 : & u_1 = e_1 e_2 + e_5 e_6, & u_2 = e_1 e_2 + e_3 e_4; & xy(x+y), \\ H_6(p, q) : & u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4 + e_5 e_6, & u_2 = e_1(e_4 + p e_5) & x^3 + pxy^2 + qy^3. \\ & & & + e_2 e_6 + q e_3 e_5; \end{array} \right.$$

La dernière colonne donne l'invariant $\gamma_3(xu_1 + yu_2)$ sur la base $e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6$ de $\wedge^6 K^6$, où $\gamma_3 : H_i \rightarrow \wedge^6 K^6 \simeq K$ est un polynôme homogène du troisième degré.

Le résultat est connu sur un corps algébriquement clos [6] ; dans ce cas $\wedge^2 K^6$ admet six types H_i , avec $1 \leq i \leq 6$. Si K n'est pas algébriquement clos, en caractéristique différente de 2 et 3, seul le cas de H_6 fournit des K -formes non triviales $H_6(p, q)$ en bijection avec l'ensemble des K -formes binaires cubiques de discriminant non nul à changement de variables et homothétie près. En caractéristique 2 ou 3, si K n'est pas parfait, il y a également des K -formes pour H_2, H_3, H_4 et H_5 .

Le cas général, sur un corps algébriquement clos, se traite de la même manière et on a le résultat suivant.

Théorème 2.3. Soit H un plan de $\wedge^2 K^{2n}$ dont l'invariant γ_n est une forme binaire à racines distinctes. Alors il existe une base $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$ de K^{2n} et des scalaires $\lambda_4, \dots, \lambda_n \notin \{0, 1\}$ tels que H a une base

$$\begin{cases} u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4 + \dots + e_{2n-3} e_{2n-2}, \\ u_2 = e_3 e_4 + \lambda_4 e_5 e_6 + \dots + \lambda_n e_{2n-3} e_{2n-2} + e_{2n-1} e_{2n}. \end{cases}$$

Le résultat est connu [10] ; voici une démonstration simple, par récurrence sur n . Si $n = 2$ (ou $n = 3$), selon la proposition 2.2 il suffit de prendre la base H_6 , de sorte que le résultat est vrai.

Supposons $n \geq 4$ et $\gamma_n(xu_1 + yu_2) = f_n(x, y)$ l'invariant de H . Par une transformation linéaire sur u et v , on peut supposer que les racines de f_n sont $0, -1, \infty, -\lambda_4, -\lambda_5, \dots, -\lambda_n$ de sorte que

$$f_n(x, y) = xy(x + y)(x + \lambda_4 y) \cdots (x + \lambda_n y).$$

Comme $f_n(x, 0) = 0$, u_1 est de rang inférieur à $2n$. En effet, si son rang n'était pas $2n - 2$, alors $f_n(x, y)$ serait divisible par y^2 car

$$\gamma_n(xu_1 + yu_2) = \sum_{p=0}^n x^p y^{n-p} \gamma_p(u_1) \gamma_{n-p}(u_2).$$

Il en résulte que u_1 est de rang $2n - 2$. Soit $P = \text{vect} \{f_{2n-1}, f_{2n}\}$ un supplémentaire de S_{u_1} dans K^{2n} . On peut écrire

$$u_2 = \alpha f_{2n-1} f_{2n} - f_{2n} z - t f_{2n-1} + v,$$

où $t, z \in S_{u_1}$ et où $S_v \subset S_{u_1}$. Le scalaire α n'est pas nul et on peut donc supposer que $\alpha = 1$. Alors $u_2 = (f_{2n-1} + z)(f_{2n} + t) + v'$, où $S_{v'} \subset S_{u_1}$. De plus,

$$xu_1 + yu_2 = (xu_1 + yv') + ye_{2n-1}e_{2n}$$

et

$$\gamma_n(xu_1 + yu_2) = y\gamma_{n-1}(xu_1 + yv')e_{2n-1}e_{2n},$$

de sorte qu'il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\text{vect} \{u_1, v'\}$, un plan de $\wedge^2 K^{2n-2}$ (on a posé $e_{2n-1} = f_{2n-1} + z$ et $e_{2n} = f_{2n} + t$).

Les cas non génériques sont plus compliqués à traiter et trop nombreux pour être tous considérés. Il faut distinguer les multiplicités des racines, le cas le plus simple étant celui où $\gamma_n(xu_1 + yu_2) = x^{n-1}y$. On peut alors trouver une base $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$ de K^{2n} , où $u_1 = \sum_{j < n} e_{2j-1}e_{2j}$, et il faut discuter suivant le rang de u_2 qui peut varier de 2 à $2n - 2$.

Pour $2n = 8$, cela nous donne trois possibilités pour u_2 qui sont $e_7e_8, e_1e_3 + e_7e_8$ et $e_1e_3 + e_2e_5 + e_7e_8$. On a donc

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6, & u_2 = e_7e_8; \\ u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6, & u_2 = e_1e_3 + e_7e_8; \\ u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6, & u_2 = e_1e_3 + e_2e_5 + e_7e_8. \end{cases}$$

Cela montre bien que le cas général est trop compliqué pour qu'il soit vraiment intéressant de donner toutes les possibilités.

Remarque 2.4. (1) Nous avons vu dans le paragraphe suivant le théorème 1.1 que la donnée d'un trivecteur scindable ω revient à celle d'un sous-espace vectoriel d'un espace $\wedge^2 E$. Ainsi la proposition 2.1 donne deux classes de trivecteurs 2-scindables de rang 7 et la proposition 2.2 donne six classes de trivecteurs 2-scindables de rang 8, sur un corps algébriquement clos, qui ne sont pas isomorphes en tant que trivecteurs.

(2) Si u et v sont des bivecteurs tels que $S_v \subset S_u$, $rg(u) = 4$ et $rg(v) = 2$, alors il existe une base $\{a, b, x, y\}$ de S_u telle que

$$\begin{cases} \text{si } uv = 0, \text{ alors } v = xy \text{ et } u = ax + by, \\ \text{si } uv \neq 0, \text{ alors } v = xy \text{ et } u = \lambda xy + ab. \end{cases}$$

(3) Si u est un bivecteur de rang 6 et ω est un trivecteur de rang 3 tels que $S_\omega \subset S_u$, alors il existe une base $\{a, b, c, x, y, z\}$ de S_u telle que

$$\begin{cases} \text{si } u\omega = 0, \text{ alors } \omega = xyz \text{ et } u = ax + by + cz, \\ \text{si } u\omega \neq 0, \text{ alors } \omega = xyz \text{ et } u = ab + cx + yz. \end{cases}$$

Proposition 2.5. $\wedge^2 K^7$ admet cinq types de sous-espaces vectoriels de dimension 2 et de rang maximal donnés par une base $\{u_1, u_2\}$:

$$\begin{cases} V_1 : & u_1 = e_1e_2 + e_3e_4, & u_2 = e_4e_5 + e_6e_7 ; \\ V_2 : & u_1 = e_1e_2, & u_2 = e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7 ; \\ V_3 : & u_1 = e_1e_2 + e_3e_4, & u_2 = e_2e_5 + e_3e_6 + e_4e_7 ; \\ V_4 : & u_1 = e_1e_2 + e_3e_4, & u_2 = e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7 ; \\ V_5 : & u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6, & u_2 = e_1e_4 + e_3e_7 + e_5e_2 ; \end{cases}$$

où $\{e_1, \dots, e_7\}$ est une base convenable de K^7 .

Démonstration. Soit $V = \text{vect}\{u_1, u_2\}$ un plan vectoriel dans $\wedge^2 K^7$. Supposons d'abord le cas où V possède une base $\{u_1, u_2\}$ de bivecteurs de rang 4. Dans ce cas, $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est une droite. On peut donc trouver une base $\{e_1, e_2, \dots, e_7\}$ de K^7 telle que $u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$ et $u_2 = e_4e_5 + e_6e_7$.

Supposons maintenant que V possède une base $\{u_1, u_2\}$ contenant un bivecteur de rang 6, soit u_2 . Trois cas se présentent suivant que $rg(u_1) = 2, 4, 6$.

Si $rg(u_1) = 2$, alors $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est une droite et on peut écrire $u_1 = e_1e_2$ et $u_2 = e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7$.

Si $rg(u_1) = 4$, alors $\dim(S_{u_1} \cap S_{u_2}) = 3$. On pose $S_{u_1} \cap S_{u_2} = \text{vect}\{x, y, z\}$, et on écrit $u_1 = ax + yz$. Soit $\omega = xyz$. C'est un trivecteur de rang 3. On a $S_\omega \subset S_{u_2}$ et il existe une base $\{x, y, z, b, c, d\}$ de S_{u_2} comme suit :

- Si $u_2\omega = 0$, alors $u_2 = xb + yc + zd$. En posant $a = e_1, b = e_5, c = e_6, x = e_2, y = e_3$ et $z = e_4$, on a $u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$ et $u_2 = e_2e_5 + e_3e_6 + e_4e_7$.
- Si $u_2\omega \neq 0$, alors $u_2 = xy + zb + cd$, ce qui donne $u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$ et $u_2 = e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7$.

Dans le troisième cas où V possède une base $\{u_1, u_2\}$ de bivecteurs de rang 6, on est dans un cas particulier du résultat plus général en [9] suivant.

Lemme 2.6. Soit $P = \text{vect}\{u_1, u_2\}$ un plan vectoriel dans $\wedge^2 K^{2n+1}$, de rang maximal, avec

$$rg(u_1) = rg(u_2) = 2n.$$

Alors il existe une base $\{h_0, \dots, h_n, e_1, \dots, e_n\}$ de K^{2n+1} telle que

$$u_1 = e_1h_1 + \dots + e_nh_n \quad \text{et} \quad u_2 = e_1h_0 + \dots + e_nh_{n-1}.$$

Dans notre cas, à un changement de notation près, on trouve

$$u_1 = e_3e_4 + e_1e_2 + e_5e_6 \quad \text{et} \quad u_2 = e_3e_7 + e_1e_4 + e_5e_2. \quad \square$$

Remarque 2.7. (1) Cette base s'appelle une *paire de Kronecker*.

(2) La deuxième base de la proposition 2.1 est aussi un cas particulier de ce résultat.

3. Trivecteurs 3-scindables de rang 8 sur un corps algébriquement clos

La description des 3-vecteurs de rang 8 qui sont 3-scindables revient à l'étude des sous-espaces P de dimension 3 de $\wedge^2 K^5$. On se donne une base $\{u_1, u_2, u_3\}$ la plus simple possible, les $u_i \in \wedge^2 K^5$ étant exprimés dans une base $\{e_j\}$, $1 \leq j \leq 5$. On pose $P = \text{vect}\{u_1, u_2, u_3\}$. Il s'agit d'étudier les orbites de $PGL_5(K)$ sur $Gr_3(\wedge^2 K^5)$, une variété algébrique compacte de dimension $21 = 3(10 - 3)$. Les cas les plus simples sont ceux où le support n de P n'est pas de dimension maximale 5. Si cette dimension vaut 3, on prend une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ de K^5 telle que $W = \text{vect}\{e_1, e_2, e_3\}$. Alors $P = \wedge^2 W$ et on peut prendre une base $u_1 = e_1 e_2$, $u_2 = e_1 e_3$ et $u_3 = e_2 e_3$. Si cette dimension vaut 4, $\gamma_2/P : P \rightarrow \wedge^4 W$ est une application quadratique dont le rang r détermine la classe d'isomorphisme [7]. Les quatre cas possibles sont, avec $W = \text{vect}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } r = 0, \text{ alors } u_1 = e_1 e_2, u_2 = e_1 e_3 \text{ et } u_3 = e_1 e_4; \\ \text{si } r = 1, \text{ alors } u_1 = e_1 e_2, u_2 = e_1 e_3 \text{ et } u_3 = e_1 e_4 + e_2 e_3; \\ \text{si } r = 2, \text{ alors } u_1 = e_1 e_2, u_2 = e_1 e_3 \text{ et } u_3 = e_2 e_4; \\ \text{si } r = 3, \text{ alors } u_1 = e_1 e_2, u_2 = e_3 e_4 \text{ et } u_3 = e_1 e_3 + e_2 e_4. \end{array} \right.$$

Pour le cas du rang maximal, quatre cas se présentent selon que nous soyons en présence de $(rg(u_1), rg(u_2), rg(u_3))$ égal à $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 4)$, $(2, 4, 4)$ ou $(4, 4, 4)$. On a le résultat suivant.

Théorème 3.1. *L'espace vectoriel $\wedge^2 K^5$ admet 12 types de sous-espaces vectoriels de dimension 3 et de rang maximal donnés par une base $\{u_1, u_2, u_3\}$, où $\{e_1, \dots, e_5\}$ est une base convenable de K^5 :*

$$\left\{ \begin{array}{lll} P_1 : & u_1 = e_1 e_2, & u_2 = e_1 e_3, & u_3 = e_4 e_5; \\ P_2 : & u_1 = e_1 e_2, & u_2 = e_3 e_4, & u_3 = (e_1 + e_3) e_5; \\ P_3 : & u_1 = e_1 e_2, & u_2 = e_1 e_3, & u_3 = e_1 e_4 + e_2 e_5; \\ P_4 : & u_1 = e_1 e_2, & u_2 = e_1 e_3, & u_3 = e_2 e_4 + e_3 e_5; \\ P_5 : & u_1 = e_1 e_2, & u_2 = e_1 e_3, & u_3 = e_2 e_3 + e_4 e_5; \\ P_6 : & u_1 = e_1 e_2, & u_2 = e_3 e_4, & u_3 = e_1 e_3 + e_2 e_5; \\ P_7 : & u_1 = e_1 e_2, & u_2 = e_3 e_4, & u_3 = e_1 e_3 + (e_2 + e_4) e_5; \\ P_8 : & u_1 = e_1 e_2, & u_2 = e_1 e_3 + e_2 e_4, & u_3 = e_1 e_5 + e_2 e_3; \\ P_9 : & u_1 = e_1 e_2, & u_2 = e_1 e_3 + e_2 e_4, & u_3 = e_1 e_5 + e_3 e_4; \\ P_{10} : & u_1 = e_1 e_2, & u_2 = e_1 e_3 + e_2 e_4, & u_3 = e_4 e_5 + e_2 e_3; \\ P_{11} : & u_1 = e_1 e_2, & u_2 = e_1 e_5 + e_4 e_3, & u_3 = e_2 e_3 + e_4 e_5; \\ P_{12} : & u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4, & u_2 = e_2 e_3 + e_4 e_5, & u_3 = e_1 e_4 + e_3 e_5. \end{array} \right.$$

Démonstration. Soit $P = \text{vect} \{u_1, u_2, u_3\}$ un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\wedge^2 K^5$ et de rang maximal. Nous avons les cas suivants.

Cas (2, 2, 2). Supposons d'abord que P possède une base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de bivecteurs de rang 2. Deux cas se présentent suivant que les supports S_{u_i} peuvent avoir deux à deux une intersection non réduite à $\{0\}$ ou non.

Dans le premier cas, on suppose que $S_{u_1} \cap S_{u_2} \neq \{0\}$. Alors $\dim(S_{u_1} + S_{u_2}) = 3$, donc $(S_{u_1} + S_{u_2}) \cap S_{u_3} = \{0\}$ car sinon P n'est pas de rang maximal. On peut donc trouver une base $\{e_1, e_2, \dots, e_5\}$ de K^5 telle que $u_1 = e_1e_2$, $u_2 = e_1e_3$ et $u_3 = e_4e_5$.

Dans le second cas, $S_{u_1} \cap S_{u_2} = \{0\}$. Donc $S_{u_1} + S_{u_2} = S_{u_1} \oplus S_{u_2}$ est de dimension 4. De plus $S_{u_3} \cap (S_{u_1} + S_{u_2})$ est une droite non contenue dans S_{u_1} ni S_{u_2} . On peut donc écrire $u_3 = (e_1 + e_3)e_5$, où $e_1 \in S_{u_1}$ et $e_3 \in S_{u_2}$. Complétant e_1 en une base de S_{u_1} et e_3 en une base de S_{u_2} , on voit que $P = \text{vect} \{u_1, u_2, u_3\}$, avec $u_1 = e_1e_3$, $u_2 = e_3e_4$ et $u_3 = (e_1 + e_3)e_5$.

Cas (2, 2, 4). Considérons maintenant le cas où P possède au moins une base $\{u_1, u_2, u_3\}$, où $\text{rg}(u_1) = \text{rg}(u_2) = 2$ et $\text{rg}(u_3) = 4$. On suppose d'abord que $S_{u_1} \cap S_{u_2} \neq \{0\}$, de sorte qu'on peut écrire $u_1 = e_1e_2$, $u_2 = e_1e_3$; nécessairement $S_{u_3} \cap (S_{u_1} + S_{u_2})$ est de rang 2.

Si $Ke_1 \subset S_{u_3}$, on peut supposer que $S_{u_1} \subset S_{u_3}$ (où $S_{u_3} \supset \text{vect} \{e_1, \alpha e_2 + \beta e_3\}$, et on peut remplacer u_1 ou u_2 par $\alpha u_1 + \beta u_2$). Alors $u_1u_3 = 0$, car sinon le plan $\text{vect} \{u_1, u_3\}$ contiendrait un bivecteur de rang 2 différent de u_1 . On peut donc écrire $u_3 = e_1e_4 + e_2e_5$, pour un choix convenable de e_4 et e_5 . Si $Ke_1 \not\subset S_{u_3}$, on peut supposer que $S_{u_3} \cap (S_{u_1} + S_{u_2}) = \text{vect} \{e_2, e_3\}$. Deux cas se présentent suivant que $e_2e_3u_3 = 0$, ou $e_2e_3u_3 \neq 0$. Cela donne deux sous-espaces P de $\wedge^2 K^5$:

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_2, & u_2 = e_1e_3, & u_3 = e_2e_4 + e_3e_5, \\ u_1 = e_1e_2, & u_2 = e_1e_3, & u_3 = e_2e_3 + e_4e_5. \end{cases}$$

Supposons maintenant que $S_{u_1} \cap S_{u_2} = \{0\}$. Si $S_{u_3} \supset S_{u_1}$, alors $S_{u_3} \cap S_{u_2}$ est une droite. On peut écrire $u_1 = e_1e_2$, $u_3 = e_1x + e_2y$ (car $u_1u_3 = 0$) et $u_2 = e_3e_4$, où $e_3 \in S_{u_3}$, $e_3 = ax + by + ce_1 + de_2$ et $(a, b) \neq (0, 0)$. Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et on peut prendre $a = 1$ et $x = e_3 - ce_1 - de_2$ de sorte que $u_3 = e_1e_3 + e_2(y + de_1)$, si bien qu'en choisissant $e_5 = y + de_1$, on a $u_1 = e_1e_2$, $u_2 = e_3e_4$ et $u_3 = e_1e_3 + e_2e_5$. En faisant un changement de base dans le plan $\{e_1, e_2\}$, on peut se ramener au cas où $b = 0$.

Si $S_{u_3} \cap S_{u_1}$ et $S_{u_3} \cap S_{u_2}$ sont des droites, on les note Ke_1 et Ke_3 . Alors

$$S_{u_3} \cap (S_{u_1} \oplus S_{u_2}) = \text{vect} \{e_1, e_3, e_2 + e_4\},$$

où $u_1 = e_1e_2$, $u_2 = e_3e_4$ et $S_{u_3} = \text{vect} \{e_1, e_3, e_2 + e_4, e_5\}$. Posons $v = e_1e_3$. On a $S_v \subset S_{u_3}$.

Si $vu_3 = 0$, alors $u_3 = e_1x + e_3y$, où $x = ae_3 + b(e_2 + e_4) + ce_5$. Quitte à changer y on peut supposer que $a = 0$. Si $c = 0$, on peut prendre $b = 1$ et $y = e_5$, de sorte que $u_3 = e_1(e_2 + e_4) + e_3e_5$. En enlevant u_1 à u_3 , on trouve $u'_3 = e_1e_4 + e_3e_5$ et $S_{u'_3} \supset S_{u_2}$, un cas déjà étudié. Si $c \neq 0$, on peut supposer que $ce_5 + b(e_2 + e_4) = e_5$, de sorte que $u_3 = e_1e_5 + e_3y$, où $y = \alpha e_1 + \beta(e_2 + e_4) + \gamma e_5$. D'une part, si $\gamma = 0$, on

a $u_3 = e_1e_5 + e_3(\alpha e_1 + \beta(e_2 + e_4))$. Quitte à modifier e_5 , on peut supposer $\alpha = 0$. Alors $u_3 = e_1e_5 + e_3(e_2 + e_4)$ en faisant une homothétie sur u_3 et e_5 ou en enlevant $u_2 = e_3e_4$ à u_3 , d'où $u_3'' = e_1e_5 + e_3e_2$, avec $S_{u_3''} \supset S_{u_1}$, ce qui est un cas déjà étudié. D'autre part, si $\gamma \neq 0$, on peut supposer que $\gamma = 1$, de sorte que

$$u_3 = e_1e_5 + e_3(\alpha e_1 + \beta(e_2 + e_4) + e_5)$$

et

$$u_3'' = u_3 + au_1 + bu_2 = e_1(e_5 + ae_2) + e_3(\alpha e_1 + \beta(e_2 + e_4) + be_4 + e_5).$$

Prenons $a = \alpha$, $b = -\beta$ et posons $e_5' = e_5 + ae_1$. Alors $u_3''' = e_1e_5' + e_3(e_5' + \beta e_2)$ et $\beta \neq 0$ car $rg(u_3''') = 4$, et on prend $\beta = 1$ en changeant e_2 et u_1 . On trouve alors $u_1 = e_1e_2$, $u_2 = e_3e_4$ et $u_3 = e_2e_3 + (e_1 + e_3)e_5$. Mais $S_{u_3} \supset S_{u_1}$ de sorte que $u_3 - u_1$ est de rang 2.

Si $vu_3 \neq 0$, alors $u_3 = e_1e_3 + xy$, où $y = e_5$, $x = ae_1 + be_3 + c(e_2 + e_4)$. Ainsi $u_1 = e_1e_2$, $u_2 = e_3e_4$ et $u_3 = e_1e_3 + (ae_1 + be_3 + c(e_2 + e_4))e_5$. On a $c \neq 0$ car sinon $\gamma_2(u_3) = 0$. On peut prendre $c = 1$ et alors

$$u_3 = e_1e_3 + (ae_1 + e_2 + be_3 + e_4)e_5.$$

On pose $e_2' = e_2 + ae_1$ et $e_4' = e_4 + be_3$, de sorte que $u_3 = e_1e_3 + (e_2' + e_4')e_5$. Le seul sous-espace obtenu est $\text{vect}\{e_1e_2, e_3e_4, e_1e_3 + (e_2' + e_4')e_5\}$.

Cas (2, 4, 4). Étudions maintenant le cas où P possède un seul bivecteur non nul de rang 2, soit u_1 . Un premier cas est celui où u_1 annule P , ce qui revient à dire que $S_{u_1} \subset S_v$ pour tout $v \in P - \{0\}$, et

$$u_1 = e_1e_2, \quad u_2 = e_1x + e_2y \quad \text{et} \quad u_3 = e_1z + e_2t.$$

On peut supposer que $\{x, y, z\}$ est un système libre complétant $\{e_1, e_2\}$ en une base de K^5 . On pose $x = e_3$, $y = e_4$ et $z = e_5$. Alors $u_2 = e_1e_3 + e_2e_4$ et $u_3 = e_1e_5 + e_2t$, où $t = ae_1 + be_3 + ce_4 + de_5$. Quitte à rajouter à u_3 un multiple de u_1 , on peut supposer que $a = 0$. On a alors

$$\begin{cases} u_1 = (e_1 + de_2)e_2, \\ u_2 = (e_1 + de_2)e_3 + e_2(e_4 - de_3), \\ u_3 = (e_1 + de_2)e_5 + e_2(be_3 + ce_4). \end{cases}$$

Quitte à changer e_3 et e_4 , on peut supposer que $d = 0$ et on est ramené à

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_2, \\ u_2 = e_1e_3 + e_2e_4, \\ u_3 = e_1e_5 + e_2(be_3 + ce_4). \end{cases}$$

Si $c \neq 0$, alors $u_3 - cu_2 = e_1(e_5 - ce_3) + be_2e_3$, $u_2 = e_1e_3 + e_2e_4$ et $u_1 = e_1e_2$. On peut alors prendre $b = 1$ et changer e_5 de sorte que $u_1 = e_1e_2$, $u_2 = e_1e_3 + e_2e_4$ et $u_3 = e_1e_5 + e_2e_3$.

Comme deuxième cas, supposons que u_1 annule l'un des u_i , $i = 2, 3$, par exemple u_2 . Alors u_2 est déterminé à un multiple de u_1 près, et $u_1 = e_1e_2$, $u_2 = e_1e_3 + e_2e_4$ et pour u_3 , on a deux cas possibles.

D'une part, si $u_3 = e_2y + xz$, on peut supposer que $z \notin S_{u_2}$, mais $x, y \notin S_{u_2}$. Comme le couple (u_2, u_3) constitue une paire de Kronecker, on peut prendre

$$x = ae_3 + be_4, \quad y = ce_3 + de_4 \quad \text{et} \quad z = e_5.$$

Si $b \neq 0$, on peut supposer que $b = 1$. Dans ce cas, on peut écrire u_1, u_2 et u_3 , sous la forme

$$\begin{cases} u_1 = (e_1 - ae_2) e_2, \\ u_2 = (e_1 - ae_2) e_3 + e_2 (e_4 + ae_3), \\ u_3 = (e_4 + ae_3) e_5 + e_2 (de_4 + ce_3). \end{cases}$$

On est ramené à

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_2, \\ u_2 = e_1e_3 + e_2e_4, \\ u_3 = e_4e_5 + e_2(de_4 + ce_3), \end{cases}$$

où $c \neq 0$, car $rg(u_3) = 4$. On peut prendre $c = 1$. En changeant e_5 , on obtient $u_1 = e_1e_2, u_2 = e_1e_3 + e_2e_4$ et $u_3 = e_2e_3 + e_4e_5$.

D'autre part, si $u_3 = e_1z + xy$, alors comme précédemment, on obtient

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_2, \\ u_2 = e_1e_3 + e_2e_4, \\ u_3 = e_1e_5 + e_3e_4. \end{cases}$$

Comme troisième cas, supposons maintenant que u_1 n'annule ni u_2 ni u_3 . Alors $\dim(S_{u_2} \cap S_{u_3}) = 3$. Comme le couple (u_2, u_3) constitue une paire de Kronecker, il existe une base $\{e_1, e_2, \dots, e_5\}$ de K^5 telle que

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_2, \\ u_2 = e_1e_5 + e_4e_3, \\ u_3 = e_2e_3 + e_4e_5. \end{cases}$$

Cas $(4, 4, 4)$. Supposons maintenant que P est de rang maximal. Alors P est l'orbite ouverte dense de Zariski [3, théorème 7.22, p. 326]. On remarque que chaque couple (u_i, u_j) , avec $1 \leq i < j \leq 3$, constitue une paire de Kronecker, ce qui donne, à un changement de notation près,

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_2 + e_3e_4, \\ u_2 = e_2e_3 + e_4e_5, \\ u_3 = e_1e_4 + e_3e_5. \end{cases}$$

□

Théorème 3.2. *Sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, il existe treize classes d'équivalence de trivecteurs de rang 8.*

Ce dernier résultat provient de [4]. La détermination des trivecteurs 3-scindables se fait à l'aide du théorème 3.1. On utilise la table donnée par le théorème 3.2 (voir [4]),

relativement à une base $\{e_1, e_2, \dots, e_8\}$ de E et un système de représentants des 13 classes, notés $\omega_{8,i}$, avec $i = 1, \dots, 13$, et on déduit la table ci-dessous.

Trivecteur $\omega_{8,i}$	Sous-espace	Scindabilité
$\omega_{8,1} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6e_7e_8$	P_1	2 et 3 scindable
$\omega_{8,2} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_5e_6e_8$	P_3	2 et 3 scindable
$\omega_{8,3} = e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_5 + e_7e_8)$	P_5 et P_6	2 et 3 scindable
$\omega_{8,4} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_7 + e_4e_8)$	P_4	2, 3, 4 scindable
$\omega_{8,5} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_3 + e_7e_8)$	P_2	2 et 3 scindable
$\omega_{8,6} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_8(e_4e_3 + e_5e_6)$	P_9	2 et 3 scindable
$\omega_{8,7} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_2(e_5e_6 + e_7e_8)$	P_8	3 et 4 scindable
$\omega_{8,8} = e_1(e_2e_8 + e_3e_6 + e_4e_7) + e_6e_7e_8 + e_3e_4e_5$	P_{10}	3 scindable
$\omega_{8,9} = e_1[e_2(e_3 + e_4) + e_5e_6] + e_3e_5e_7 + e_4e_6e_8$	P_7	3 scindable
$\omega_{8,10} = e_1(e_2e_8 + e_6e_7) + e_2e_3e_5 + e_3e_4e_6 + e_4e_5e_7$	P_{11}	3 scindable
$\omega_{8,11} = e_1(e_3e_7 + e_5e_4 + e_8e_2) + e_8(e_4e_3 + e_6e_7) + e_2e_4e_6$	/	/
$\omega_{8,12} = e_1[(e_4 - e_7)(e_3 - e_8) + e_5e_7] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$	P_{12}	3 scindable
$\omega_{8,13} = e_1[e_5(e_3 + e_7) + e_8e_4] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$	/	/

Remarque 3.3. On remarque que les deux sous-espaces P_5 et P_6 donnent le même trivecteur $\omega_{8,3}$, ce qui prouve que la scindabilité est une notion faible.

Corollaire 3.4. Sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, il existe 11 classes d'équivalence de trivecteurs 3-scindables de rang 8.

4. Remarques sur la classification en dimension 6

Citons le résultat suivant de [6].

Lemme 4.1. Sur un corps quadratiquement clos, $\wedge^3 E$ a deux orbites de rang maximal. Si $\{e_1, e_2, \dots, e_6\}$ est une base de E , un représentant de chaque orbite est donné par $\omega_{6,1} = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6$ et $\omega_{6,2} = e_1e_2e_4 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6$.

Un trivecteur ω est dit *de type* $\omega_{6,1}$ sur un corps quelconque K si par extension algébrique K' de K il est équivalent à $\omega_{6,1}$. On peut alors décrire les trivecteurs de rang 6 de type $\omega_{6,1}$ qui ne sont pas équivalents à $\omega_{6,1}$. Citons un autre résultat de [6].

Lemme 4.2. Soient K un corps quelconque, ω un trivecteur de rang maximal de type $\omega_{6,1}$ et $\{e_1, e_2, \dots, e_6\}$ une base quelconque de E .

(1) Si $\text{car}(K) \neq 2$, alors il existe $d \in K - K^2$ tel que

$$\omega = \omega_{6,1,d} = e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_6 - de_4e_5).$$

(2) Si $\text{car}(K) = 2$, alors il existe $a \notin \{\alpha^2 + \alpha \mid \alpha \in K\}$ tel que

$$\omega = \omega_{6,1,a} = e_1(e_3e_4 + ae_5e_6) + e_2(e_3e_6 + e_4e_5 + e_5e_6).$$

Dans [7], Revoy a défini des covariants algébriques des formes trinéaires alternées de rang 6 qui permettent de mieux comprendre la classification de ces formes. Soient K un corps de caractéristique quelconque et E un K -espace vectoriel de dimension 6. On associe à un élément $\omega \in \wedge^3 E$ une application ν_ω de $E \otimes E^*$ dans $\wedge^6 E$ définie par $\nu_\omega(x \otimes f) = x\omega d_f(\omega)$. En fixant un générateur de $\wedge^6 E$, on obtient un endomorphisme u_ω de E^* (du fait de l'isomorphisme naturel $\text{End} E^* \rightarrow (E^*)^* \otimes E^*$ et de $E \simeq E^{**}$). Il se trouve que u_ω^2 est une homothétie dont le rapport $P(\omega)$, qui appartient à $\wedge^6 E \otimes \wedge^6 E$, est covariant de degré 4 de ω , et un calcul simple montre que les trivecteurs de type $\omega_{6,1}$ sont caractérisés par la condition $P(\omega) \neq 0$. Soit $B = \{e_1, \dots, e_6\}$ une base de E . On a $\text{Mat}_B(u_\omega) = (C_{ij})$ et $C_{ij} = e_i \omega d_{e_j^*}(\omega)$.

Lemme 4.3. Si $\lambda \in K^*$ et $\mu \in K$, alors le trivecteur

$$\omega = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda e_4e_5e_6 + \mu e_2e_3e_6$$

est de type $\omega_{6,1}$.

Démonstration. Calculons $C_{ij} = e_i \omega d_{e_j^*}(\omega)$. On a

$$\begin{cases} C_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \text{ ou } i + j \neq 7, \\ C_{ii} = \lambda & \text{si } i \leq 3, \\ C_{ii} = -\lambda & \text{si } i > 3, \\ C_{16} = 2\mu\lambda, C_{26} = -C_{43} = C_{51} = 2 & \text{et } C_{56} = 2\mu. \end{cases}$$

La matrice de u_ω^2 est $\lambda^2 \text{id}_{K^6}$, et donc $P(\omega) = \lambda^2$. Comme $\lambda \in K^*$, ω est de type $\omega_{6,1}$. $\square$

Lemme 4.4. Soit $\omega = x(e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6) + ye_1e_2e_3 + ze_4e_5e_6$, où $x, y, z \in K$. Alors ω n'est pas de type $\omega_{6,1}$ si $y = 0$ ou $yz^2 + 4x^3 = 0$.

Démonstration. Calculons $C_{ij} = e_i \omega d_{e_j^*}(\omega)$. On a

$$\begin{cases} C_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \text{ ou } i + j \neq 7, \\ C_{ii} = yz & \text{si } i \leq 3, \\ C_{ii} = -yz & \text{si } i > 3, \\ C_{16} = C_{34} = -C_{25} = -2x^2, \\ C_{43} = C_{61} = -C_{52} = 2xy. \end{cases}$$

La matrice de u_ω prend la forme

$$\text{Mat}_B(u_\omega) = \begin{pmatrix} A & 2x^2B \\ 2xyB & -A \end{pmatrix},$$

où $A = yz \operatorname{id}_{K^3}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit

$$\operatorname{Mat}_B(u_\omega^2) = y(yz^2 + 4x^3)\operatorname{id}_{K^6},$$

d'où $P(\omega) = y(yz^2 + 4x^3)$. $\square$

En particulier pour $x = 1$, on trouve le lemme 4.5 dans [1].

Lemme 4.5. Soit $\omega = xe_1e_4e_5 + ye_2e_4e_6 + ze_3e_5e_6 + te_1e_2e_3$, où $x, y, z, t \in K$. Alors ω n'est pas de type $\omega_{6,1}$ si $xyzt = 0$.

Démonstration. Calculons $C_{i7-i} = e_i\omega d_{e_{7-i}^*}(\omega)$. On a

$$C_{16} = 2yz, C_{25} = 2xz, C_{34} = 2xy, C_{43} = 2zt, C_{52} = 2yt \text{ et } C_{61} = 2xt.$$

Dans ce cas la matrice de u_ω^2 est

$$\operatorname{Mat}_B(u_\omega^2) = 4xyzt \operatorname{id}_{K^6},$$

d'où $P(\omega) = 4xyzt$. $\square$

Soient $D \subset \wedge^3 K^6$ un sous-espace de dimension 2 et $\{\omega_1, \omega_2\}$ une base de D . On peut associer à D une forme polynomiale homogène de degré 4 (biquadratique), notée f_D et définie à un multiple scalaire près de la façon suivante : pour $\omega = a\omega_1 + b\omega_2 \in D$, on pose $P(\omega) = f_D(a, b)$.

Le lemme 4.5 permet d'établir le résultat suivant, où on suppose pour simplifier que K est algébriquement clos. Rappelons que deux polynômes homogènes de degré n à deux variables (ou formes binaires de degré n) sont *équivalents* s'ils se correspondent par changement linéaire de variables.

Proposition 4.6. Pour tout polynôme homogène de degré 4 à deux variables φ , il existe un sous-espace D de dimension 2 de $\wedge^3 K^6$ tel que φ et f_D sont équivalents.

Démonstration. Une forme binaire φ de degré 4 dans les variables X et Y , s'écrit $\prod_{i=1}^4 (X - \lambda_i Y)$, où les λ_i sont les quatre racines de l'équation $\varphi(X, 1) = 0$. Posons

$$x = X - \lambda_1 Y, y = X - \lambda_2 Y, z = X - \lambda_3 Y \text{ et } t = X - \lambda_4 Y.$$

On prend alors

$$\omega_1 = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + e_1e_2e_3,$$

et

$$\omega_2 = \lambda_1 e_1e_4e_5 + \lambda_2 e_2e_4e_6 + \lambda_3 e_3e_5e_6 + \lambda_4 e_1e_2e_3,$$

de même que $D = \operatorname{vect} \{\omega_1, \omega_2\}$. Le lemme 4.5 dit que

$$f_D(X, Y) = P(X\omega_1 - Y\omega_2) = \prod_{i=1}^4 (X - \lambda_i Y)$$

est équivalent à φ . $\square$

Remerciements. Je remercie vivement M. Philippe Revoy pour les nombreuses conversations qui m'ont permis d'approfondir ces questions.

RÉFÉRENCES

- [1] A. Cohen et A. Helminck, *Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 7*, Comm. Algebra **16** (1988), no. 1, 1–25.
- [2] L. Yu. Galitski et D. A. Timashev, *On classification of metabelian Lie algebras*, J. Lie Theory **9** (1999), no. 1, 125–156.
- [3] M. A. Gauger, *On the classification of metabelian Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973), 293–329.
- [4] L. Noui, *Transvecteur de rang 8 sur un corps algébriquement clos*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **324** (1997), no. 6, 611–614.
- [5] L. Noui et P. Revoy, *Formes multilinéaires alternées*, Ann. Math. Blaise Pascal **1** (1994), no. 2, 43–69 (1995).
- [6] P. Revoy, *Trivecteurs de rang 6*, dans Colloque sur les Formes Quadratiques, 2 (Montpellier, 1977), Bull. Soc. Math. France Mém. No. 59 (1979), 141–155.
- [7] P. Revoy, *Formes trilinéaires alternées de rang 7*, Bull. Sci. Math. (2) **112** (1988), no. 3, 357–368.
- [8] P. Revoy, *Algèbres de Lie métabéliennes*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5) **2** (1980), no. 2, 93–100.
- [9] M. H. Rigal, *Géométrie globale des systèmes bihamiltoniens en dimension impaire*, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier II, France, 1996.
- [10] J. Scheuneman, *Two-step nilpotent Lie algebras*, J. Algebra **7** (1967) 152–159.

N. MIDOUNE, DEPT. OF MATH., FACULTY OF SCIENCE, M'SILA U., ALGERIA.
midounenour@yahoo.fr