

ÉTUDE DES FAMILLES STANDARD DE DÉPLOIEMENTS DU COL NILPOTENT DE CODIMENSIONS 2 ET 3 DONT L'AXE DES ABSCISSES EST INVARIANT

REMY MAGLOIRE ETOUA

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous étudions les familles standard de déploiements des cols nilpotents de codimensions 2 et 3 dont l'axe des abscisses est invariant. Notre étude porte principalement sur une analyse systématique des bifurcations de ces modèles (débochant sur la détermination de leur diagramme de bifurcations global) : bifurcations de cols-nœuds, bifurcations de Hopf de codimensions 1 et 2, bifurcations de boucles hétérocliniques de codimensions 1 et 2.

ABSTRACT. In this paper we study the standard families of unfoldings of the nilpotent saddles of codimensions 2 and 3 whose X -axis is invariant. The goal of our study is to make a systematic analysis of the bifurcations of these models (which leads to the determination of their global bifurcation diagram): saddle-node bifurcations, Hopf bifurcations of codimension 1 or 2, heteroclinic bifurcations of codimensions 1 and 2.

1. Introduction

Un col nilpotent dont un déploiement a pour droite invariante l'axe des abscisses est présenté à la figure 1.1 [7].

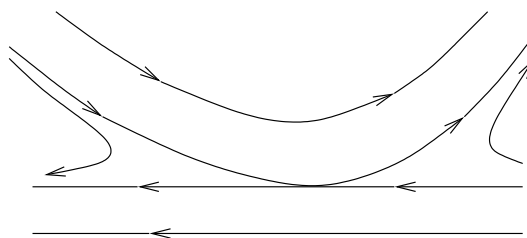


FIGURE 1.1. *Col nilpotent avec axe des abscisses invariant.*

Dans cet article, nous faisons une étude approfondie des bifurcations des familles standard de déploiements du col nilpotent de codimensions 2 et 3 dont l'axe des abscisses est invariant, à savoir les familles respectives (1.1) et (1.2) suivantes :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_1, \\ \dot{Y} = Y(\mu_2 + X + \epsilon X^2) \end{cases}$$

et

$$(1.2) \quad \begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_1, \\ \dot{Y} = Y(\mu_2 + X + \mu_3 X^2 + \tilde{\alpha}_3 X^3 + \epsilon X^4), \end{cases}$$

où $\epsilon = \mp 1$, $\tilde{\alpha}_3 < 0$ et, pour $\nu := (\nu_1, \nu_2)$ suffisamment petit, $a(\nu) < 0$ et $\mu_i := \mu_i(\nu)$. Dans toute la suite, nous poserons $a(\nu) = a$ pour simplifier cette notation.

Pour la famille (1.2), les outils dont nous disposons ne nous ont pas permis de faire un changement de variables qui nous débarrasse du terme en YX^3 de la deuxième équation, tout en conservant la droite invariante. Cependant, les calculs montrent que ce terme n'est pas pertinent.

Notons que si on enlevait la contrainte de la droite invariante, alors les familles standard de déploiements du col nilpotent s'écriraient comme suit :

$$(1.1)' \quad \begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_1, \\ \dot{Y} = \mu_0 + Y(\mu_2 + X + \epsilon X^2) \end{cases}$$

et

$$(1.2)' \quad \begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_1, \\ \dot{Y} = \mu_0 + Y(\mu_2 + X + \mu_3 X^2 + \tilde{\alpha}_3 X^3 + \epsilon X^4); \end{cases}$$

ainsi, ces systèmes auraient respectivement une codimension 3 ou 4.

La motivation principale de notre travail est l'application de l'étude des familles (1.1) et (1.2) dans une classe de modèles biologiques de la forme

$$(1.3) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x) - yg(x), \\ \dot{y} = yh(x) \end{cases}$$

et ayant un point singulier du type col nilpotent. C'est par exemple le cas dans [7] où, via (1.1) et (1.2), nous avons étudié le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x(1-x) - yp(x) - \lambda, \\ \dot{y} = y(-\delta + p(x)), \\ x \geq 0, y \geq 0, p(x) = \frac{x^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1}, \end{cases}$$

qui est une forme simplifiée d'un modèle de Gause généralisé avec récolte de proies et fonction de Holling de type III généralisée.

Rappelons que Dumortier, Roussarie et Sotomayor ont donné dans [6] le diagramme de bifurcations de

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \lambda_1 + \lambda_2 x + x^3 + y(\lambda_3 + bx + \epsilon x^2 + x^3 h(x, \lambda)) + y^2 Q(x, y, \lambda) \end{cases}$$

(où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont les paramètres et $Q(x, y, \lambda)$ est C^∞ en (x, y, λ) et d'ordre suffisamment grand en (x, y, λ)), déploiement d'un col nilpotent de codimension 3. Une petite partie concernant des intégrales abéliennes est conjecturée. Cependant, cette forme normale ne respecte pas la contrainte de la droite invariante. Par la suite, Zhu et Rousseau ont développé dans [12] une nouvelle forme normale générale déployant un col nilpotent de codimension 3 et compatible avec la contrainte d'avoir une droite invariante : un des paramètres s'annule lorsque la droite est invariante.

La classe de familles (1.3) est suffisamment vaste pour que nous puissions espérer d'autres applications de nos résultats.

Le présent article est organisé comme suit. La section 2 résume nos résultats. À la section 3, on fait une étude commune des familles (1.1) et (1.2) (points singuliers et leur type, bifurcations de col-nœud, bifurcations de Hopf de codimensions 1 et 2, positions des séparatrices des points singuliers de l'axe des x). La section 4 porte sur une étude de la bifurcation de boucle hétéroclinique du système (1.1) où, par le théorème 5.11, nous obtenons le type et la cyclicité de la boucle ; c'est après qu'on obtient, via la section 3, le diagramme de bifurcations de la famille (1.1). À la section 5, par l'étude de la bifurcation de boucle hétéroclinique du système (1.2) où nous déterminons le type et la cyclicité de la boucle par la méthode de dérivation-division généralisée doublée des notions de dérivées d'une application de transition régulière [1], on obtient (via la section 3) le diagramme de bifurcations de la famille (1.2).

2. Résumé des résultats

L'axe X des systèmes (1.1) et (1.2) est invariant. Sur l'axe X , les systèmes ont deux points singuliers, P_1 et P_2 , pour $\mu_1 \geq 0$ et aucun pour $\mu_1 < 0$, les deux points se confondant en un col-nœud pour $\mu_1 = 0$. Hors de l'axe X , on a un seul point singulier P_0 qui est, soit de type selle hyperbolique, soit de type anti-selle (c'est-à-dire, nœud, foyer, foyer faible ou centre). Le point singulier P_0 disparaît par une bifurcation de col-nœud en se confondant, soit avec P_1 , soit avec P_2 . Le point P_0 peut avoir une bifurcation de Hopf d'ordre au plus deux pour le système (1.2) et d'ordre un pour le système (1.1). Lorsque l'ordre est deux, le deuxième coefficient de Lyapunov est positif (le point est répulsif). Ainsi, lorsque le système a deux cycles limites, le cycle attractif est entouré d'un cycle répulsif. Enfin, nous avons une bifurcation de boucle hétéroclinique.

Théorème A. *Le diagramme de bifurcations avec portraits de phase de la famille (1.1) se trouve à la figure 2.1. La figure présente le cas $\epsilon = +1$ et le cas $\epsilon = -1$ est obtenu par la transformation $(X, Y, \mu_1, \mu_2, t) \mapsto (-X, Y, \mu_1, -\mu_2, -t)$.*

Comme le diagramme de bifurcations de la famille (1.2) a une structure conique, on peut visualiser toutes les surfaces de bifurcations de la famille (1.2) en dessinant la

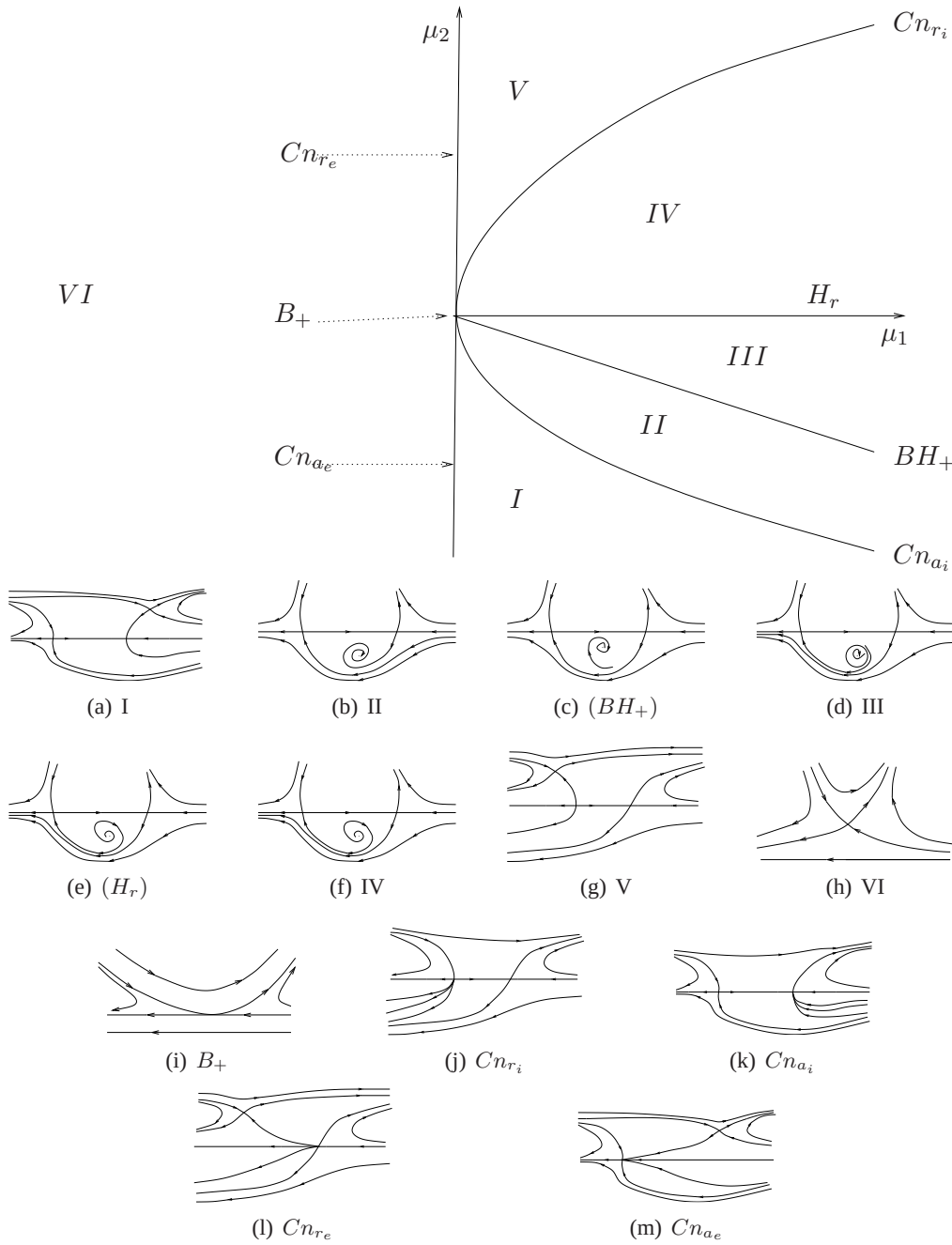


FIGURE 2.1. Diagramme de bifurcations et portraits de phase du système (1.1) pour $\epsilon = +1$.

trace de leur intersection avec la sphère

$$S_\eta := \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = \eta^2\}$$

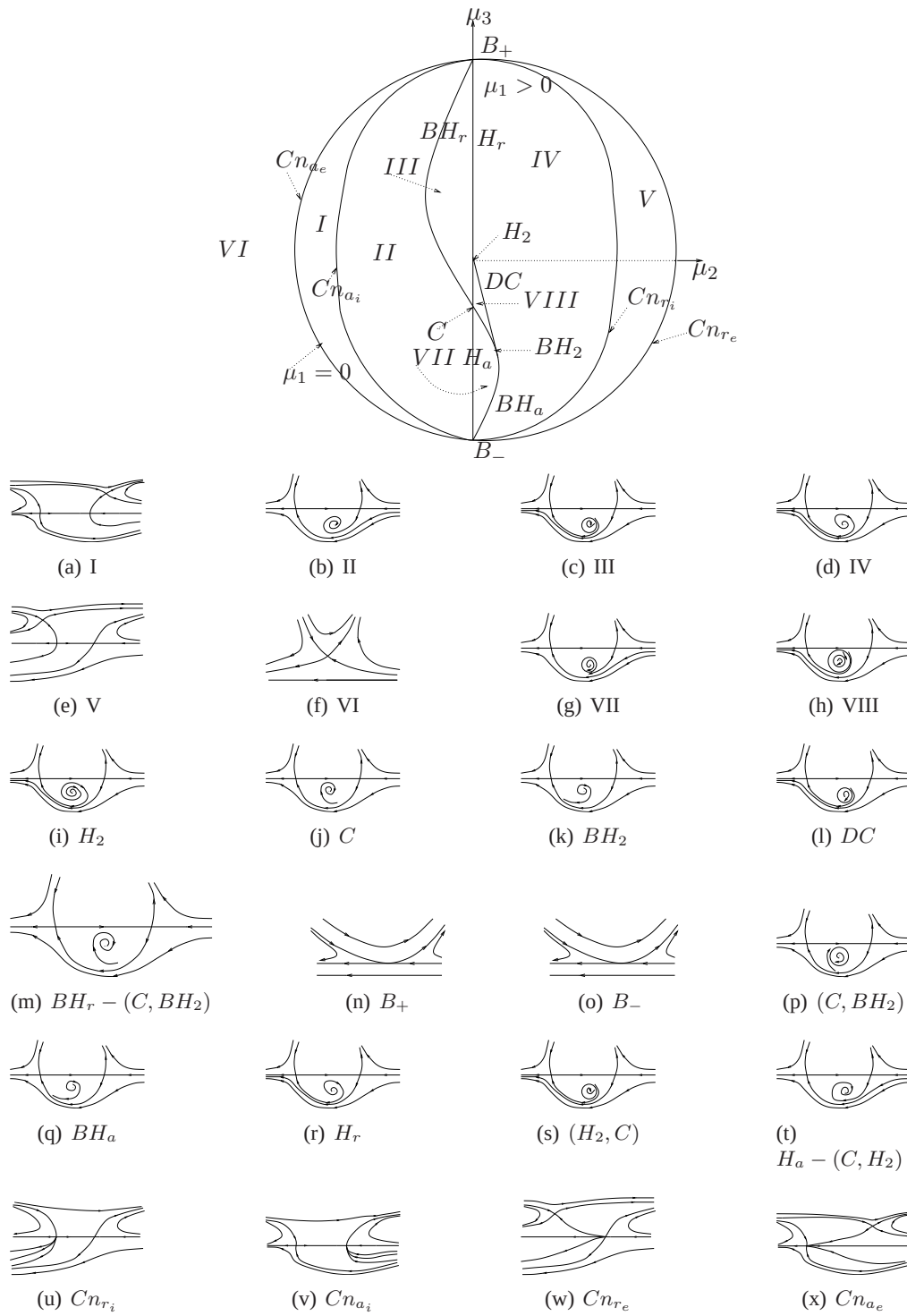


FIGURE 2.2. Trace du diagramme de bifurcations sur S_ϵ et portraits de phase du système (1.2) pour $\epsilon = +1$.

où $\eta > 0$ est suffisamment petit. La représentation de la trace du diagramme de bifurcations se fait en enlevant un point de la sphère dans la région où $\mu_1 < 0$.

Théorème B. *Le diagramme de bifurcations avec portraits de phase de la famille (1.2) apparaît à la figure 2.2. La figure présente le cas $\epsilon = +1$ et le cas $\epsilon = -1$ est obtenu par la transformation $(X, Y, \mu_1, \mu_2, \mu_3, t) \mapsto (-X, Y, \mu_1, -\mu_2, -\mu_3, -t)$.*

H_a	: Bifurcation de Hopf attractive
H_r	: Bifurcation de Hopf répulsive
H_2	: Bifurcation de Hopf de codimension deux
BH_a	: Boucle hétéroclinique attractive
BH_r	: Boucle hétéroclinique répulsive
BH_2	: Boucle hétéroclinique de codimension deux
DC	: Double cycle
C	: Intersection entre (H) et (BH)
B_+	: Bifurcation de col nilpotent avec coefficient de X^2Y positif
B_-	: Bifurcation de col nilpotent avec coefficient de X^2Y négatif
Cn_{a_i}	: Col-nœud attractif interne
Cn_{r_i}	: Col-nœud répulsif interne
Cn_{a_e}	: Col-nœud attractif externe
Cn_{r_e}	: Col-nœud répulsif externe

TABLE 2.1. Description des courbes de bifurcation de la figure 2.2.

3. Étude commune des familles (1.1) et (1.2)

Pour les familles (1.1) et (1.2), il nous suffit de traiter du cas où $\epsilon = 1$ qui, par les transformations

$$(X, Y, \mu_1, \mu_2, t) \mapsto (-X, Y, \mu_1, -\mu_2, -t)$$

et

$$(X, Y, \mu_1, \mu_2, \mu_3, t) \mapsto (-X, Y, \mu_1, -\mu_2, -\mu_3, -t),$$

nous permettra d'obtenir les résultats de celui où $\epsilon = -1$.

3.1. Points singuliers et leur type

Dans un petit voisinage de l'origine, pour des petites valeurs des paramètres, les points singuliers de (1.1) et (1.2) sont :

$$(3.1) \quad P_1 := \left(-\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}, 0\right), \quad P_2 := \left(\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}, 0\right), \quad P_0 := (X_0, Y_0),$$

où $\mu_1 \geq 0$ et (X_0, Y_0) est unique tel que

$$(3.2) \quad \begin{cases} h_2(X_0, \mu_2) := \mu_2 + X_0 + O(X_0^2) = 0, \\ Y_0 = -(\mu_1 + aX_0^2). \end{cases}$$

L'unicité de la « petite » solution de $h_2(X, \mu_2) = 0$ suit du théorème des fonctions implicites.

Les matrices jacobienues de (1.1) et (1.2) en $(\mp\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}, 0)$ et (X_0, Y_0) sont données respectivement par

$$(3.3) \quad \text{Jac} \left(\mp\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}, 0 \right) = \begin{pmatrix} \mp 2a\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} & 1 \\ 0 & \mu_2 \mp \sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} + O\left(-\frac{\mu_1}{a}\right) \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Jac}(X_0, Y_0) = \begin{pmatrix} 2aX_0 & 1 \\ Y_0(1 + O(|X_0|)) & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$(3.4) \quad X_1 := -\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} \quad \text{et} \quad X_2 := \sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}.$$

On a la proposition suivante (voir [7]).

Proposition 3.1. X_0, Y_0, X_1, X_2 et P_0, P_1, P_2 étant définis plus haut (voir aussi la figure 2.1), nous avons les propriétés suivantes :

- (1) si $X_0 \in]-\infty, X_1[\cup]X_2, +\infty[$, alors P_0 est un point de selle hyperbolique ;
- (2) si $X_0 \in]X_1, X_2[$, alors P_0 est un anti-selle (c'est-à-dire un point dont le déterminant du jacobien est positif) ;
- (3) si $X_0 = X_1$ ou $X_0 = X_2$, alors P_0 est un col-nœud ;
- (4) si $\mu_2 > \sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} + O\left(-\frac{\mu_1}{a}\right)$ (resp. $\mu_2 < -\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} + O\left(-\frac{\mu_1}{a}\right)$), alors P_1 (resp. P_2) est un nœud répulsif (resp. attractif) ;
- (5) si $\mu_2 < \sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} + O\left(-\frac{\mu_1}{a}\right)$ (resp. $\mu_2 > -\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} + O\left(-\frac{\mu_1}{a}\right)$), alors P_1 (resp. P_2) est un point de selle hyperbolique ;
- (6) si $\mu_2 = \sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} + O\left(-\frac{\mu_1}{a}\right)$ (resp. $\mu_2 = -\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} + O\left(-\frac{\mu_1}{a}\right)$), alors P_1 (resp. P_2) est un col-nœud.

Comme

$$\text{Trace}(\text{Jac}(X_0, Y_0)) = 2aX_0,$$

nous savons que celle-ci est nulle si, et seulement si, $X_0 = 0$; d'où, par (3.2), $Y_0 = -\mu_1$, $\mu_2 = 0$ et, ainsi, $\text{Det}(\text{Jac}(X_0, Y_0)) = \mu_1$.

Dans la suite, nous montrerons que si $\mu_1 > 0$, alors, pour la famille (1.1) (resp. (1.2)), nous aurons une bifurcation de Hopf d'ordre 1 (resp. 2) au voisinage du point singulier $(0, -\mu_1)$ sur la demi-droite d'équation $\mu_2 = 0$.

3.2. Bifurcations de col-nœud

Proposition 3.2. Il y a trois bifurcations de cols-nœuds (voir la figure 2.1) : la première a pour équation

$$(Cn_e) : \mu_1 = 0,$$

la deuxième et la troisième sont des courbes de la forme

$$(Cn_{a_i}) : \mu_1 = -a\mu_2^2 + o(\mu_2^2) \quad \text{avec} \quad \mu_2 < 0,$$

$$(Cn_{r_i}) : \mu_1 = -a\mu_2^2 + o(\mu_2^2) \quad \text{avec} \quad \mu_2 > 0.$$

La première se produit lorsque $P_1 := \left(-\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}, 0\right)$ se confond à $P_2 := \left(\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}, 0\right)$: ce col-nœud est attractif si $\mu_2 < 0$ et répulsif si $\mu_2 > 0$. La deuxième se produit lorsque $P_0 := (X_0, Y_0)$ se confond à $P_1 := \left(-\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}, 0\right)$: ce col-nœud est attractif. La troisième se produit lorsque $P_0 := (X_0, Y_0)$ se confond à $P_2 := \left(\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}, 0\right)$: ce col-nœud est répulsif.

Démonstration. En effet, il y a trois cas.

(1) La première se produit lorsque $P_1 := \left(-\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}, 0\right)$ et $P_2 := \left(\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}, 0\right)$ se confondent : elle a donc pour équation $\mu_1 = 0$.

Comme la deuxième valeur propre est μ_2 , ce col-nœud est attractif si $\mu_2 < 0$ et répulsif si $\mu_2 > 0$.

(2) La deuxième se produit lorsque $P_0 := (X_0, Y_0)$ se confond à

$$P_1 := \left(-\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}, 0\right).$$

(3) La troisième se produit lorsque $P_0 := (X_0, Y_0)$ se confond à

$$P_2 := \left(\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}, 0\right).$$

Pour ces deux derniers cas on a que :

$$\begin{cases} F(X_0) := \mu_2 + X_0 + O(X_0^2) = 0, \\ G(X_0) := \mu_1 + aX_0^2 = 0. \end{cases}$$

Or, $F(X_0) = 0$ donne $X_0 = -\mu_2 + O(\mu_2^2)$; en remplaçant ce dernier dans $G(X_0) = 0$, on obtient $\mu_1 + a\mu_2^2 + o(\mu_2^2) = 0$. On voit bien que X_0 est négatif (resp. positif) si $\mu_2 > 0$ (resp. $\mu_2 < 0$), et donc P_0 se confond avec P_1 (resp. P_2).

Dans (3.3), on obtient une valeur propre nulle et une valeur propre non nulle $\mp 2a\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}$. Donc, le col-nœud sur (Cn_{a_i}) est attractif alors que le col-nœud sur (Cn_{r_i}) est répulsif. $\square$

3.3. Bifurcation de Hopf

Proposition 3.3. Supposons $\mu_1 > 0$.

(1) Pour le système (1.1), nous avons une bifurcation de Hopf d'ordre 1 au voisinage du point singulier $(0, -\mu_1)$ sur la demi-droite d'équation $(H_r) : \mu_2 = 0$, et le coefficient de Lyapunov correspondant, L_1 , est strictement positif (resp. négatif) si $\epsilon = +1$ (resp. $\epsilon = -1$).

(2) Pour le système (1.2), nous avons une bifurcation de Hopf d'ordre 2 au voisinage du point singulier $(0, -\mu_1)$ sur la demi-droite d'équation $(H_2) : \mu_2 = \mu_3 = 0$, et le coefficient de Lyapunov correspondant, L_2 , est strictement positif (resp. négatif) si $\epsilon = +1$ (resp. $\epsilon = -1$).

Démonstration. En effet, comme il a été vu lors de l'analyse du type de chaque point singulier, la bifurcation de Hopf se produit au voisinage du point singulier de coordonnées $(0, -\mu_1)$ sur la demi-droite $\mu_2 = 0$ telle que $\mu_1 > 0$. On étudie le cas $\epsilon = +1$. Alors, en utilisant successivement les trois transformations suivantes :

$$\begin{aligned} (H_1) : Y_1 &= Y + \mu_1, & X_1 &= X, \\ (H_2) : Y_2 &= Y_1 + aX_1^2, & X_2 &= X_1 \quad \text{et} \\ (H_3) : Y_2 &= \omega Y, & X &= -X_2 \quad \text{où } \omega^2 = \mu_1, \end{aligned}$$

le système (1.2) devient, après avoir divisé le système obtenu par $\omega > 0$, le système de Liénard suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X - \mu_3 X^2 + \left(\frac{a}{\mu_1} + \tilde{\alpha}_3\right) X^3 - \left(1 + \frac{a\mu_3}{\mu_1}\right) X^4 + \frac{a\tilde{\alpha}_3}{\mu_1} X^5 - \frac{a}{\mu_1} X^6 \\ \quad + Y \left(-\frac{1+2a}{\sqrt{\mu_1}} X + \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_1}} X^2 - \frac{\tilde{\alpha}_3}{\sqrt{\mu_1}} X^3 + \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} X^4\right), \end{cases}$$

dont les deux premiers coefficients de Lyapunov sont, par la sous-section 6.1 de [7], déterminés par :

$$\begin{aligned} L_1 &= -\frac{2a\mu_3}{\sqrt{\mu_1}}, \\ L_2 &= \frac{a(\mu_3 + 2a\mu_3 + 5\tilde{\alpha}_3\mu_1\mu_3 - 3\mu_1)}{24\mu_1^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Le résultat de (1.1) suit en posant $\mu_3 = \epsilon : L_1$ ne s'annule pas et a le signe de ϵ .

Pour (1.2), on a

$$L_1 = 0 \iff \mu_3 = 0.$$

Donc, pour $L_1 = 0$, on a que $L_2 = -\frac{a}{8\sqrt{\mu_1}} > 0$. □

3.4. Positions des séparatrices des points singuliers de l'axe des X pour les systèmes (1.1) et (1.2)

Théorème 3.4. *Lorsque P_1 ou P_2 est un point de selle, sa séparatrice a une position comme sur la figure 3.1 : elle vient de la droite pour P_1 et de la gauche pour P_2 . En particulier, lorsque P_1 et P_2 sont des points de selle, les 3 positions possibles de leurs séparatrices sont présentées à la figure 3.3.*

Démonstration. Rappelons que P_1 et P_2 sont donnés en (3.1). On a que :

(1) *Les séparatrices de P_1 et P_2 ne peuvent pas aller à l'infini dans la bande « $X \in [X_1, X_2]$ ».*

Pour cela, il suffit de montrer qu'entre les droites d'équation $X = X_1$ et $X = X_2$, la pente du champ de vecteurs, $\frac{dY}{dX}$, est bornée. En effet, les familles (1.1) et (1.2) étant locales, celles-ci sont définies pour $|X| < K$, $|Y| < K$. Pour que les séparatrices (initialement entre les deux précédentes droites) puissent sortir du voisinage, il faut que, pour μ_1 assez petit, la pente du champ de vecteurs dans la bande « $X \in [X_1, X_2]$ » soit forte. Soit Y tel que $|Y| = \frac{K}{2}$. Pour que la trajectoire d'un point (X, Y) avec $|Y| = \frac{K}{2}$ et $X \in [X_1, X_2]$ puisse sortir de la bande par le haut, il faut une pente

moyenne strictement supérieure à $\frac{K}{4X_2}$ dans la région « $X \in [X_1, X_2], |Y| > \frac{K}{2}$ ». Nous allons montrer que, pour μ_1 assez petit, la valeur absolue de la pente du champ de vecteurs est strictement inférieure à $\frac{K}{8X_2}$ dans cette région.

En effet, soit μ_1 assez petit pour que nous ayons $\forall X \in [X_1, X_2], |f(X)| < K$ (où $\dot{Y} := Yf(X)$) et aussi

$$|\dot{X}| = |Y + aX^2 + \mu_1| > \frac{K}{3}, \quad \text{pour} \quad \frac{K}{2} < Y < K.$$

On a

$$\left| \frac{dY}{dX} \right| < \frac{|\dot{Y}|}{\frac{K}{3}} \leq \frac{3|Y||f(X)|}{K} < 3K.$$

Alors, $\left| \frac{dY}{dX} \right| < \frac{K}{8X_2}$ si μ_1 est assez petit, et les séparatrices des points singuliers P_1 et P_2 ne sortent pas de la région $|Y| < K$ entre les droites d'équation $X = X_1$ et $X = X_2$.

Il y a donc, lorsque $Y < 0$ ou $Y > 0$, deux possibilités pour la demi-séparatrice de gauche et deux possibilités pour la demi-séparatrice de droite (voir la figure 3.1).

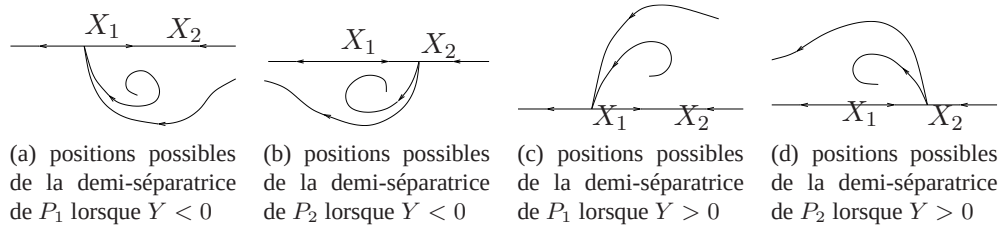


FIGURE 3.1. Positions possibles des demi-séparatrices des points singuliers de l'axe des X pour les systèmes (1.1) et (1.2).

(2) Si P_1 et P_2 sont des points de selle, alors les coordonnées du troisième point singulier $P_0 := (X_0, Y_0)$ vérifient

$$\begin{cases} X_1 < X_0 < X_2, \\ Y_0 = -(aX_0^2 + \mu_1), \\ \mu_2 + X_0 + X_0^2 = 0. \end{cases}$$

Il vient que $Y_0 < 0$ car $aX^2 + \mu_1 > 0$ pour tout $X \in]X_1, X_2[$: on s'intéresse donc, dans ce cas, aux positions des séparatrices de P_1 et P_2 dans la demi-bande « $X \in [X_1, X_2], Y < 0$ » : sur les droites d'équation $X = X_1$ et $X = X_2$, on a, par le système (1.1), que $\dot{X} = Y < 0$. Alors, puisque $P_1 := (X_1, 0)$ et $P_2 := (X_2, 0)$ sont des points de selle, on a nécessairement le comportement des trajectoires aux voisinages de P_1 et P_2 (voir la figure 3.2).

Or, par ce qui précède, les séparatrices de P_1 et P_2 ne peuvent pas sortir de la bande $|Y| < K$ entre les droites d'équations $X = X_1$ et $X = X_2$. Par conséquent, lorsque P_1 et P_2 sont des points de selle, les 3 positions possibles de leurs séparatrices sont présentées à la figure 3.3. $\square$

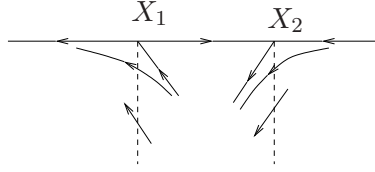


FIGURE 3.2. Comportement des trajectoires aux voisinages de P_1 et P_2 lorsque ceux-ci sont des points de selle

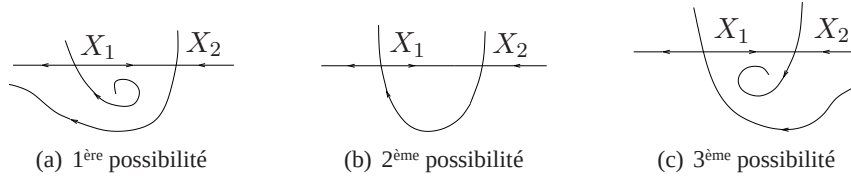


FIGURE 3.3. Positions possibles des séparatrices de P_1 et P_2 lorsque ceux-ci sont des points de selle.

4. Bifurcation de boucle hétéroclinique du système (1.1)

Il nous suffit de présenter le cas où $\epsilon_2 = 1$ qui, par la transformation

$$(X, Y, \mu_1, \mu_2, t) \mapsto (-X, Y, \mu_1, -\mu_2, -t),$$

nous permettra d'obtenir les résultats de celui où $\epsilon_2 = -1$.

4.1. Existence

La seule manière dont le cycle répulsif précédent peut disparaître avant le col-nœud (Cn_{a_i}) (voir la figure 2.1) est, par la théorie et la position des séparatrices des points de selle (voir le théorème 3.4), dans une boucle hétéroclinique. Nous allons montrer qu'elle est répulsive.

Puisque les points singuliers $(X_1, 0)$ et $(X_2, 0)$ doivent être des points de selle et que $-2aX_2 > 0$ et $2aX_1 > 0$, il faut que :

$$(4.1) \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 + X_2 + X_2^2 > 0 \quad \text{et} \quad -(\mu_2 + X_1 + X_1^2) > 0.$$

Aussi, en prenant $\epsilon_2 = 1$ et pour μ_1 fixé, le système est rotationnel en μ_2 . Ainsi, sur chaque droite $\mu_1 = \text{constante}$, il existe au plus un point de boucle hétéroclinique, car les séparatrices varient de manière monotone quand μ_2 croît. Or, par les positions de (H_r) et (Cn_{a_i}) sur la figure 2.1, il faut une telle bifurcation pour $\mu_2 < 0$. Il existe donc une boucle hétéroclinique dans la région de l'espace des paramètres définie par (voir la figure 2.1)

$$\mu_1 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mu_1}{a} - \sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} < \mu_2 < 0.$$

La méthode de Melnikov (rappelée en annexe A) nous permettra d'approximer le lieu de cette boucle hétéroclinique.

4.2. Approximation de la surface de boucle hétéroclinique, (BH_+) , par la méthode de Melnikov

Cette méthode nous permet d'être plus précis dans la détermination de la position de la surface de boucle hétéroclinique. On ramène notre système à un système proche d'un système intégrable par l'éclatement avec poids

$$(T_1) : X = \epsilon \bar{X}, \quad Y = \epsilon^2 \bar{Y}, \quad \mu_1 = \epsilon^2 \bar{\mu}_1, \quad \mu_2 = \epsilon^2 \bar{\mu}_2.$$

Après division par ϵ , le système devient :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \dot{\bar{X}} = \bar{Y} + a\bar{X}^2 + \bar{\mu}_1, \\ \dot{\bar{Y}} = \epsilon \bar{\mu}_2 \bar{Y} + \bar{X} \bar{Y} + \epsilon \bar{X}^2 \bar{Y}. \end{cases}$$

Le système $(4.2)|_{\epsilon=0}$ est intégrable, d'intégrale première

$$(4.3) \quad H = (-\bar{Y})^{-2a} \left(\bar{Y} + \frac{2a-1}{2} \bar{X}^2 + \frac{2a-1}{2a} \bar{\mu}_1 \right)$$

et de facteur intégrant

$$K = (2a-1)(-\bar{Y})^{-(2a+1)}.$$

D'où, en multipliant le système (4.2) par K , on obtient :

$$\begin{cases} \bar{X}' = \frac{\partial H}{\partial \bar{Y}}, \\ \bar{Y}' = -\frac{\partial H}{\partial \bar{X}} - \epsilon(-\bar{Y})^{-2a} (\mu_2 + \bar{X}^2) (2a-1). \end{cases}$$

Le lieu des paramètres où on a la boucle hétéroclinique est approximé par (méthode de Melnikov donnée à l'annexe A) :

$$I(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2) = \int_{\Gamma} -(\bar{\mu}_2 + \bar{X}^2) (2a-1)(-\bar{Y})^{-2a} d\bar{X} = 0,$$

où Γ désigne la boucle non perturbée qui est située sur $H = 0$. Cette courbe est l'union de $\bar{Y} = 0$ et de la parabole $\bar{Y} = -\frac{2a-1}{2}(\bar{X})^2 - \frac{2a-1}{2a}\bar{\mu}_1$. Posons

$$I_k = \int_{-\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}}^{\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}} \bar{X}^k \left(\frac{2a-1}{2} \bar{X}^2 + \frac{2a-1}{2a} \bar{\mu}_1 \right)^{-2a} d\bar{X},$$

où $k \in \mathbb{N}$. Un calcul rapide donne que $I(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2) = 0$ si, et seulement si,

$$(BH_+) : \bar{\mu}_2 I_0 + I_2 = 0.$$

(i) Calcul des I_k

Proposition 4.1. Pour k pair, on a que

$$I_k = f_a(\bar{\mu}_1) \left(-\frac{\bar{\mu}_1}{a} \right)^{\frac{k+1}{2}} B\left(\frac{k+1}{2}, 1-2a \right),$$

où

$$f_a(\bar{\mu}_1) = \left[\left(\frac{2a-1}{2a} \right) \bar{\mu}_1 \right]^{-2a} > 0$$

et

$$B\left(\frac{k+1}{2}, 1-2a\right) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(1-2a)}{\Gamma(\frac{k+1}{2} + 1 - 2a)} = \frac{\frac{k-1}{2}\Gamma(\frac{k-1}{2})\Gamma(1-2a)}{(\frac{k+1}{2} - 2a)\Gamma(\frac{k+1}{2} - 2a)}.$$

Démonstration. Le calcul se fait aisément en remarquant que la fonction intégrante est paire dans $\left[-\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}, \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}\right]$, en posant $Z = -\frac{a}{\bar{\mu}_1}\bar{X}^2$ et en utilisant le fait que

$$\int_0^1 Z^{p-1}(1-Z)^{q-1}dZ := B(p, q)$$

pour tous $p, q \in \mathbb{R}_+^*$, avec

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \text{où} \quad \Gamma(p) := \int_0^\infty e^{-X} X^{p-1} dX$$

sur un ensemble contenant $\mathbb{R}_+^*$. □

(ii) Écriture simplifiée de (BH_+)

Théorème 4.2. *La surface de bifurcation de boucle hétéroclinique du système (1.1) est, pour $\epsilon = +1$, approximée par*

$$(4.4) \quad (BH_+) : a(3-4a)\mu_2 - \mu_1 = 0.$$

Démonstration. En effet, on a que

$$\bar{\mu}_2 I_0 + I_2 = f_a(\bar{\mu}_1) \left(-\frac{\bar{\mu}_1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1-2a)}{\Gamma(\frac{3}{2}-2a)} \left[\bar{\mu}_2 + \frac{-\frac{\bar{\mu}_1}{2a}}{(\frac{3}{2}-2a)}\right].$$

Étant donné que $a < 0$ et que $f_a(\bar{\mu}_1) > 0$, alors $I(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2) = 0$ si, et seulement si, $a(3-4a)\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1 = 0$. Le résultat suit puisque $\bar{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{\epsilon^2}$ et $\bar{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{\epsilon^2}$. □

4.3. Type de la boucle

Commençons par rappeler la notion ci-après.

Définition 4.3. Le rapport d'hyperbolicité d'un point de selle est le rapport $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, où $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ sont les deux valeurs propres.

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.4. *La boucle hétéroclinique du système (1.1) est répulsive pour $\epsilon = +1$ et attractive pour $\epsilon = -1$.*

Démonstration. Il suffit, bien sûr, d'étudier le cas $\epsilon = +1$. Pour le faire, on utilise le critère suivant (mais qui sera discuté en détails au théorème 5.11) : *la boucle est répulsive (resp. attractive) si le produit des rapports d'hyperbolicité des deux points de selle est plus petit (resp. grand) que un.* Par (3.3) et (3.4), les rapports d'hyperbolicité des points singuliers $(X_1, 0)$ et $(X_2, 0)$ sont respectivement

$$r_1 = -\frac{\mu_2 + X_1 + X_1^2}{2aX_1}, \quad r_2 = -\frac{2aX_2}{\mu_2 + X_2 + X_2^2}.$$

Alors

$$r_1 r_2 - 1 = \frac{(X_1 - X_2)(X_1 X_2 - \mu_2)}{X_1(\mu_2 + X_2 + X_2^2)} = \frac{(X_1 - X_2)}{X_1(\mu_2 + X_2 + X_2^2)} \left(\frac{\mu_1}{a} - \mu_2 \right).$$

Or, $\frac{X_1 - X_2}{X_1} > 0$ et, par (4.1), on a $\mu_2 + X_2 + X_2^2 > 0$. Donc $r_1 r_2 - 1$ a le signe de $\left(\frac{\mu_1}{a} - \mu_2\right)$. En particulier $r_1 r_2 - 1 < 0$ dans la région $\mu_2 < 0$ où la boucle hétéroclinique se produit. En effet, en évaluant $\left(\frac{\mu_1}{a} - \mu_2\right)$ pour $\mu_1 = a(3 - 4a)\mu_2$ (obtenu au (4.4)), on obtient que $r_1 r_2 - 1$ a le signe de $(2 - 4a)\mu_2 < 0$ (où $\mu_2 < 0$ par (4.4) et du fait que $a < 0, \mu_1 > 0$). D'où le résultat. $\square$

Ceci nous donne les positions des courbes de bifurcation comme sur la figure 2.1 où (Cn_e) sera noté par (Cn_{ae}) lorsque $\mu_2 < 0$ (resp. (Cn_{re}) lorsque $\mu_2 > 0$).

4.4. Diagramme de bifurcations de (1.1)

Comme on l'a dit au début de cette section, il suffit de présenter celui où $\epsilon = +1$ car celui où $\epsilon = -1$ est obtenu par la transformation

$$(X, Y, \mu_1, \mu_2, t) \mapsto (-X, Y, \mu_1, -\mu_2, -t).$$

Ainsi, par les propositions 3.1, 3.2 et 3.3, les théorèmes 4.2 et 4.4, nous avons montré le théorème A.

5. Bifurcation de boucle hétéroclinique du système (1.2)

5.1. Existence et lieu de la bifurcation de boucle hétéroclinique de codimension supérieure ou égale à 2

Existence

La seule manière dont les cycles précédents peuvent disparaître avant les cols-nœuds (Cn_i) est dans une boucle hétéroclinique. Or, nous sommes dans la région où les deux points singuliers sont des points de selle, alors, puisque $-2aX_2 > 0$ et $2aX_1 > 0$, il faut que

$$\mu_2 + X_1 + \mu_3 X_1^2 + \tilde{\alpha}_3 X_1^3 + X_1^4 < 0 \quad \text{et} \quad \mu_2 + X_2 + \mu_3 X_2^2 + \tilde{\alpha}_3 X_2^3 + X_2^4 > 0.$$

Donc, la boucle existe dans la région définie (dans l'espace des paramètres) par

$$(5.1) \quad -\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} + \mu_3 \frac{\mu_1}{a} - \tilde{\alpha}_3 \left(-\frac{\mu_1}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\mu_1}{a}\right)^2 < \mu_2 < \sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} + \mu_3 \frac{\mu_1}{a} + \tilde{\alpha}_3 \left(-\frac{\mu_1}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\mu_1}{a}\right)^2$$

qui est la région où le point (X_0, Y_0) est de type anti-selle.

Proposition 5.1. *La boucle est, sous les conditions (5.1), de codimension supérieure ou égale à 2 c'est-à-dire $r_1 r_2 - 1 = 0$, lorsque*

$$(5.2) \quad (R) : a^2 \mu_2 - a \mu_1 \mu_3 + \mu_1^2 = 0.$$

Démonstration. Par (3.3) et (3.4), les rapports d'hyperbolicité des points singuliers $P_1 := (X_1, 0)$ et $P_2 := (X_2, 0)$ (où X_1 et X_2 sont définis au (3.4)) sont respectivement

$$r_1 = -\frac{\mu_2 + X_1 + \mu_3 X_1^2 + \tilde{\alpha}_3 X_1^3 + X_1^4}{2aX_1}$$

et

$$r_2 = -\frac{2aX_2}{\mu_2 + X_2 + \mu_3 X_2^2 + \tilde{\alpha}_3 X_2^3 + X_2^4}.$$

Alors,

$$r_1 r_2 - 1 = \frac{-2[X_2^2(X_2^2 + \mu_3) + \mu_2]}{\mu_2 + X_2 + \mu_3 X_2^2 + X_2^4}. \quad \square$$

Remarque 5.2. Dans tous les calculs précédents, on voit que $\tilde{\alpha}_3$ ne joue aucun rôle dans le type des bifurcations. Ainsi avons-nous la conjecture suivante.

Conjecture 5.3. *La topologie du diagramme de bifurcations de (1.2) sera la même que celle du diagramme de bifurcations d'un système de la forme*

$$(5.3) \quad \begin{cases} \dot{X} = Y + a(\nu)X^2 + \mu_1, \\ \dot{Y} = Y[\mu_2 + X + \mu_3 X^2 + X^4], \end{cases} \quad \text{où } a(\nu) < 0.$$

Nous n'avons pas exploré à fond cette conjecture qui demande des outils plus sophistiqués que ceux dont nous disposons, mais nous nous proposons d'y revenir plus tard.

Dans cet article, nous nous limiterons à étudier la codimension et le type de la boucle hétéroclinique du système (5.3). Ici encore, pour (μ_1, μ_3) fixé, le système est rotationnel en μ_2 . Il est aussi rotationnel en μ_3 pour (μ_1, μ_2) fixé. Donc sur chaque ligne $(\mu_1, \mu_3) = \text{constante}$, on a au plus un point de boucle hétéroclinique et de même sur chaque ligne $(\mu_1, \mu_2) = \text{constante}$. Nous allons trouver ces lignes par la méthode de Melnikov (voir l'annexe A). Nous savons que la méthode de Melnikov ne nous permet de couvrir qu'un cône dans l'espace des paramètres. Mais comme les lignes ci-dessus sont dans ce cône, cela nous garantit qu'il n'y a pas d'autre bifurcation de (BH) , à l'extérieur de ce cône.

5.2. Approximation de la surface de boucle hétéroclinique, (BH) , du système (5.3)

Le résultat que nous obtenons est le théorème suivant.

Théorème 5.4. *La surface de bifurcation de boucle hétéroclinique du système (5.3) est approximée par $(BH) : a^2(5 - 4a)(3 - 4a)\mu_2 - a(5 - 4a)\mu_1\mu_3 + 3\mu_1^2 = 0$.*

Démonstration. On ramène notre système à un système proche d'un système intégrable par l'éclatement avec poids

$$(5.4) \quad (T_2) : X = \epsilon \bar{X}, \quad Y = \epsilon^2 \bar{Y}, \quad \mu_1 = \epsilon^2 \bar{\mu}_1, \quad \mu_2 = \epsilon^4 \bar{\mu}_2, \quad \mu_3 = \epsilon^2 \bar{\mu}_4.$$

Après division par ϵ , on obtient :

$$(5.5) \quad \begin{cases} \dot{\bar{X}} = \bar{Y} + a\bar{X}^2 + \bar{\mu}_1, \\ \dot{\bar{Y}} = \bar{X}\bar{Y} + \epsilon^3 \bar{Y}(\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_4 \bar{X}^2 + \bar{X}^4). \end{cases}$$

En procédant comme au (4.2), on a :

(1) pour $\epsilon = 0$, le système (5.5) est intégrable d'intégrale première (4.3) et de même facteur intégrant K ;

(2) en multipliant le système (5.5) par K , on obtient, sans changer de notation,

$$\begin{cases} \overline{X}' = -\frac{\partial H}{\partial \overline{Y}}, \\ \overline{Y}' = \frac{\partial H}{\partial \overline{X}} + \epsilon^3 (-\overline{Y})^{-2a} \left(\overline{\mu}_2 + \overline{\mu}_4 \overline{X}^2 + \overline{X}^4 \right) (2a - 1). \end{cases}$$

Le lieu des paramètres où on a la boucle hétéroclinique est approximé par (méthode de Melnikov donnée à l'annexe A)

$$I(\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2, \overline{\mu}_4) := \int_{\Gamma} \left(\overline{\mu}_2 + \overline{\mu}_4 \overline{X}^2 + \overline{X}^4 \right) (2a - 1) (-\overline{Y})^{-2a} d\overline{X} = 0,$$

où Γ désigne la boucle non perturbée, c'est-à-dire

$$(BH) : \overline{\mu}_2 I_0 + \overline{\mu}_4 I_2 + I_4 = 0,$$

où I_k est déterminé à la proposition 4.1. Un calcul donne

$$\overline{\mu}_2 I_0 + \overline{\mu}_4 I_2 + I_4 = 0 \iff \overline{\mu}_2 + \overline{\mu}_4 \left(-\frac{\overline{\mu}_1}{a} \right) \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{3}{2} - 2a)} + \frac{\frac{3}{4}(-\frac{\overline{\mu}_1}{a})^2}{(\frac{3}{2} - 2a)(\frac{5}{2} - 2a)} = 0.$$

Donc la surface de bifurcation de boucle hétéroclinique du système (5.3) est approximée par

$$(BH) : a^2(5 - 4a)(3 - 4a)\mu_2 - a(5 - 4a)\mu_1\mu_3 + 3\mu_1^2 = 0.$$

C'est un paraboloïde hyperbolique dans l'espace (μ_1, μ_2, μ_3) . □

5.3. Détermination des bifurcations de codimension 2 sur (BH)

(i) $C := (H) \cap (BH)$

Pour le système (5.3), C est inclus dans l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \mu_2 = 0, \\ a^2(5 - 4a)(3 - 4a)\mu_2 - a(5 - 4a)\mu_1\mu_3 + 3\mu_1^2 = 0. \end{cases}$$

Or, l'ensemble des solutions de ce dernier est

$$\{(\mu_2 = 0, \mu_1 = 0)\} \cup \left\{ \left(\mu_2 = 0, \mu_3 = -\frac{3\mu_1}{a(4a - 5)} \right) \right\},$$

soit la réunion de deux droites passant par l'origine. On doit exclure $\mu_1 = \mu_2 = 0$ qui correspond à un point triple nilpotent. Donc $C := (H) \cap (BH)$ se produit sur la droite approximée par

$$\mu_2 = 0, \quad \mu_3 = -\frac{3\mu_1}{a(4a - 5)}.$$

(ii) $BH_2 := (BH) \cap (R)$ où (R) est donné en (5.2)

Pour le système (5.3), BH_2 est approximé par la solution du système

$$(5.6) \quad \begin{cases} a^2(5-4a)(3-4a)\mu_2 - a(5-4a)\mu_1\mu_3 + 3\mu_1^2 = 0, \\ a^2\mu_2 - a\mu_1\mu_3 + \mu_1^2 = 0, \end{cases}$$

qui, résolu suivant (μ_2, μ_3) , donne que BH_2 se produit sur le lieu approximé par

$$\left(\mu_2 = \frac{\mu_1^2}{a^2(-4a+5)}, \mu_3 = \frac{2\mu_1(2a-3)}{a(4a-5)} \right).$$

5.4. Type et cyclicité de la boucle hétéroclinique

L'étude qui suit est relativement standard, alors nous serons brefs sur les détails. Dans cette sous-section on étudie le type de la boucle hétéroclinique, à savoir si elle est attractive ou répulsive. On étudie aussi sa cyclicité, c'est-à-dire le nombre maximum de ses *cycles limites* (orbites périodiques isolées).

Avant d'énoncer des résultats précis, rappelons tout d'abord des théorèmes généraux sur la cyclicité d'un *graphique hyperbolique* (graphique contenant seulement des points singuliers hyperboliques) avec une connexion fixée dans une famille C^∞ de champs de vecteurs sur le plan.

5.4.1. Théorèmes généraux sur la cyclicité d'un graphique hyperbolique avec une connexion fixée

Le premier théorème est en [3, 5] et le second, en [9].

Théorème 5.5. *Dans une famille C^∞ de champs de vecteurs sur le plan, un graphique hyperbolique avec une connexion fixée entre deux points de selle dont le produit des rapports d'hyperbolicité est différent de 1 est de cyclicité au plus égale à 1.*

Théorème 5.6. *Dans une famille C^∞ de champs de vecteurs sur le plan, un graphique hyperbolique avec une connexion fixée entre deux points de selle dont le produit des rapports d'hyperbolicité est égal à 1 est de cyclicité finie.*

5.4.2. Application de 5.4.1 au graphique de (5.5) et type de la boucle

La stratégie est la suivante. Les cycles limites étant les points fixes de l'application de premier retour de Poincaré, on considère des sections au voisinage des points singuliers ; ce qui permet de décomposer l'application de premier retour de Poincaré comme composition de quatre transitions (voir la figure 5.2) :

(1) deux transitions régulières le long des connexions de selle ;

(2) deux applications de Dulac au voisinage des points de selle [10] (l'application de Dulac relative à un point de selle est l'application de passage de coin d'une demi-section positive transverse à la variété stable à une demi-section positive transverse à la variété instable). Celles-ci se calculent mieux si on se met dans des coordonnées dans lesquelles le système est sous forme normale.

En pratique les calculs seront plus simples si, au lieu de l'application de premier retour de Poincaré, on regarde une application déplacement (voir les formules (5.13),

(5.12) et la figure 5.2). Pour simplifier, posons

$$\gamma := \left(\mu_2 - \frac{\mu_1^2}{a^2(-4a+5)}, \mu_3 - \frac{2\mu_1(2a-3)}{a(4a-5)} \right)$$

(voir (5.6)), $\bar{X} := \bar{x}$, $\bar{Y} := \bar{y}$ et notons le système (5.5) par $(S_{\epsilon,\gamma})$:

$$(S_{\epsilon,\gamma}) \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{y} + a\bar{x}^2 + \bar{\mu}_1, \\ \dot{\bar{y}} = \bar{x}\bar{y} + \epsilon^3 \bar{y} (\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_4 \bar{x}^2 + \bar{x}^4). \end{cases}$$

Par la sous-section 5.2, $(S_{\epsilon,\gamma})$ est proche d'un système intégrable $(S_{0,\gamma})$ dont la droite d'équation $\bar{y} = 0$ et la parabole d'équation $\bar{y} = (\frac{1-2a}{2})(\bar{x}^2 + \frac{\bar{\mu}_1}{a})$ sont invariantes. Illustrons ce qui précède par les figures suivantes (5.1 et 5.2) où :

- (1) la connexion $\overline{P_1 P_2}$ est fixée ;

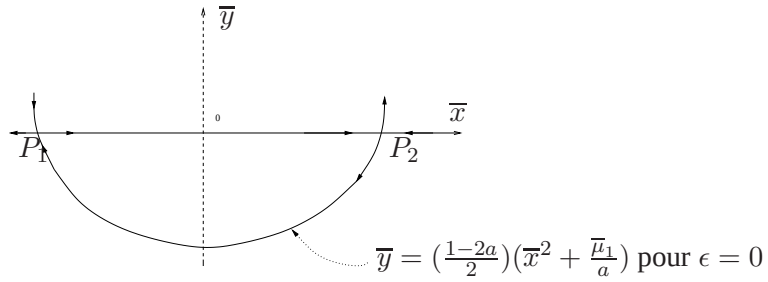


FIGURE 5.1. Boucle hétéroclinique dans le système $(S_{0,\gamma})$.

- (2) pour $k = 1, 2$, $P_k = (x_k, 0)$ est un point de selle hyperbolique de rapport d'hyperbolicité $r_k(\gamma) \in \mathbb{R}_+^*$ où $x_1 = -\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}$ et $x_2 = \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}$.

Supposons $(S_{\epsilon,\gamma})$, défini au voisinage de P_k , localisé à l'origine. Alors, par la théorie des formes normales et pour $l = 1, 3$ (voir la figure 5.2).

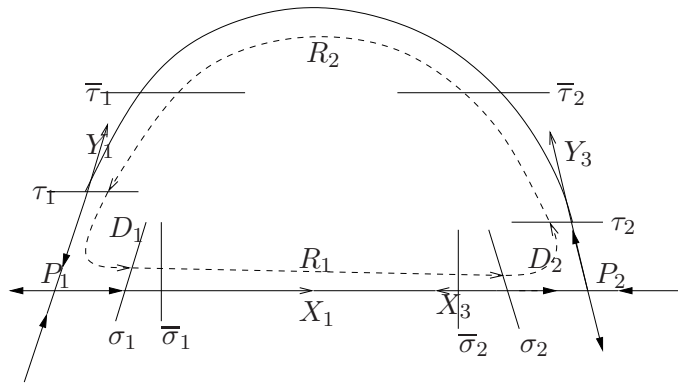


FIGURE 5.2. Boucle hétéroclinique lors de BH_2 en coordonnées normalisantes.

$\forall s \in \mathbb{N}$, il existe un changement de coordonnées (X_l, Y_l) de classe C^s sur un voisinage de l'origine dépendant de s et un changement d'échelles sur le temps ramenant le système à une forme dans laquelle on peut calculer explicitement l'application de Dulac. En pratique :

(1) si $r_k(0)$ est irrationnel, alors

$$(5.7) \quad (S_{\epsilon, \gamma}) \sim X_l \frac{\partial}{\partial X_l} - r_k(\gamma) Y_l \frac{\partial}{\partial Y_l} ;$$

(2) si $r_k(0) := \frac{p}{q}$ est rationnel, alors $\exists N(s) \in \mathbb{N}$ tel que

$$(5.8) \quad (S_{\epsilon, \gamma}) \sim X_l \frac{\partial}{\partial X_l} + Y_l \left[-r_k(0) + \sum_{i=0}^{N(s)} \alpha_{i+1}(\gamma) (X_l^p Y_l^q)^i \right] \frac{\partial}{\partial Y_l},$$

où $\alpha_1(\gamma) = r_k(0) - r_k(\gamma)$ et $\sim$ désigne l'équivalence en classe C^s suivie d'un changement d'échelles sur le temps de classe C^s , pour γ appartenant à un voisinage de 0 dans $W(s)$, l'espace des paramètres. Ici $(\bar{x}, \bar{y})$ et (X_l, Y_l) désigneront respectivement des coordonnées ordinaires et des coordonnées normalisantes.

On verra ci-dessous pourquoi on utilise l'indice 3 au voisinage de P_2 . Posons $\nu := (\epsilon, \gamma)$. Soient

$$\begin{cases} \sigma_1 := \{X_1 = X_0\}, \\ \sigma_2 := \{X_3 = X_0\}, \\ \tau_1 := \{Y_1 = Y_{01}\}, \\ \tau_2 := \{Y_3 = Y_{03}\}, \end{cases}$$

des sections transversales à $(S_{\epsilon, \gamma})$, parallèles aux axes de coordonnées (X_l, Y_l) où $X_0 > 0, Y_{0l} > 0$ sont constants et petits tels que

$$(5.9) \quad Y_{01} X_0^{-r_1(\nu)} = 1, \quad Y_{03} X_0^{-r_2(\nu)} = 1$$

(voir figure 5.2). L'orientation des axes de coordonnées a été choisie pour que tous les passages se produisent dans le premier quadrant. Près de P_k , localisé à l'origine, le flot de $(S_{\epsilon, \gamma})$ induit (voir la figure 5.2) :

(1) une application de transition $D_{k, \nu}$, encore appelée *application de Dulac*, telle que

$$(5.10) \quad D_{1, \nu} : \tau_1 \longrightarrow \sigma_1 \quad \text{et} \quad D_{2, \nu} : \sigma_2 \longrightarrow \tau_2 ;$$

(2) une application de transition régulière $R_{k, \nu}$, un difféomorphisme, telle que

$$(5.11) \quad R_{1, \nu} : \sigma_1 \longrightarrow \sigma_2 \quad \text{et} \quad R_{2, \nu} : \tau_2 \longrightarrow \tau_1.$$

Posons

$$(5.12) \quad \Delta_2 := D_{2, \nu} \circ R_{1, \nu} \quad \text{et} \quad \Delta_1 := [D_{1, \nu} \circ R_{2, \nu}]^{-1}.$$

Et l'application déplacement est

$$(5.13) \quad \Delta := \Delta_2 - \Delta_1.$$

Ses zéros correspondent aux cycles limites. Nous bornerons leur nombre à l'aide du théorème de Rolle et, plus généralement, d'un algorithme de dérivation-division. Pour étudier la forme de Δ , il nous faut introduire quelques notions techniques ; (voir [10]).

Définition 5.7. Soient $\nu := (\epsilon, \gamma)$ et $\psi(x, \nu) \in C^\infty$. On dit que ψ est du type (I) si

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n}(x, \nu) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

uniformément pour tout ν dans un voisinage de l'origine.

Or, par [10], au voisinage de $X = 0$, on a

$$D_{k,\nu}(X) = X^{r_k(\nu)}[c(\nu) + \psi_k(X, \nu)],$$

où

$$(5.14) \quad \begin{cases} c(\nu) = Y_{01}X_0^{-r_k(\nu)} > 0 & \text{si } k = 1, \\ c(\nu) = Y_{03}X_0^{-r_k(\nu)} > 0 & \text{si } k = 2, \end{cases}$$

$\psi_k(X, \nu) \in C^\infty$ pour $(X, \nu) \in (0, X_0] \times W$, où W est un voisinage de $\nu = 0$, ψ_k est une fonction du type (I) et

$$(5.15) \quad \psi_k \equiv 0 \quad \text{si } r_k(0) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Ici $c(\nu) \equiv 1$ par (5.14) et (5.9). Voir [10] pour la proposition suivante.

Proposition 5.8. Soit $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{D}$) l'ensemble des fonctions du type (I) (resp. l'ensemble des applications de Dulac $D_{k,\nu}$). Alors nous avons :

- (1) $\mathcal{I}$ est une algèbre ;
- (2) si $f \in \mathcal{I}$ et $g \in \mathcal{D}$, alors $f \circ g \in \mathcal{I}$;
- (3) $\mathcal{D} \subset \mathcal{I}$.

(1) Par les conditions (5.14) et (5.9), et les formes normales (5.7) et (5.8), on a que

$$(5.16) \quad D_{k,\nu}(X) = X^{r_k(\nu)}[1 + \psi_k(X, \nu)]$$

où $\psi_k \in \mathcal{I}$ et vérifie (5.15). Pour $k = 1, 2$, $D_{k,\nu}$, définie en (5.10), est de classe C^∞ dans un voisinage de 0.

(2) $R_{1,\nu}$, défini en (5.11), est un difféomorphisme de classe C^r dans un voisinage de 0 et est de la forme

$$(5.17) \quad \begin{aligned} R_{1,\nu} : \sigma_1 &\longrightarrow \sigma_2 \\ Y_1 &\longmapsto Y_3 := R_{1,\nu}(Y_1) = a_1 Y_1 + a_2 Y_1^2 + O(|Y_1|^3), \end{aligned}$$

où $a_1 := a_1(\nu)$ est une fonction C^∞ et le fait que $R_{1,\nu}(0) = 0$ est dû au fait que la connexion $\overline{P_1 P_2}$ est fixée.

(3) $R_{2,\nu}$, défini en (5.11), est un difféomorphisme de classe C^r dans un voisinage de 0 et est de la forme

$$(5.18) \quad \begin{aligned} R_{2,\nu}^{-1} : \tau_1 &\longrightarrow \tau_2 \\ X_1 &\longmapsto X_3 := R_{2,\nu}^{-1}(X_1) = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_1^2 + O(|X_1|^3), \end{aligned}$$

où $b_1 := b_1(\nu) > 0$ est une fonction C^∞ .

Pour alléger la notation dans la suite, nous poserons

$$(5.19) \quad Y_1 := x, \quad r_k(\nu) := r_k, \quad D_{k,\nu} := D_k \quad \text{et} \quad R_{k,\nu} := R_k.$$

On a, par (5.12), (5.17), (5.16) et (5.19), que

$$\Delta_2(x) = (a_1x + a_2x^2 + O(|x|^3))^{r_2} (1 + \psi_2 \circ R_1(x)) = a_1^{r_2} x^{r_2} (1 + \psi_4(x)),$$

où $\psi_4 \in \mathcal{I}$.

De même,

$$\Delta_1(x) = R_2^{-1} \circ D_1^{-1}(x),$$

où D_1^{-1} est l'application de Dulac du champ $-(S_{\epsilon,\gamma})$ avec, par [10],

$$D_1^{-1}(x) = x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \bar{\psi}_1(x)),$$

pour $\bar{\psi}_1 \in \mathcal{I}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta_1(x) &= b_0 + b_1 x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \bar{\psi}_1(x)) + b_2 x^{\frac{2}{r_1}} (1 + \bar{\psi}_1(x))^2 + \dots \\ &= b_0 + b_1 x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_5(x)), \end{aligned}$$

avec $\psi_5 \in \mathcal{I}$. Conséquemment, l'application déplacement Δ a la forme

$$\Delta(x) = a_1^{r_2} x^{r_2} (1 + \psi_4(x)) - b_0 - b_1 x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_5(x)),$$

avec $\psi_4, \psi_5 \in \mathcal{I}$. Or, on a la proposition suivante (voir [10]).

Proposition 5.9. Soit $f(x) := x^\beta (1 + \psi(x))$, avec $\beta \in \mathbb{R}^*$ et $\psi \in \mathcal{I}$. Alors $f'(x) = \beta x^{\beta-1} (1 + \bar{\psi}(x))$ avec $\bar{\psi} \in \mathcal{I}$.

On utilisera le critère suivant.

Proposition 5.10. Soit $\delta > 0$. Si $\Delta'(x) < 0$ sur $]0, \delta[$ (resp. $\Delta'(x) > 0$ sur $]0, \delta[$), alors la boucle hétéroclinique est attractive (resp. la boucle hétéroclinique est répulsive).

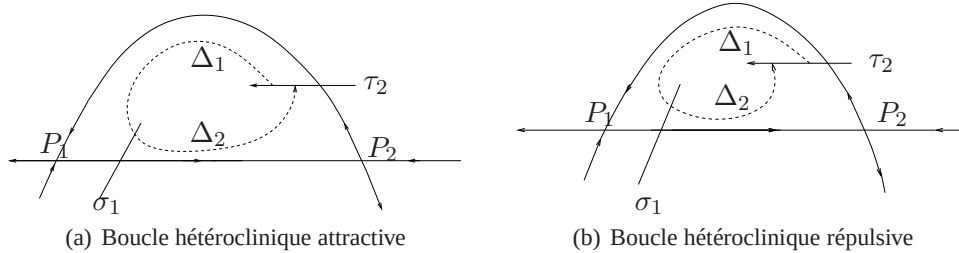


FIGURE 5.3.

Démonstration. La boucle se produit lorsque $\Delta(0) = 0$. Par le théorème des accroissements finis, si $\Delta'(x) < 0$ (resp. $\Delta'(x) > 0$) sur $]0, \delta[$, alors $\Delta(x) < 0$ (resp. $\Delta(x) > 0$) sur $]0, \delta[$; d'où le résultat. $\square$

Par la proposition 5.9, on a

$$\Delta'(x) = -\frac{b_1}{r_1} x^{\frac{1}{r_1}-1} [1 + \overline{\psi}_5(x)] + r_2 a_1^{r_2} x^{r_2-1} [1 + \overline{\psi}_4(x)],$$

avec $\overline{\psi}_4, \overline{\psi}_5 \in I$.

Cette dernière expression nous permet de prouver l'énoncé suivant (connu dans la littérature quoique l'énoncé ne soit pas sous cette forme) avec $r_k := r_k(\mu)$ où μ est un paramètre réel.

Théorème 5.11. *Soit $r_1 r_2 \neq 1$.*

- (1) *Alors la boucle hétéroclinique est répulsive si $r_1 r_2 < 1$, attractive si $r_1 r_2 > 1$.*
- (2) *De plus, la cyclicité du graphique précédent (avec une connexion fixée) est au plus égale à 1.*

Ce théorème est connu depuis Cherkas [3] ; voir aussi [5] et [2]. Nous rappelons sa preuve car elle est courte et illustre bien la méthode.

Démonstration.

- (1) Prenons le cas $r_1 r_2 < 1$. Pour $r_1 r_2 < 1$ (i.e., $\frac{1}{r_1} - r_2 > 0$), on a

$$\begin{aligned} \Delta'(x) &= r_2 a_1^{r_2} x^{r_2-1} \left[1 + \overline{\psi}_4(x) - \frac{b_1 a_1^{-r_2}}{r_1 r_2} x^{\frac{1}{r_1}-r_2} (1 + \overline{\psi}_5(x)) \right] \\ &= r_2 a_1^{r_2} x^{r_2-1} [1 + \psi_6(x)], \end{aligned}$$

où $\psi_6 \in \mathcal{I}$, dont le signe est, pour $(x, \mu) \in (0, \sigma] \times W$, celui de

$$(5.20) \quad x^{1-r_2} \Delta'(x) = r_2 a_1^{r_2} [1 + \psi_6(x)] \sim r_2 a_1^{r_2} > 0;$$

d'où le résultat. Le cas $r_1 r_2 > 1$ est similaire.

- (2) Par (5.20), Δ' ne s'annule pas sur un intervalle $[0, \delta]$ si $r_1 r_2 \neq 1$ pour toute valeur des paramètres dans un voisinage de l'origine. Alors, par le théorème de Rolle, Δ a au plus un zéro sur cet intervalle si $r_1 r_2 \neq 1$. Donc la cyclicité du graphique précédent est au plus égale à un si $r_1 r_2 \neq 1$. $\square$

Définition 5.12. [10] Le *compensateur d'Écalle-Roussarie* du système $(S_{\epsilon, \gamma})$ est défini par

$$(5.21) \quad \omega(x, \alpha) := \begin{cases} \frac{x^\alpha - 1}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0, \\ \ln x & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

Alors,

$$(5.22) \quad \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, \alpha) = x^{\alpha-1}, \quad x^\alpha = 1 + \alpha \omega(x, \alpha).$$

La proposition suivante [10] est un argument pertinent pour traiter le cas « $r_1 r_2 = 1$ ».

Proposition 5.13. Soit ω défini au (5.21). Si $\psi \in \mathcal{I}$ est de la forme particulière

$$\psi(x) = \sum_{1 \leq k \leq i}^N c_{ik} x^{ir} \omega^k(x, \alpha),$$

avec $c_{ik} \in \mathbb{R}$ et r un nombre réel strictement positif, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{1-\alpha} \omega(x, \alpha) \psi'(x) = 0$$

uniformément pour α dans un voisinage de 0.

Théorème 5.14. Si $r_1 r_2 = 1$, alors nous avons :

- (1) la boucle hétéroclinique est attractive pour $a_1^{r_2} - b_1 < 0$ et répulsive pour $a_1^{r_2} - b_1 > 0$;
- (2) la cyclicité du graphique précédent est au plus égale à 2 lorsque $a_1^{r_2} - b_1 \neq 0$.

Démonstration. En effet, supposons que $r_1 r_2 = 1$. Pour tout paramètre γ , posons

$$\alpha(\gamma) := r_2(\gamma) - \frac{1}{r_1(\gamma)}.$$

Par souci d'alléger la notation, nous poserons $\alpha(\gamma) := \alpha$. Remarquons alors que

$$x^{r_2} = x^{\frac{1}{r_1}} x^\alpha = x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \alpha \omega(x, \alpha)),$$

par (5.22). Il vient que

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= a_1^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \alpha \omega(x, \alpha)) (1 + \psi_4(x)) - \left[b_0 + b_1 x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_5(x)) \right] \\ &= - \left[b_0 + b_1 x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_5(x)) \right] + a_1^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_4(x)) \\ &\quad + \alpha \omega(x, \alpha) a_1^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_4(x)) \\ &= -b_0 + \alpha \omega(x, \alpha) a_1^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_4(x)) \\ &\quad + x^{\frac{1}{r_1}} [a_1^{r_2} - b_1 + a_1^{r_2} \psi_4(x) - b_1 \psi_5(x)]. \end{aligned}$$

Si $a_1^{r_2} - b_1 \neq 0$, posons

$$\overline{\psi}_6(x) := \frac{a_1^{r_2} \psi_4(x) - b_1 \psi_5(x)}{a_1^{r_2} - b_1}.$$

Alors $\overline{\psi}_6 \in \mathcal{I}$. Ainsi, on a

$$\Delta(x) = -b_0 + \alpha \omega(x, \alpha) a_1^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_4(x)) + x^{\frac{1}{r_1}} [(a_1^{r_2} - b_1)(1 + \overline{\psi}_6(x))].$$

(1) La boucle hétéroclinique est attractive ou répulsive

Lorsque la boucle hétéroclinique se produit, on a $b_0 = 0$ et $\gamma = 0$ (alors $\alpha = 0$) ; ainsi

$$\Delta(x) = x^{\frac{1}{r_1}} [(a_1^{r_2} - b_1)(1 + \overline{\psi}_6(x))],$$

dont le signe est le même que celui de $a_1^{r_2} - b_1$. Donc, la boucle hétéroclinique est attractive si $a_1^{r_2} - b_1 < 0$ (resp. répulsive si $a_1^{r_2} - b_1 > 0$).

(2) **Cyclicité**

Posons

$$A(x) := \omega(x, \alpha) x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_4(x))$$

et

$$B(x) := x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \overline{\psi}_6(x)).$$

Ainsi, par la proposition 5.9, avons-nous

$$\begin{aligned} A'(x) &= x^{\alpha-1} x^{\frac{1}{r_1}} (1 + \psi_4(x)) + \frac{1}{r_1} \omega(x, \alpha) x^{\frac{1}{r_1}-1} (1 + \overline{\psi}_8(x)) \\ &= \frac{1}{r_1} x^{\frac{1}{r_1}-1} [r_1 x^\alpha (1 + \psi_4(x)) + \omega(x, \alpha) (1 + \overline{\psi}_8(x))] \\ &= \frac{1}{r_1} x^{\frac{1}{r_1}-1} \omega(x, \alpha) \left[1 + \overline{\psi}_8(x) + r_1 (1 + \psi_4(x)) \left(\frac{1 + \alpha \omega(x, \alpha)}{\omega(x, \alpha)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r_1} x^{\frac{1}{r_1}-1} \omega(x, \alpha) \left[1 + r_1 \alpha + \psi_9(x) + \frac{r_1 (1 + \psi_4(x))}{\omega(x, \alpha)} \right], \end{aligned}$$

avec $\overline{\psi}_8, \psi_9 \in \mathcal{I}$. Et, aussi,

$$B'(x) = \frac{1}{r_1} x^{\frac{1}{r_1}-1} (1 + \psi_8(x)),$$

avec $\psi_8 \in \mathcal{I}$. Il vient donc que

$$\begin{aligned} \Delta'(x) &= \frac{1}{r_1} (a_1^{r_2} - b_1) x^{\frac{1}{r_1}-1} (1 + \psi_8(x)) \\ &\quad + \frac{1}{r_1} \alpha a_1^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}-1} \omega(x, \alpha) \left[1 + r_1 \alpha + \psi_9(x) + \frac{r_1 (1 + \psi_4(x))}{\omega(x, \alpha)} \right] \\ &= \frac{1}{r_1} (a_1^{r_2} - b_1) x^{\frac{1}{r_1}-1} (1 + \psi_8(x)) + \alpha \frac{1}{r_1} a_1^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}-1} \omega(x, \alpha) [1 + \psi(x)], \end{aligned}$$

où $\psi \in \mathcal{I}$. Les zéros de $\Delta'(x)$ sont, pour $(x, \gamma) \in (0, \sigma] \times W$, aussi ceux de

$$\begin{aligned} \Delta_3(x) &:= \frac{r_1 x^{1-\frac{1}{r_1}} [\omega(x, \alpha) (1 + \psi(x))]^{-1} \Delta'(x)}{a_1^{r_2} - b_1} \\ &= \frac{1 + \psi_8(x)}{\omega(x, \alpha) (1 + \psi(x))} + \frac{\alpha a_1^{r_2}}{a_1^{r_2} - b_1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \Delta'_3(x) &= \\ &= \frac{[\omega(x, \alpha) \overline{\psi}'_8(x) (1 + \psi(x)) - (1 + \psi_8(x)) [x^{\alpha-1} (1 + \psi(x)) + \omega(x, \alpha) \psi'(x)]]}{[\omega(x, \alpha) (1 + \psi(x))]^2}. \end{aligned}$$

Le signe de $\Delta'_3(x)$ est, pour $(x, \lambda) \in (0, \sigma] \times W$, celui de

$$\begin{aligned} \Delta_4(x) &:= x^{1-\alpha} [\omega(x, \alpha) (1 + \psi(x))]^2 \Delta'_3(x) \\ &= x^{1-\alpha} \omega(x, \alpha) \overline{\psi}'_8(x) (1 + \psi(x)) - (1 + \psi_8(x)) (1 + \psi(x)) \\ &\quad + x^{1-\alpha} \omega(x, \alpha) \psi'(x). \end{aligned}$$

Or, par la proposition 5.13, $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1-\alpha} \omega(x, \alpha) \overline{\psi}_8'(x) = 0$ uniformément et, puisque

$$x^{1-\alpha} \omega(x, \alpha) \psi'(x) = x^{1-\alpha} \omega(x, \alpha) \psi_9'(x) + r_1 x^{1-\alpha} \psi_4'(x) - \frac{r_1 (1 + \psi_4(x))}{\omega(x, \alpha)},$$

alors $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1-\alpha} \omega(x, \alpha) \psi'(x) = 0$ uniformément ; aussi, avons-nous que $\psi(x)$ et $\psi_8(x)$ sont petits uniformément sur un voisinage de $(x, \gamma) = (0, 0)$:

$$\Delta_4(x) = -1 + \varphi(x),$$

avec $\varphi(x)$ petit uniformément sur un voisinage de $(x, \gamma) = (0, 0)$. Alors, Δ_4 est négatif pour $(x, \gamma) \in (0, \sigma] \times W$.

Donc, par le théorème de Rolle, Δ a au plus deux zéros si $a_1^{r_2} - b_1 \neq 0$. Comme les cycles limites correspondent aux zéros de l'application déplacement ; conséquemment, la cyclicité du graphique considéré est au plus égale à deux si $r_1 r_2 = 1$ et $a_1^{r_2} - b_1 \neq 0$. $\square$

Le problème est d'étudier le signe de $a_1^{r_2} - b_1$ puisque a_1 et b_1 sont les dérivées des fonctions en coordonnées normalisantes. Avant de le faire, rappelons brièvement une formule de dérivée d'une application de transition régulière. Voir [1].

Théorème 5.15. Soit $\mathbf{X} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ un champ de vecteurs et

$$\Sigma_1 = \{(x, y) = (f_1(s), g_1(s))\}, \quad \Sigma_2 = \{(x, y) = (f_2(\tilde{s}), g_2(\tilde{s}))\}$$

deux arcs sans contact. Soit $R(s)$ l'application de transition allant de Σ_1 à Σ_2 . Alors

$$R'(s) = \frac{\Delta(s)}{\tilde{\Delta}(R(s))} \exp \left(\int_0^{T(s)} \operatorname{div} \mathbf{X}(\gamma(t)) dt \right),$$

où $T(s)$ est le temps d'aller de $(f_1(s), g_1(s))$ à $(f_2(R(s)), g_2(R(s)))$ le long de l'orbite $\gamma(t)$ commençant à $(f_1(s), g_1(s))$ pour $t = 0$ et

$$\Delta(s) = \det \begin{pmatrix} P(f_1(s), g_1(s)) & f_1'(s) \\ Q(f_1(s), g_1(s)) & g_1'(s) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\Delta}(\tilde{s}) = \det \begin{pmatrix} P(f_2(\tilde{s}), g_2(\tilde{s})) & f_2'(\tilde{s}) \\ Q(f_2(\tilde{s}), g_2(\tilde{s})) & g_2'(\tilde{s}) \end{pmatrix}.$$

La formule précédente est d'une grande utilité dans l'obtention du résultat suivant (que nous donnons avec des idées de preuve).

Théorème 5.16. Sous la condition $r_1(\nu)r_2(\nu) = 1$, où $\nu := (\epsilon, \gamma)$, pour $X_0, Y_{01}, Y_{03} > 0$ fixés tels que

$$Y_{01} X_0^{-r_1(\nu)} = 1, \quad Y_{03} X_0^{-r_2(\nu)} = 1,$$

soient

$$\sigma_1 := \{X_1 = X_0\}, \quad \sigma_2 := \{X_3 = X_0\}, \quad \tau_1 := \{Y_1 = Y_{01}\}, \quad \tau_2 := \{Y_3 = Y_{03}\}$$

des sections transversales à $(S_{\epsilon, \gamma})$, parallèles aux axes de coordonnées normalisantes. De même, pour θ proche de x_0 à gauche, $y := -\bar{y} > 0$ et $y_0 > 0$ petits, soient

$$\bar{\sigma}_1 := \{\bar{x} = -\theta\}, \quad \bar{\sigma}_2 := \{\bar{x} = \theta\}, \quad \bar{\tau}_1 := \{y = y_0\}, \quad \bar{\tau}_2 := \{y = y_0\}$$

des sections transversales à $(S_{\epsilon, \gamma})$, parallèles aux axes de coordonnées ordinaires.

Soient $R_1 : \sigma_1 \mapsto \sigma_2$ et $R_2 : \tau_1 \mapsto \tau_2$ des applications de transition régulières, en coordonnées normalisantes, définies par (5.17) et (5.18). De même, soient $\bar{R}_1 : \bar{\sigma}_1 \mapsto \bar{\sigma}_2$ et $\bar{R}_2 : \bar{\tau}_2 \mapsto \bar{\tau}_1$ des applications de transition régulières en coordonnées ordinaires. Posons $a_1 := R_1'(0)$, $b_1 := (R_2^{-1})'(0)$, $\bar{a}_1 := \bar{R}_1'(0)$ et $\bar{b}_1 := (\bar{R}_2^{-1})'(0)$. Alors, $a_1^{r_2} - b_1$ et $\bar{a}_1^{r_2} - \bar{b}_1$ ont le même signe.

Idées de la preuve

Soient

- (1) $\tilde{\sigma}_1 := \ll \bar{\sigma}_1 \text{ dans les coordonnées } (x, y) \gg$, c'est-à-dire paramétrée par la coordonnée y ;
- (2) $\tilde{\sigma}_2 := \ll \bar{\sigma}_2 \text{ dans les coordonnées } (x, y) \gg$, c'est-à-dire paramétrée par la coordonnée y ;
- (3) $\bar{\bar{\sigma}}_1 := \ll \tilde{\sigma}_1 \text{ dans les coordonnées } (X_1, Y_1) \gg$, c'est-à-dire paramétrée par la coordonnée Y_1 ;
- (4) $\bar{\bar{\sigma}}_2 := \ll \tilde{\sigma}_2 \text{ dans les coordonnées } (X_3, Y_3) \gg$, c'est-à-dire paramétrée par la coordonnée Y_3 ;
- (5) $\bar{\bar{\tau}}_1 := \ll \bar{\tau}_1 \text{ dans les coordonnées } (X_1, Y_1) \gg$, c'est-à-dire paramétrée par la coordonnée X_1 ;
- (6) $\bar{\bar{\tau}}_2 := \ll \bar{\tau}_2 \text{ dans les coordonnées } (X_3, Y_3) \gg$, c'est-à-dire paramétrée par la coordonnée X_3 .

Considérons :

- (1) S_1 l'application de σ_1 vers $\bar{\bar{\sigma}}_1$ dans les coordonnées (X_1, Y_1) ;
- (2) T_1 le changement de coordonnée de Y_1 vers y dans $\tilde{\sigma}_1$;
- (3) $\tilde{R}_1$ l'application de transition de $\tilde{\sigma}_1$ vers $\tilde{\sigma}_2$ dans les coordonnées (x, y) ;
- (4) T_2 le changement de coordonnée de y vers Y_3 dans $\tilde{\sigma}_2$;
- (5) S_2 l'application de $\bar{\bar{\sigma}}_2$ vers σ_2 dans les coordonnées (X_3, Y_3) ;
- (6) V_1 l'application de τ_1 vers $\bar{\bar{\tau}}_1$ dans les coordonnées (X_1, Y_1) ;
- (7) U_1 le changement de coordonnée de X_1 vers x dans $\bar{\tau}_1$;
- (8) $\tilde{R}_2^{-1}$ l'application de transition de $\bar{\tau}_1$ vers $\bar{\tau}_2$ dans les coordonnées (x, y) ;
- (9) U_2 le changement de coordonnée de x vers X_3 dans $\bar{\tau}_2$;
- (10) V_2 l'application de $\bar{\bar{\tau}}_2$ vers τ_2 dans les coordonnées (X_3, Y_3) .

Il est pertinent de noter que

$$x = U_1(X_1) = c_0 + c_1 X_1 + O(|X_1|^2)$$

et

$$X_3 = U_2(x) = d_0 + d_1 x + O(|x|^2),$$

où $c_1 > 0$ et $d_1 > 0$: en référence aux figures 5.2 et 5.1, les calculs montrent que $c_1 = 1 + \frac{y_0}{(1-2a)x_0^2} + O(\epsilon^3)$ et $c_1 d_1 = 1 + O(\epsilon^3)$.

Puisque a_1 et b_1 dépendent continûment des paramètres (voir (5.17) et (5.18)), on peut donc les calculer pour $\gamma = 0$ de sorte que l'on ait $r_1 = \frac{1}{r_2}$. Sachant que

$$R_1 = S_2 \circ T_2 \circ \tilde{R}_1 \circ T_1 \circ S_1 \quad \text{et} \quad R_2^{-1} = V_2 \circ U_2 \circ \tilde{R}_2^{-1} \circ U_1 \circ V_1,$$

alors

$$R'_1(0) = S'_2(0)T'_2(0)\tilde{R}'_1(0)T'_1(0)S'_1(0)$$

et

$$(R_2^{-1})'(0) = V'_2(0)U'_2(0)(\tilde{R}_2^{-1})'(0)U'_1(0)V'_1(0),$$

où, par ce qui précède, on a $T'_1(0) = 1$, $T'_2(0) = 1$, $U'_1(0) = c_1 > 0$ et $U'_2(0) = d_1 > 0$, et par [1], (5.7) et du fait que $r_1 r_2 = 1$, on a que

$$S'_1(Y_1 = 0) = \left(\frac{X_0}{\tilde{\theta} + O(\tilde{\theta}^2) + O(\epsilon^3)} \right)^{r_1},$$

$$S'_2(Y_3 = 0) = \left(\frac{\tilde{\theta} + O(\tilde{\theta}^2) + O(\epsilon^3)}{X_0} \right)^{r_1},$$

$$V'_2(X_3 = 0) = \left(\frac{y_0}{Y_{03}} \right)^{r_2}$$

et

$$V'_1(X_1 = 0) = \left(\frac{Y_{01}}{y_0} \right)^{r_2}.$$

En posant $\tilde{a}_1 := \tilde{R}'_1(0)$ et $\tilde{b}_1 := (\tilde{R}_2^{-1})'(0)$, alors, via le fait que $Y_{01}Y_{03}^{-1} = 1$, on a $a_1^{r_2} - b_1 = (\tilde{a}_1^{r_2} - \tilde{b}_1)(1 + O(\epsilon^3))$. Donc

$$(5.23) \quad a_1^{r_2} - b_1 \quad \text{et} \quad \tilde{a}_1^{r_2} - \tilde{b}_1$$

ont le même signe. Pour revenir aux coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$, soient : $\tilde{T}_1$ le changement de coordonnées de x vers $\bar{x}$ dans $\bar{\tau}_1$; $\tilde{T}_2$ le changement de coordonnées de x vers $\bar{x}$ dans $\bar{\tau}_2$; $\tilde{S}_1$ le changement de coordonnées de y vers $\bar{y}$ dans $\bar{\sigma}_1$; $\tilde{S}_2$ le changement de coordonnées de $\bar{y}$ vers y dans $\bar{\sigma}_2$. Or, $\tilde{R}_1 = \tilde{S}_2 \circ \bar{R}_1 \circ \tilde{S}_1$, $\tilde{R}_2^{-1} = \tilde{T}_2 \circ \bar{R}_2^{-1} \circ \tilde{T}_1$, où $\tilde{T}'_2(0) = \tilde{T}'_1(0) = 1$ et $\tilde{S}'_2(0) = \tilde{S}'_1(0) = -1$. Alors

$$(5.24) \quad \tilde{a}_1 = \bar{a}_1 \quad \text{et} \quad \tilde{b}_1 = \bar{b}_1.$$

Conséquemment, par (5.23) et (5.24), on a que $a_1^{r_2} - b_1$ et $\bar{a}_1^{r_2} - \bar{b}_1$ ont le même signe.

Le résultat précédent est un argument pertinent de la preuve du théorème suivant.

Théorème 5.17. *Lors de BH_2 , définie pour le système (5.3), la cyclicité du graphique est au plus égale à deux et la boucle hétéroclinique est attractive.*

Démonstration.

(1) Cyclicité

En effet, par les théorèmes 5.14 et 5.16, il suffit d'étudier le signe de $\bar{a}_1^{r_2} - \bar{b}_1$. Il s'agit

donc de faire les calculs dans le système $(S_{\epsilon, \gamma})$, globalement équivalent à (5.3) par (5.4), sous les deux égalités suivantes caractérisant une approximation de BH_2 ,

$$(5.25) \quad \begin{cases} \mu_2 = \frac{\mu_1^2}{a^2(-4a+5)} := f(a)\mu_1^2, \\ \mu_3 = \frac{2\mu_1(2a-3)}{a(4a-5)} := g(a)\mu_1, \end{cases}$$

avec $\mu_1 > 0$, $a < 0$, $f(a) := \frac{1}{a^2(-4a+5)} > 0$ et $g(a) := \frac{2(2a-3)}{a(4a-5)} < 0$. Comme $\bar{a}_1^{r_2} - \bar{b}_1$ est continue, si nous montrons que $\bar{a}_1^{r_2} - \bar{b}_1$ est non nulle d'un signe donné sous la condition (5.25) qui implique en particulier que $\bar{b}_0 = 0$ (où $\bar{b}_0$ est le terme constant de $\bar{R}_2^{-1}(\bar{x})$), il gardera le même signe au voisinage de (5.25).

Or, $\bar{a}_1 = \bar{R}_1'(\bar{y} = 0)$ et $\bar{b}_1 = (\bar{R}_2^{-1})'(\bar{x} = 0)$ où

$$\begin{aligned} \bar{R}_2^{-1} : \bar{\tau}_1 &= \{(\bar{x} = \bar{f}_1(\bar{x}), \bar{y} = \bar{g}_1(\bar{x}) = -y_0)\} \\ &\longrightarrow \bar{\tau}_2 = \{(\bar{x} = \bar{f}_2(\bar{x}), \bar{y} = \bar{g}_2(\bar{x}) = -y_0)\}. \end{aligned}$$

Puisque le signe de $\bar{a}_1^{r_2} - \bar{b}_1$ est indépendant de θ et de y_0 , il suffit donc de calculer $\bar{R}_1'(\bar{y} = 0)$ lorsque $\theta \longrightarrow \left(\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}\right)^-$ et de calculer $(\bar{R}_2^{-1})'(\bar{x} = 0)$ lorsque $y_0 \longrightarrow 0^+$, de sorte que

$$t \in [0, T(0)] \iff \bar{x} \in [-\theta, \theta].$$

Sachant que

$$\operatorname{div}((S_{\epsilon, \gamma})) = (2a + 1)\bar{x} + \epsilon^3(\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_4\bar{x}^2 + \bar{x}^4)$$

et que les fonctions

$$\bar{x} \longmapsto \frac{\bar{x}}{a\bar{x}^2 + \bar{\mu}_1} \quad \text{et} \quad p : \bar{x} \longmapsto \frac{\epsilon^3(\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_4\bar{x}^2 + \bar{x}^4)}{a\bar{x}^2 + \bar{\mu}_1}$$

sont respectivement impaire et paire dans $[-\theta, \theta]$, alors, par la forme de $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ et le théorème 5.15, le long de la parabole $F_2 : \bar{y} = (\frac{1-2a}{2})(\frac{\bar{\mu}_1}{a} + \bar{x}^2)$, on a

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 &= \exp \left(\int_0^{T(0)} \operatorname{div}((S_{\epsilon, \gamma})) dt \right) \\ &= \exp \left(\lim_{\theta \rightarrow \sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}} \left(\int_{-\theta}^{\theta} \frac{\operatorname{div}((S_{\epsilon, \gamma}))}{\frac{1}{2}(\frac{\bar{\mu}_1}{a} + \bar{x}^2)} d\bar{x} \right) \right) \\ (5.26) \quad &= \exp \left(-4\epsilon^3 \lim_{\theta \rightarrow \sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}} \left(\int_0^{\theta} \frac{\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_4\bar{x}^2 + \bar{x}^4}{-\frac{\bar{\mu}_1}{a} - \bar{x}^2} d\bar{x} \right) \right). \end{aligned}$$

De même, par la forme de $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ et le théorème 5.15, le long de la droite $\bar{y} = 0$, on a que

$$(5.27) \quad \begin{aligned} \bar{a}_1 &= \exp \left(\lim_{\theta \rightarrow x_0} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\bar{x} + \epsilon^3(\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_4 \bar{x}^2 + \bar{x}^4)}{a\bar{x}^2 + \bar{\mu}_1} d\bar{x} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{\theta \rightarrow \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}} \left(\frac{-2\epsilon^3}{a} \int_0^{\theta} \frac{\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_4 \bar{x}^2 + \bar{x}^4}{-\frac{\bar{\mu}_1}{a} - \bar{x}^2} d\bar{x} \right) \right), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta} \frac{\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_4 \bar{x}^2 + \bar{x}^4}{-\frac{\bar{\mu}_1}{a} - \bar{x}^2} d\bar{x} &= \\ &\left(\frac{\bar{\mu}_2}{2\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}} + \frac{\bar{\mu}_4 \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}}{2} - \frac{\frac{\bar{\mu}_1}{a} \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}}{2} \right) \ln \left(\frac{\theta + \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}}{\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}} - \theta} \right) - \theta \bar{\mu}_4 - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta \bar{\mu}_1}{a}. \end{aligned}$$

Mais, par (T_2) et (5.25), on a successivement :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mu}_2}{2\sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}} + \frac{\bar{\mu}_4 \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}}{2} - \frac{\frac{\bar{\mu}_1}{a} \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}}{2} \\ = \frac{\frac{-a}{\bar{\mu}_1} \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}} \epsilon^{-3}}{2a^2} \left[\frac{-10 + 28a - 16a^2 + (-4a + 5)(-4a + 2)}{(-4a + 5)(-4a + 2)} \right] = 0 \end{aligned}$$

et

$$(5.28) \quad \begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}} \left(\int_0^{\theta} \frac{\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_4 \bar{x}^2 + \bar{x}^4}{-\frac{\bar{\mu}_1}{a} - \bar{x}^2} d\bar{x} \right) &= \lim_{\theta \rightarrow \sqrt{-\frac{\bar{\mu}_1}{a}}} \left(-\theta \bar{\mu}_4 - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta \bar{\mu}_1}{a} \right) \\ &= \epsilon^{-3} \left(\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} \right)^3 \left[\frac{2 - 4a}{3(4a - 5)} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, par (5.27), (5.26) et (5.28), avons-nous

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \exp \left(-\frac{2}{a} \left(\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} \right)^3 \left[\frac{2 - 4a}{3(4a - 5)} \right] \right), \\ \bar{b}_1 &= \exp \left(-4 \left(\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} \right)^3 \left[\frac{2 - 4a}{3(4a - 5)} \right] \right). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} a_{01} &:= -\frac{2}{a} \left(\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} \right)^3 \left[\frac{2 - 4a}{3(4a - 5)} \right], \\ b_{01} &:= -4 \left(\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}} \right)^3 \left[\frac{2 - 4a}{3(4a - 5)} \right]. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\bar{a}_1^{r_2} - \bar{b}_1 &= (\exp(a_{01}))^{r_2} - \exp(b_{01}) \\ &= \exp(r_2 a_{01}) - \exp(b_{01}) \\ &= \exp(b_{01})[\exp(r_2 a_{01} - b_{01}) - 1].\end{aligned}$$

Or, par ce qui précède, on a que

$$r_2 a_{01} - b_{01} = 2\left(2 - \frac{r_2}{a}\right) \left(\sqrt{-\frac{\mu_1}{a}}\right)^3 \left[\frac{2 - 4a}{3(4a - 5)}\right] < 0.$$

Donc

$$\exp(r_2 a_{01} - b_{01}) < 1$$

et, alors

$$\exp(b_{01})[\exp(r_2 a_{01} - b_{01}) - 1] < 0.$$

Conséquemment

$$\bar{a}_1^{r_2} - \bar{b}_1 < 0,$$

ce qui montre, par les théorèmes 5.14 et 5.16, que, lors de BH_2 défini pour le système (5.3), la cyclicité du graphique est au plus égale à deux.

(2) La boucle hétéroclinique est attractive

En effet, la boucle hétéroclinique du système (5.3) se produit pour la valeur 0 du paramètre γ (donc sous les égalités (5.25)) et pour $\bar{b}_0 = 0$. Ainsi, par la première partie de la preuve de ce théorème, avons-nous que $\bar{a}_1^{r_2} - \bar{b}_1 < 0$. Les théorèmes 5.14 et 5.16 permettent de conclure. $\square$

5.5. Diagramme de bifurcations de (1.2)

Les calculs ont mis en évidence que, sauf (Cn_{a_i}) et (Cn_{r_i}) (surfaces de bifurcation de cols-nœuds internes), les surfaces de bifurcation de (5.3) ont une structure conique, c'est-à-dire que, si $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_4)$ est sur une surface de bifurcation, alors tous les points $(\epsilon^2 \bar{\mu}_1, \epsilon^4 \bar{\mu}_2, \epsilon^2 \bar{\mu}_4)$ sont sur la même surface de bifurcation. Pour mieux visualiser toutes les surfaces de bifurcation, on choisit de dessiner la trace de leur intersection avec la sphère

$$S_\eta := \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = \eta^2\},$$

où $\eta > 0$ est suffisamment petit. La représentation de la trace du diagramme de bifurcations se fait en enlevant un point de la sphère dans la région où $\mu_1 < 0$.

Ainsi, par les résultats pertinents (des sections précédentes) relatifs à la famille (1.2), on a le théorème suivant.

Théorème 5.18. *Le diagramme de bifurcations de (5.3) apparaît à la figure 2.2.*

On peut donc faire la conjecture générale suivante.

Conjecture 5.19. *Le diagramme de bifurcations de la famille (1.2) a une structure de cône (sauf pour les surfaces de bifurcation de cols-nœuds internes), si bien qu'on peut, comme celui du système (5.3), se contenter de décrire son intersection avec une sphère. Topologiquement, il a la même structure que celui de la famille (5.3) et est donc décrit par la figure 2.2.*

Le théorème 5.18 et la conjecture 5.19 nous permettent d'obtenir le théorème B.

Annexe A. Méthode de Melnikov

Cette méthode [8, 4] est utilisée pour approximer le lieu des paramètres pour lesquels une perturbation d'un système Hamiltonien a une boucle hétéroclinique (ou homoclinique) : pour chaque boucle fermée du système Hamiltonien, la méthode donne approximativement le lieu des paramètres pour lesquels cette boucle fermée est préservée dans le système perturbé.

Considérons un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f(x, y), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g(x, y), \end{cases}$$

et les orbites fermées du système Hamiltonien correspondant (lignes de niveaux fermées de H), $\gamma_h : H = h$. Nous voulons savoir quelles orbites fermées γ_h du système non perturbé se déforment dans des orbites fermées γ'_h après la perturbation. Pour ϵ petit, considérons l'application de premier retour de Poincaré P_ϵ sur une section, transversale aux lignes de niveau fermées de H (incluant possiblement les boucles hétérocliniques ou homocliniques), et paramétrée par la valeur h de H . Les orbites fermées étant les points fixes de l'application de premier retour P_ϵ , on a

$$\begin{aligned} N(h) &:= P_\epsilon(h) - h = \int_{\gamma'_h} dH = \int_{\gamma'_h} \dot{H} dt = \int_{\gamma'_h} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} \right) dt \\ &= \epsilon \int_{\gamma'_h} \left[f \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial y} \right] dt. \end{aligned}$$

En utilisant la formule asymptotique

$$\begin{aligned} \epsilon \int_{\gamma'_h} \left(f \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial y} \right) dt &= \epsilon \int_{\gamma_h} \left(f \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial y} \right) dt + o(\epsilon) \\ &= \epsilon \int_{\gamma_h} (g dx - f dy) + o(\epsilon), \end{aligned}$$

il vient que

$$N(h) = \epsilon M(h) + o(\epsilon),$$

avec

$$M(h) := \int_{\gamma_h} (g dx - f dy).$$

En général, les résultats sur les zéros de $M(h)$ ne peuvent pas être transférés aux résultats sur les zéros de $\frac{N(h)}{\epsilon}$ dans le cas d'une boucle hétéroclinique [4]. Cependant, pour de petites codimensions, comme c'est le cas dans ce manuscrit, ce transfert de résultats fonctionne bien [4]. Donc, pour de petites codimensions, les zéros de la fonction $N(h)$ sont bien approximés par les zéros de la *fonction de Melnikov* $M(h)$.

Remerciements. Nous sommes très reconnaissants envers Christiane Rousseau de nous avoir suggéré l'orientation de l'étude de ce sujet. Nous la remercions également, ainsi que Robert Roussarie, pour des discussions stimulantes et des suggestions pertinentes.

RÉFÉRENCES

- [1] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon et A.G. Maier, *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*, Translated from the Russian, Halsted Press [A division of John Wiley & Sons], New York–Toronto, Ont. ; Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem–London, 1973. xiv+482 pp.
- [2] A.D. Bazykin, *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*, With a biography of the author by E.P. Kryukova, Y.A. Bazykin and D.A. Bazykin. Edited and with a foreword by A.I. Khibnik and B. Krauskopf. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A : Monographs and Treatises **11**, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998. xxii+193 pp.
- [3] L.A. Cherkas, *Structure of the sequence function in the neighborhood of a separatrix cycle during perturbation of an analytic autonomous system on the plane*, (Russian) *Differentsial'nye Uravneniya* **17** (1981), no. 3, 469–478, 573.
- [4] F. Dumortier et R. Roussarie, *Abelian integrals and limit cycles*, *J. Differential Equations* **227** (2006), no. 1, 116–165.
- [5] F. Dumortier, R. Roussarie et C. Rousseau, *Elementary graphics of cyclicity 1 and 2*, *Nonlinearity* **7** (1994), no. 3, 1001–1043.
- [6] F. Dumortier, R. Roussarie et J. Sotomayor, *Generic 3-parameter families of planar vector fields, unfoldings of saddle, focus and elliptic singularities with nilpotent linear parts*, in *Lecture Notes in Math.*, **1480** (1991), 1–164, Springer-Verlag, New York.
- [7] R.M.D. Etoua, *Étude d'un modèle de Gause généralisé avec récolte de proies et fonction de Holling type III généralisée*, Thèse de Ph.D., Université de Montréal, (Novembre 2008).
- [8] C. Li et C. Rousseau, *A system with three limit cycles appearing in a Hopf bifurcation and dying in a homoclinic bifurcation : the cusp of order 4*, *J. Differential Equations* **79** (1989), no. 1, 132–167.
- [9] M. El Morsalani, *Bifurcations de polycycles infinis pour les champs de vecteurs polynomiaux du plan*, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6) **3** (1994), no. 3, 387–410.
- [10] A. Mourlada, *Cyclicité finie des polycycles hyperboliques de champs de vecteurs du plan : mise sous forme normale*, in *Bifurcations of Planar Vector Fields* (Luminy, 1989), 272–314, *Lecture Notes in Math.*, 1455, Springer, Berlin, 1990.
- [11] D. Schlomiuk, *Algebraic and geometric aspects of the theory of polynomial vector fields*, in *Bifurcations and periodic orbits of vectors fields*, edited by D. Schlomiuk : Proceedings of the NATO advanced study institute and Séminaire de mathématiques supérieures on bifurcations and periodic orbits of vector fields, Montréal, Canada, July 13–24, 1992, NATO ASI series C, Mathematical and physical sciences, **408**, 429–467.
- [12] H. Zhu et C. Rousseau, *Finite cyclicity of graphics with a nilpotent singularity of saddle or elliptic type*, *J. Differential Equations* **178** (2002), no. 2, 325–436.

R. M. ETOUA, DÉP. DE MATH. ET SCIENCES PHYSIQUES, ÉCOLE POLYTECHNIQUE, B.P. 8390, YAOUNDÉ, CAMEROUN
 etouar@dms.umontreal.ca/retoua@yahoo.fr