

QUELQUES APPLICATIONS DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA K-THÉORIE HERMITIENNE

NAOUFEL BATTIKH

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous montrons comment utiliser le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne de Karoubi ainsi que certains résultats en K-théorie algébrique pour démontrer des résultats analogues en L-théorie.

ABSTRACT. In this work we show how to use Karoubi's fundamental theorem of hermitian K-theory to prove some results in L-theory using the same results in algebraic K-theory.

1. Introduction

Soit I un anneau quelconque (éventuellement sans élément unité). On dit que I est un anneau *excisif pour la K-théorie algébrique* (resp. *la K-théorie hermitienne* (cf. [3], p. 305)) si pour tout carré cartésien d'anneaux unitaires (resp. hermitiens)

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_1 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ A_2 & \longrightarrow & A', \end{array}$$

avec $I \simeq \ker \varphi_1$ et φ_1 est surjectif, on a

$$K_n(\varphi_1) \simeq K_n(\varphi_2)$$

(resp.

$${}_{\varepsilon}L_n(\varphi_1) \simeq {}_{\varepsilon}L_n(\varphi_2))$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En particulier, on a la suite exacte

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow K_{n+1}(A') \longrightarrow K_n(A) \longrightarrow K_n(A_1) \oplus K_n(A_2) \\ \longrightarrow K_n(A') \longrightarrow K_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

(resp.

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_{n+1}(A') \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_n(A_1) \oplus {}_{\varepsilon}L_n(A_2) \\ \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_n(A') \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots). \end{aligned}$$

Comme exemples d'anneaux excisifs pour la K-théorie algébrique nous pouvons citer les C^* -algèbres et les algèbres H -unitaires (cf. [11], p. 52). Dans la première partie de ce travail, en suivant Karoubi dans [6], on montre que si un anneau est excisif pour la K-théorie algébrique alors il est excisif pour la K-théorie hermitienne. On montre aussi le même résultat pour la K-théorie à coefficients dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

D'autre part, étant donnée une algèbre de Banach involutive A , les applications canoniques

$$BGL(A) \xrightarrow{\sigma} BGL^{top}(A) \quad \text{et} \quad B_\varepsilon O(A) \xrightarrow{\tau} B_\varepsilon O^{top}(A)$$

induisent des homomorphismes

$$K_n(A) \xrightarrow{\sigma_n} K_n^{top}(A) \quad \text{et} \quad {}_\varepsilon L_n(A) \xrightarrow{\tau_n} {}_\varepsilon L_n^{top}(A).$$

Dans la deuxième partie de ce travail, on montre que si pour tout $n \geq 0$, σ_n est un isomorphisme, alors τ_n est un isomorphisme pour tout $n \geq 0$. Dans [11] Wodzicki et Suslin ont montré que pour les C^* -algèbres stables, les σ_n sont des isomorphismes pour tout $n \geq 0$. Donc pour une C^* -algèbre stable A , les groupes de K-théorie hermitienne coïncident avec ceux de la K-théorie hermitienne topologique.

Une partie de ce travail a fait l'objet d'une note aux CRAS (cf. [1]).

2. Rappels

2.1. Le délaçage de la K-théorie

Dans cet article, on utilisera de manière essentielle le délaçage de la K-théorie, obtenu en remplaçant un anneau A par sa suspension SA (cf. [9], p. 327, pour la définition de la suspension algébrique). En voici un bref rappel.

Théorème 2.1 ([12]). *Soit un anneau unitaire A . On a une équivalence d'homotopie*

$$\Omega BGL(SA)^+ \sim K_0(A) \times BGL(A)^+,$$

où le groupe $K_0(A)$ est muni de la topologie discrète. En particulier pour tout $n \geq 1$, on a

$$K_n(SA) \simeq K_{n-1}(A).$$

Théorème 2.2 ([4]). *Soit un anneau hermitien A , c'est-à-dire un anneau unitaire muni d'une anti-involution notée $z \mapsto \bar{z}$, et soit ε un élément du centre de A vérifiant $\varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$. On a une équivalence d'homotopie*

$$\Omega B_\varepsilon O(SA)^+ \sim {}_\varepsilon L_0(A) \times B_\varepsilon O(A)^+,$$

où le groupe ${}_\varepsilon L_0(A)$ est muni de la topologie discrète. En particulier, pour tout $n \geq 1$, on a

$${}_\varepsilon L_n(SA) \simeq {}_\varepsilon L_{n-1}(A).$$

Ces théorèmes permettent de définir les groupes K_n et ${}_\varepsilon L_n$ pour tout $n < 0$. En effet, pour un anneau unitaire (resp. hermitien) A et $n < 0$, on pose

$$K_n(A) = K_0(S^{-n}A)$$

(resp.

$${}_{\varepsilon}L_n(A) = {}_{\varepsilon}L_0(S^{-n}A).$$

2.2. Le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne

Soit A un anneau hermitien. Le foncteur « hyperbolique » (cf. [3]) induit un homomorphisme de groupes

$$K_0(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_0(A)$$

et les homomorphismes

$$GL_r(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}O_{r,r}(A)$$

définis par la correspondance

$$M \longmapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & {}^t\overline{M}^{-1} \end{pmatrix}$$

induisent une application

$$BGL(A)^+ \longrightarrow B_{\varepsilon}O(A)^+.$$

On note ${}_{\varepsilon}\mathcal{U}(A)$ la fibre homotopique de l'application

$$K_0(A) \times BGL(A)^+ \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_0(A) \times B_{\varepsilon}O(A)^+.$$

De même, le foncteur « oubli » (cf. [3]) induit un homomorphisme

$${}_{\varepsilon}L_0(A) \longrightarrow K_0(A)$$

et les inclusions naturelles

$${}_{\varepsilon}O_{r,r}(A) \longrightarrow GL_r(A)$$

induisent une application

$$B_{\varepsilon}O^+(A) \longrightarrow BGL(A)^+.$$

On note ${}_{\varepsilon}\mathcal{V}(A)$ la fibre homotopique de l'application

$${}_{\varepsilon}L_0(A) \times B_{\varepsilon}O(A)^+ \longrightarrow K_0(A) \times BGL(A)^+.$$

Théorème 2.3 ([5]). *Soit un anneau hermitien A contenant un élément λ dans son centre qui vérifie $\lambda + \overline{\lambda} = 1$. Il existe alors une équivalence d'homotopie naturelle entre les espaces $\Omega_{\varepsilon}\mathcal{U}(A)$ et ${}_{-\varepsilon}\mathcal{V}(A)$.*

Notons qu'un anneau hermitien A contient un élément λ dans son centre vérifiant $\lambda + \overline{\lambda} = 1$ si, par exemple, 2 est inversible dans A . Rappelons que l'analogue topologique de ce théorème implique les théorèmes de périodicité de Bott dans le cas réel ou complexe et que cette interprétation de la périodicité de Bott ne fait pas appel aux algèbres de Clifford (cf. [3]).

Pour $n \geq 0$, on pose

$${}_{\varepsilon}U_n(A) = \pi_n({}_{\varepsilon}\mathcal{U}(A)) \quad \text{et} \quad {}_{\varepsilon}V_n(A) = \pi_n({}_{\varepsilon}\mathcal{V}(A))$$

et pour $n < 0$, on pose

$${}_{\varepsilon}U_n(A) = {}_{\varepsilon}U_0(S^{-n}A) \quad \text{et} \quad {}_{\varepsilon}V_n(A) = {}_{\varepsilon}V_0(S^{-n}A).$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$${}_{\varepsilon}U_{n+1}(A) \simeq -{}_{\varepsilon}V_n(A).$$

On a aussi les suites exactes longues

$$\cdots \longrightarrow K_{n+1}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}V_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_n(A) \longrightarrow K_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}V_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

et

$$\cdots \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_{n+1}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}U_n(A) \longrightarrow K_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}U_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

2.3. Les groupes relatifs $K_n(f)$ et $L_n(f)$.

Soit A un anneau unitaire (resp. hermitien). Dans la suite, on notera $\mathcal{K}(A)$ (resp. ${}_{\varepsilon}\mathcal{L}(A)$) l'espace $K_0(A) \times BGL(A)^+$ (resp. ${}_{\varepsilon}L_0(A) \times B_{\varepsilon}O(A)^+$). Soit un homomorphisme d'anneaux unitaires (resp. hermitiens)

$$f : A \longrightarrow B.$$

Nous allons rappeler une construction, due essentiellement à Wagoner (cf. [12]), des groupes $K_n(f)$ (resp. ${}_{\varepsilon}L_n(f)$). Soit $\Gamma(f)$ le produit fibré de SA et CB au-dessus de SB :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(f) & \longrightarrow & CB \\ \downarrow & & \downarrow \\ SA & \longrightarrow & SB \end{array}$$

L'espace $\Omega\mathcal{K}(\Gamma(f))$ (resp. $\Omega_{\varepsilon}\mathcal{L}(\Gamma(f))$) a le même type d'homotopie que la fibre homotopique $\mathcal{K}(f)$ (resp. ${}_{\varepsilon}\mathcal{L}(f)$) de l'application

$$\mathcal{K}(A) \longrightarrow \mathcal{K}(B) \quad (\text{resp. } {}_{\varepsilon}\mathcal{L}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\mathcal{L}(B)).$$

Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$K_n(f) = \pi_n(\mathcal{K}(f)) \quad (\text{resp. } {}_{\varepsilon}L_n(f) = \pi_n({}_{\varepsilon}\mathcal{L}(f)))$$

et pour $n < 0$, on pose

$$K_n(f) = K_0(S^{-n}f) \quad (\text{resp. } {}_{\varepsilon}L_n(f) = {}_{\varepsilon}L_0(S^{-n}f)).$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$K_n(Sf) \simeq K_{n-1}(f) \quad (\text{resp. } {}_{\varepsilon}L_n(Sf) \simeq {}_{\varepsilon}L_{n-1}(f))$$

et

$$K_n(f) = K_{n+1}(\Gamma(f)) \quad (\text{resp. } {}_{\varepsilon}L_n(f) \simeq {}_{\varepsilon}L_{n+1}(\Gamma(f))).$$

On a aussi les suites exactes longues

$$\cdots \longrightarrow K_{n+1}(B) \longrightarrow K_n(f) \longrightarrow K_n(A) \longrightarrow K_n(B) \longrightarrow K_{n-1}(f) \longrightarrow \cdots$$

et

$$\cdots \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_{n+1}(B) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_n(f) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_n(B) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_{n-1}(f) \longrightarrow \cdots$$

2.4. Excision en K-théorie

Définition 2.4. On dit qu'un carré d'anneaux unitaires (resp. hermitiens)

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_1 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ A_2 & \longrightarrow & A' \end{array}$$

est *excisif pour la K-théorie algébrique* (resp. *hermitienne*), si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$K_n(\varphi_1) \simeq K_n(\varphi_2) \quad (\text{resp. } {}_\varepsilon L_n(\varphi_1) \simeq {}_\varepsilon L_n(\varphi_2)).$$

Pour un carré excisif pour la K-théorie algébrique (resp. hermitienne), on a en particulier, la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow K_{n+1}(A') \longrightarrow K_n(A) \longrightarrow K_n(A_1) \oplus K_n(A_2) \\ \longrightarrow K_n(A') \longrightarrow K_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

(resp.

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow {}_\varepsilon L_{n+1}(A') \longrightarrow {}_\varepsilon L_n(A) \longrightarrow {}_\varepsilon L_n(A_1) \oplus {}_\varepsilon L_n(A_2) \\ \longrightarrow {}_\varepsilon L_n(A') \longrightarrow {}_\varepsilon L_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots) \end{aligned}$$

Définition 2.5. Soit I un anneau quelconque (éventuellement sans élément unité). On dit que I est un anneau *excisif pour la K-théorie algébrique* (resp. *hermitienne*), si tout carré cartésien d'anneaux unitaires (resp. hermitiens)

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_1 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ A_2 & \longrightarrow & A' \end{array}$$

tel que $I \simeq \ker \varphi_1$ et φ_1 est surjectif, est excisif pour la K-théorie algébrique (resp. hermitienne).

Remarque 2.6. Soit un diagramme cartésien d'anneaux unitaires (resp. hermitiens)

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_1 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ A_2 & \longrightarrow & A' \end{array}$$

tel que φ_1 est surjectif. On a alors (cf. [12] et [7], p. 68)

$$K_0(\varphi_1) \simeq K_0(\varphi_2)$$

(resp.

$${}_\varepsilon L_0(\varphi_1) \simeq {}_\varepsilon L_0(\varphi_2)).$$

Remarquons que notre définition des groupes relatifs ${}_\varepsilon L_0(\varphi_1)$ et ${}_\varepsilon L_0(\varphi_2)$ coïncide avec celle de [8] d'après la proposition 2.5 de [5] (p. 269).

2.5. Exemples d'anneaux excisifs pour la K-théorie algébrique

Théorème 2.7 (cf. [11]). *Toute $\mathbb{C}^*$ -algèbre est excisive pour la K-théorie algébrique.*

Soit A une $\mathbb{Q}$ -algèbre. On dit que A est H -unitaire si le complexe

$$\dots \xrightarrow{b'} A^{\otimes n} \xrightarrow{b'} A^{\otimes n-1} \xrightarrow{b'} \dots \xrightarrow{b'} A \otimes A \xrightarrow{b'} A$$

est acyclique. Pour tout $n \geq 2$, l'homomorphisme b' étant défini sur $A^{\otimes n}$ par la formule

$$b'(a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{i=2}^n (-1)^i a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_{i-1} a_i \otimes \dots \otimes a_n.$$

Théorème 2.8 (cf. [11]). *Tout anneau H -unitaire A est excisif pour la K-théorie algébrique.*

3. Excision en K-théorie algébrique et hermitienne

Dans la suite, on supposera que 2 est inversible dans les anneaux considérés.

Théorème 3.1 (cf. [1]). *Soit $p \in \mathbb{Z}$ et soit un diagramme cartésien d'anneaux hermitiens*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_1 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ A_2 & \longrightarrow & A' \end{array}$$

vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} K_n(\varphi_1) \simeq K_n(\varphi_2) \text{ pour tout } n \geq p, \\ {}_{\varepsilon}L_p(\varphi_1) \simeq {}_{\varepsilon}L_p(\varphi_2), \\ {}_{\varepsilon}L_{p+1}(\varphi_1) \simeq {}_{\varepsilon}L_{p+1}(\varphi_2). \end{array} \right.$$

On a alors

$${}_{\varepsilon}L_n(\varphi_1) \simeq {}_{\varepsilon}L_n(\varphi_2) \text{ pour tout } n \geq p.$$

Corollaire 3.2. *Soit I un anneau hermitien. Si I est excisif pour la K-théorie algébrique, alors il est aussi excisif pour la K-théorie hermitienne.*

Démonstration. Soit I un anneau excisif pour la K-théorie algébrique et soit un diagramme cartésien d'anneaux hermitiens

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_1 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ A_2 & \longrightarrow & A' \end{array}$$

tel que $I = \ker \varphi_1$ et φ_1 est surjectif. D'après la remarque 2.6 on a

$${}_{\varepsilon}L_0(\varphi_2) \simeq {}_{\varepsilon}L_0(\varphi_1).$$

La suspension de ce diagramme étant aussi un diagramme cartésien avec $S\varphi_1$ qui est surjective on a, toujours d'après la remarque 2.6,

$${}_{\varepsilon}L_0(S\varphi_2) \simeq {}_{\varepsilon}L_0(S\varphi_1).$$

On a donc

$${}_{\varepsilon}L_{-1}(\varphi_2) = {}_{\varepsilon}L_0(S\varphi_2) \simeq {}_{\varepsilon}L_0(S\varphi_1) = {}_{\varepsilon}L_{-1}(\varphi_1).$$

Donc, d'après le théorème 3.1 et pour tout $n \geq -1$, on a

$${}_{\varepsilon}L_n(\varphi_2) \simeq {}_{\varepsilon}L_n(\varphi_1).$$

Pour $n < -1$, on a

$${}_{\varepsilon}L_n(\varphi_2) = {}_{\varepsilon}L_0(S^{-n}\varphi_2) \simeq {}_{\varepsilon}L_0(S^{-n}\varphi_1) = {}_{\varepsilon}L_n(\varphi_1),$$

d'où le corollaire. $\square$

4. Excision en K-théorie hermitienne à coefficients dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Soit X un espace topologique. Pour tout $n \geq 2$, $\pi_n(X; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ désignera le n -ième groupe d'homotopie de X modulo q (cf. [10]).

Définition 4.1. Soit A un anneau unitaire (resp. hermitien). Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$K_n(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \pi_n(BGL(A)^+; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$$

(resp.

$${}_{\varepsilon}L_n(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \pi_n(B_{\varepsilon}O(A)^+; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})).$$

Pour $n < 2$, on pose

$$K_n(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = K_2(S^{2-n}A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \quad (\text{resp. } {}_{\varepsilon}L_n(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = {}_{\varepsilon}L_2(S^{2-n}A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})).$$

Définition 4.2. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux unitaires (resp. hermitiens). Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$K_n(f; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \pi_n(\mathcal{K}(f); \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \quad (\text{resp. } {}_{\varepsilon}L_n(f; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \pi_n({}_{\varepsilon}\mathcal{L}(f); \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})).$$

Pour $n < 2$, on pose

$$K_n(f; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = K_2(S^{2-n}f; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \quad (\text{resp. } {}_{\varepsilon}L_n(f; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = {}_{\varepsilon}L_2(S^{2-n}f; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})).$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a les suites exactes longues

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow K_{n+1}(B; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) &\longrightarrow K_n(f; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow K_n(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \\ &\longrightarrow K_n(B; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow K_{n-1}(f; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_{n+1}(B; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) &\longrightarrow {}_{\varepsilon}L_n(f; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_n(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \\ &\longrightarrow {}_{\varepsilon}L_n(B; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_{n-1}(f; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Définition 4.3. Soit A un anneau hermitien. Pour tout $n \geq 2$, on pose

$${}_{\varepsilon}U_n(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \pi_n({}_{\varepsilon}\mathcal{U}(A); \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \quad (\text{resp. } {}_{\varepsilon}V_n(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \pi_n({}_{\varepsilon}\mathcal{V}(A); \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})).$$

Pour $n < 2$, on pose

$${}_{\varepsilon}U_n(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = {}_{\varepsilon}U_2(S^{2-n}A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$$

(resp.

$${}_{\varepsilon}V_n(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = {}_{\varepsilon}V_2(S^{2-n}A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})).$$

Notons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{cases} {}_{\varepsilon}U_n(SA; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \simeq {}_{\varepsilon}U_{n-1}(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}), \\ {}_{\varepsilon}V_n(SA; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \simeq {}_{\varepsilon}V_{n-1}(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}), \\ {}_{\varepsilon}U_{n+1}(SA; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \simeq -{}_{\varepsilon}V_n(A; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}). \end{cases}$$

Définition 4.4. Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux hermitiens. Pour tout $n \geq 2$, on pose

$${}_{\varepsilon}U_n(f; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \pi_n({}_{\varepsilon}\mathcal{U}(f); \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \quad (\text{resp. } {}_{\varepsilon}V_n(f; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \pi_n({}_{\varepsilon}\mathcal{V}(f); \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})).$$

Pour $n < 2$, on pose

$${}_{\varepsilon}U_n(f; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \quad (\text{resp. } {}_{\varepsilon}V_n(f; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = {}_{\varepsilon}V_2(S^{2-n}f; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})).$$

Pour simplifier les écritures, on notera $\overline{K}_n(\cdot)$, ${}_{\varepsilon}\overline{L}_n(\cdot)$, ${}_{\varepsilon}\overline{U}_n(\cdot)$ et ${}_{\varepsilon}\overline{V}_n(\cdot)$ les groupes $K_n(\cdot; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, ${}_{\varepsilon}L_n(\cdot; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, ${}_{\varepsilon}U_n(\cdot; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ et ${}_{\varepsilon}V_n(\cdot; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ respectivement. Notons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{cases} \overline{K}_n(Sf) \simeq \overline{K}_{n-1}(f), \\ {}_{\varepsilon}\overline{L}_n(Sf) \simeq {}_{\varepsilon}\overline{L}_{n-1}(f), \\ {}_{\varepsilon}\overline{U}_n(Sf) \simeq {}_{\varepsilon}\overline{U}_{n-1}(f), \\ {}_{\varepsilon}\overline{V}_n(Sf) \simeq {}_{\varepsilon}\overline{V}_{n-1}(f). \end{cases}$$

On a aussi les suites exactes longues

$$\cdots \longrightarrow \overline{K}_{n+1}(f) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\overline{V}_n(f) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\overline{L}_n(f) \longrightarrow \overline{K}_n(f) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\overline{V}_{n-1}(f) \longrightarrow \cdots$$

et

$$\cdots \longrightarrow {}_{\varepsilon}\overline{L}_{n+1}(f) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\overline{U}_n(f) \longrightarrow \overline{K}_n(f) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\overline{L}_n(f) \longrightarrow {}_{\varepsilon}\overline{U}_{n-1}(f) \longrightarrow \cdots$$

Proposition 4.5. Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux hermitiens. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$${}_{\varepsilon}\overline{U}_{n+1}(f) \simeq -{}_{\varepsilon}\overline{V}_n(f).$$

Démonstration. Le diagramme de fibrations

$$\begin{array}{ccccc} {}_{-\varepsilon}\mathcal{V}(f) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathcal{V}(A) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathcal{V}(B) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ {}_{\Omega_\varepsilon}\mathcal{U}(f) & \longrightarrow & {}_{\Omega_\varepsilon}\mathcal{U}(A) & \longrightarrow & {}_{\Omega_\varepsilon}\mathcal{U}(B) \end{array}$$

montre que ${}_{\varepsilon}\overline{U}_{n+1}(f) \simeq {}_{-\varepsilon}\overline{V}_n(f)$ pour tout $n \geq 2$. Pour $n < 2$ on a

$${}_{-\varepsilon}\overline{V}_n(f) = {}_{-\varepsilon}\overline{V}_2(S^{2-n}f) \simeq {}_{\varepsilon}\overline{U}_3(S^{2-n}f) = {}_{\varepsilon}\overline{U}_{n+1}(f),$$

d'où l'énoncé de la proposition. $\square$

Remarque 4.6. On définit l'excision en K-théorie à coefficients dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, pour un diagramme ou pour un anneau, de manière tout à fait analogue à celle de la K-théorie usuelle. Le théorème suivant (cf. [2] ou [7]) fournit des exemples d'anneaux excisifs pour la K-théorie à coefficients dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Théorème 4.7. Soit I un anneau tel que $\tilde{H}_*(I; \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = 0$. L'anneau I est alors excusif pour la K-théorie algébrique à coefficients dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Remarque 4.8. D'une façon tout à fait analogue, on démontre l'équivalent du théorème 3.1 pour la K-théorie algébrique à coefficients dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Corollaire 4.9. Soit I un anneau hermitien. Si I est excusif pour la K-théorie algébrique à coefficients dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, alors il est aussi excusif pour la K-théorie hermitienne à coefficients dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit I un anneau hermitien excusif pour la K-théorie algébrique à coefficients dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ et soit un diagramme cartésien d'anneaux hermitiens

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_1 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ A_2 & \longrightarrow & A' \end{array}$$

tel que $I \simeq \ker \varphi_1$ et φ_1 est surjectif. Considérons le diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} {}_{\varepsilon}L_2(S^2\varphi_2) & \xrightarrow{\cdot q} & {}_{\varepsilon}L_2(S^2\varphi_2) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}\overline{L}_2(S^2\varphi_2) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_1(S^2\varphi_2) & \xrightarrow{\cdot q} & {}_{\varepsilon}L_1(S^2\varphi_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ {}_{\varepsilon}L_2(S^2\varphi_1) & \xrightarrow{\cdot q} & {}_{\varepsilon}L_2(S^2\varphi_1) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}\overline{L}_2(S^2\varphi_1) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_1(S^2\varphi_1) & \xrightarrow{\cdot q} & {}_{\varepsilon}L_1(S^2\varphi_1) \end{array}$$

On a

$${}_{\varepsilon}L_2(S^2\varphi_2) \simeq {}_{\varepsilon}L_0(\varphi_2) \simeq {}_{\varepsilon}L_0(\varphi_1) \simeq {}_{\varepsilon}L_2(S^2\varphi_1).$$

On a aussi

$${}_{\varepsilon}L_1(S^2\varphi_2) \simeq {}_{\varepsilon}L_0(S\varphi_2) \simeq {}_{\varepsilon}L_0(S\varphi_1) \simeq {}_{\varepsilon}L_1(S^2\varphi_1).$$

Donc le diagramme prouve que

$${}_{\varepsilon}\overline{L}_0(\varphi_2) = {}_{\varepsilon}\overline{L}_2(S^2\varphi_2) \simeq {}_{\varepsilon}\overline{L}_2(S^2\varphi_1) = {}_{\varepsilon}\overline{L}_0(\varphi_1).$$

On montre de même que

$${}_{\varepsilon}\overline{L}_{-1}(\varphi_2) \simeq {}_{\varepsilon}\overline{L}_{-1}(\varphi_1).$$

Donc d'après la remarque 4.8 et pour tout $n \geq -1$, on a

$${}_{\varepsilon}\overline{L}_n(\varphi_2) \simeq {}_{\varepsilon}\overline{L}_n(\varphi_1).$$

Pour $n < -1$, on a

$${}_{\varepsilon}\overline{L}_n(\varphi_2) = {}_{\varepsilon}\overline{L}_0(S^{-n}\varphi_2) \simeq {}_{\varepsilon}\overline{L}_0(S^{-n}\varphi_1) = {}_{\varepsilon}\overline{L}_n(\varphi_1),$$

d'où le corollaire. $\square$

5. La K-théorie hermitienne des $\mathbb{C}^*$ -algèbres stables

Soit A une algèbre de Banach. La K-théorie topologique de A est définie par

$$K_n^{\text{top}}(A) = \begin{cases} \pi_n(BGL^{\text{top}}(A)) & \text{pour } n > 0, \\ K_0(A) & \text{pour } n = 0. \end{cases}$$

La topologie de l'espace $GL^{\text{top}}(A)$, qui est la limite inductive des $GL_n^{\text{top}}(A)$, est induite par celle des espaces de Banach $M_n(A)$. Pour une algèbre de Banach involutive A , la K-théorie hermitienne topologique de A est définie par

$${}_{\varepsilon}L_n^{\text{top}}(A) = \begin{cases} \pi_n(B_{\varepsilon}O^{\text{top}}(A)) & \text{pour } n > 0, \\ {}_{\varepsilon}L_0(A) & \text{pour } n = 0. \end{cases}$$

Soit l'application canonique

$$BGL(A) \xrightarrow{\sigma} BGL^{\text{top}}(A).$$

On a $\pi_1(\sigma)(E(A)) = 0$, d'où l'application

$$BGL(A)^+ \xrightarrow{\sigma^+} BGL^{\text{top}}(A)$$

qui rend commutatif à homotopie près le diagramme

$$\begin{array}{ccc} BGL(A) & \longrightarrow & BGL^{\text{top}}(A) \\ \downarrow & \nearrow & \\ BGL(A)^+ & & \end{array}$$

L'application σ^+ induit par passage aux groupes d'homotopie, et pour tout $n > 0$, des homomorphismes

$$K_n(A) \xrightarrow{\sigma_n} K_n^{\text{top}}(A).$$

Pour $n = 0$, on pose $\sigma_0 = \text{Id}$. De même, pour une algèbre de Banach involutive A , l'application canonique

$$B_\varepsilon O(A) \xrightarrow{\tau} B_\varepsilon O^{\text{top}}(A)$$

induit, pour tout $n > 0$, des homomorphismes

$${}_\varepsilon L_n(A) \xrightarrow{\tau_n} {}_\varepsilon L_n^{\text{top}}(A).$$

Pour $n = 0$, on pose $\tau_0 = \text{Id}$. Soit A une algèbre de Banach involutive. On notera $\mathcal{K}^{\text{top}}(A)$ l'espace $K_0(A) \times BGL^{\text{top}}(A)$ et ${}_\varepsilon \mathcal{L}^{\text{top}}(A)$ l'espace ${}_\varepsilon L_0(A) \times B_\varepsilon O^{\text{top}}(A)$. Soit ${}_\varepsilon \mathcal{U}^{\text{top}}(A)$ la fibre homotopique de l'application

$$\mathcal{K}^{\text{top}}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon \mathcal{L}^{\text{top}}(A)$$

et soit ${}_\varepsilon \mathcal{V}^{\text{top}}(A)$ la fibre homotopique de l'application

$${}_\varepsilon \mathcal{L}^{\text{top}}(A) \longrightarrow \mathcal{K}^{\text{top}}(A).$$

On a alors le théorème suivant (cf. [3]).

Théorème 5.1. *Soit A une algèbre de Banach involutive. Il existe une équivalence d'homotopie naturelle entre les espaces $\Omega_\varepsilon \mathcal{U}^{\text{top}}(A)$ et ${}_{-\varepsilon} \mathcal{V}^{\text{top}}(A)$.*

Pour tout $n \geq 0$, on pose

$${}_\varepsilon U_n^{\text{top}}(A) = \pi_n({}_\varepsilon \mathcal{U}^{\text{top}}(A)) \text{ et } {}_\varepsilon V_n^{\text{top}}(A) = \pi_n({}_\varepsilon \mathcal{V}^{\text{top}}(A)).$$

Pour tout $n \geq 1$, on a alors

$${}_\varepsilon U_n^{\text{top}}(A) \simeq {}_{-\varepsilon} V_{n-1}^{\text{top}}(A).$$

On a aussi les diagrammes de suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & {}_\varepsilon L_{n+1}(A) & \longrightarrow & {}_\varepsilon U_n(A) & \longrightarrow & K_n(A) & \longrightarrow & {}_\varepsilon L_n(A) & \longrightarrow & {}_\varepsilon U_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & {}_\varepsilon L_{n+1}^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & {}_\varepsilon U_n^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & K_n^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & {}_\varepsilon L_n^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & {}_\varepsilon U_{n-1}^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & K_{n+1}(A) & \longrightarrow & {}_\varepsilon V_n(A) & \longrightarrow & {}_\varepsilon L_n(A) & \longrightarrow & K_n(A) & \longrightarrow & {}_\varepsilon V_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & K_{n+1}^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & {}_\varepsilon V_n^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & {}_\varepsilon L_n^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & K_n^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & {}_\varepsilon V_{n-1}^{\text{top}}(A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Définition 5.2. Soit A une algèbre de Banach involutive. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$${}_\varepsilon W_n^{\text{top}}(A) = \text{coker} \left(K_n^{\text{top}}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon L_n^{\text{top}}(A) \right)$$

et

$${}_\varepsilon W_n(A) = \text{coker} (K_n(A) \longrightarrow {}_\varepsilon L_n(A)).$$

Proposition 5.3 ([6]). *Soit A une algèbre de Banach involutive. On a*

$${}_\varepsilon W_1(A) \simeq {}_\varepsilon W_1^{\text{top}}(A).$$

Théorème 5.4. Soit A une algèbre de Banach involutive telle que pour tout $n \geq 0$,

$$K_n(A) \simeq K_n^{top}(A).$$

Pour tout $n \geq 0$, on a

$${}_{\varepsilon}L_n(A) \simeq {}_{\varepsilon}L_n^{top}(A).$$

Démonstration. Soit une algèbre de Banach involutive A telle que

$$K_n(A) \simeq K_n^{top}(A)$$

pour tout $n \geq 0$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} K_1(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_1(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}W_1(A) & \longrightarrow & 0 \\ \simeq \downarrow & & \downarrow & & \simeq \downarrow & & \\ K_1^{top}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_1^{top}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}W_1^{top}(A) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Ce diagramme prouve que

$$\ker \left({}_{\varepsilon}L_1(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_1^{top}(A) \right) \subset \text{Im} \left(K_1(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_1(A) \right)$$

et que le morphisme ${}_{\varepsilon}L_1(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_1^{top}(A)$ est surjectif. Considérons alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} K_1(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_1(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}U_0(A) & \longrightarrow & K_0(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_0(A) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ K_1^{top}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_1^{top}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}U_0^{top}(A) & \longrightarrow & K_0^{top}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_0^{top}(A). \end{array}$$

On en déduit que

$${}_{\varepsilon}U_0(A) \simeq {}_{\varepsilon}U_0^{top}(A).$$

Notons que le fait que $\ker \left({}_{\varepsilon}L_1(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_1^{top}(A) \right) \subset \text{Im} \left(K_1(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_1(A) \right)$ est utilisé pour démontrer que l'application ${}_{\varepsilon}U_0(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}U_0^{top}(A)$ est injective.

Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} {}_{\varepsilon}L_1(A) & \longrightarrow & K_1(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}V_0(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_0(A) & \longrightarrow & K_0(A) \\ \downarrow & & \simeq \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ {}_{\varepsilon}L_1^{top}(A) & \longrightarrow & K_1^{top}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}V_0^{top}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_0^{top}(A) & \longrightarrow & K_0^{top}(A). \end{array}$$

On en déduit que pour tout ε ,

$${}_{\varepsilon}V_0(A) \simeq {}_{\varepsilon}V_0^{top}(A).$$

Pour tout ε , on a donc

$${}_{\varepsilon}U_1(A) \simeq {}_{\varepsilon}U_1^{top}(A).$$

Le diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 {}_{\varepsilon}U_1(A) & \longrightarrow & K_1(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_1(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}U_0(A) & \longrightarrow & K_0(A) \\
 \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \downarrow & & \simeq \downarrow & & \parallel \\
 {}_{\varepsilon}U_1^{top}(A) & \longrightarrow & K_1^{top}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_1^{top}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}U_0^{top}(A) & \longrightarrow & K_0^{top}(A)
 \end{array}$$

montre que

$${}_{\varepsilon}L_1(A) \simeq {}_{\varepsilon}L_1^{top}(A).$$

La suite de la démonstration est alors analogue à celle du théorème 3.1. $\square$

Définition 5.5. Soit $\mathcal{K}$ la $\mathbb{C}^*$ -algèbre des opérateurs compacts sur l'espace de Hilbert séparable standard. Une $\mathbb{C}^*$ -algèbre A est dite *stable* si elle est isomorphe à $\mathcal{K} \otimes A$.

Théorème 5.6 ([11]). Soit A une $\mathbb{C}^*$ -algèbre stable. Le morphisme

$$K_n(A) \xrightarrow{\sigma_n} K_n^{top}(A)$$

est un isomorphisme pour tout $n \geq 0$.

Le théorème suivant est une conséquence directe des deux théorèmes précédents.

Théorème 5.7. Soit A une $\mathbb{C}^*$ -algèbre stable involutive. Pour tout $n \geq 0$, on a

$${}_{\varepsilon}L_n(A) \simeq {}_{\varepsilon}L_n^{top}(A).$$

Exemple 5.8. Soit $\mathcal{K}$ la $\mathbb{C}^*$ -algèbre des opérateurs compacts sur l'espace de Hilbert séparable standard $\mathcal{H}$. Soit $A = C(X; \mathcal{K})$ la $\mathbb{C}^*$ -algèbre des fonctions continues d'un espace compact X à valeurs dans $\mathcal{K}$. Cette algèbre est stable. Le théorème de densité (cf. [4, p. 237]) permet de montrer que

$${}_1L_n^{top}(A) \simeq {}_1L_n^{top}(C(X; \mathbb{C})).$$

De plus, dans [4, p. 234], Karoubi montre que pour une $\mathbb{C}$ -algèbre B on a un isomorphisme naturel

$${}_1L_n^{top}(B) \simeq K_n^{top}(B) \oplus K_n^{top}(B).$$

Puisque l'algèbre $C(X; \mathbb{C})$ fait partie des $\mathbb{C}$ -algèbres, pour tout $n \geq 0$, on a l'isomorphisme

$${}_1L_n(A) \simeq K_n(X) \oplus K_n(X).$$

Si, par exemple, X est l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^r$, on obtient

$${}_1L_n(A) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{2r} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

RÉFÉRENCES

- [1] N. Battikh, *Excision en K -théorie hermitienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), no. 2, 131–134.
- [2] R. M. Charney, *A note on excision in K -theory*, in Algebraic K -theory, number theory, geometry and analysis (Bielefeld, 1982), 47–54, Lecture Notes in Math., **1046**, Springer, Berlin, 1984.
- [3] M. Karoubi, *Périodicité de la K -théorie hermitienne*, in Algebraic K -theory, III : Hermitian K -theory and geometric applications (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), pp. 301–411. Lecture Notes in Math., Vol. 343, Springer, Berlin, 1973.
- [4] M. Karoubi, *Théorie de Quillen et homologie du groupe orthogonal*, Ann. of Math. (2) **112** (1980), no. 2, 207–257.
- [5] M. Karoubi, *Le théorème fondamental de la K -théorie hermitienne*, Ann. of Math. (2) **112** (1980), no. 2, 259–282.
- [6] M. Karoubi, *Relations between algebraic K -theory and Hermitian K -theory*, in Proceedings of the Luminy conference on algebraic K -theory (Luminy, 1983), J. Pure Appl. Algebra **34** (1984), no. 2–3, 259–263.
- [7] M. Karoubi, *Homologie de groupes discrets associés à des algèbres d'opérateurs*, J. Operator Theory **15** (1986), no. 1, 109–161.
- [8] M. Karoubi et O. Villamayor, *K -théorie algébrique et K -théorie topologique II*, Math. Scand. **32** (1973), 57–86.
- [9] J. L. Loday, *K -théorie algébrique et représentations de groupes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **9** (1976), no. 3, 309–377.
- [10] J. Neisendorfer, *Primary homotopy theory*, Mem. Amer. Math. Soc. **25** (1980), no. 232, iv+67 pp.
- [11] A. A. Suslin et M. Wodzicki, *Excision in algebraic K -theory*, Ann. of Math. (2) **136** (1992), no. 1, 51–122.
- [12] J. B. Wagoner, *Delooping classifying spaces in algebraic K -theory*, Topology **11** (1972), 349–370.

N. BATTIKH, DÉP. DE MATH., FACULTÉ DES SCIENCES DE TUNIS, CAMPUS UNIVERSITAIRE 2092, EL MANAR, TUNIS, TUNISIE.
 naoufelbattikh@yahoo.fr