

APPROXIMATION DIOPHANTINNE ET APPROXIMANTS DE HERMITE-PADÉ DE TYPE I DE FONCTIONS EXPONENTIELLES

SAMY KHÉMIRA ET PAUL VOUTIER

Dédié à Paulo Ribenboim à l'occasion de son 80^e anniversaire.

RÉSUMÉ. En utilisant des approximants de Hermite-Padé de fonctions exponentielles, ainsi que des déterminants d'interpolation de Laurent, nous minorons la distance entre un nombre algébrique et l'exponentielle d'un nombre algébrique non nul.

ABSTRACT. We use Hermite-Padé approximants of exponential functions along with Laurent's interpolation determinants to obtain lower bounds for the distance between an algebraic number and the exponential of another non-zero algebraic number.

1. Introduction

L'étude de la nature arithmétique de valeurs particulières de la fonction exponentielle a longtemps été l'un des thèmes principaux de la théorie des nombres. Par exemple, en 1873, Hermite [7] a prouvé que e est transcendant. Peu après, Lindemann a démontré que e^β est transcendant si β est un nombre algébrique différent de zéro. De cette façon, il a été capable de montrer que π est transcendant, puisque $e^{i\pi} = -1$, et ainsi de résoudre l'ancien problème grec de la quadrature du cercle.

Quand on sait qu'un nombre est transcendant, il est pertinent de se poser la question de son approximation par des nombres algébriques. De tels énoncés quantitatifs sont connus sous le nom de « mesures de transcendance ». Les plus anciens résultats dans cette direction remontent à 1899 quand Borel [2] a obtenu la première mesure de transcendance de e . Nous renvoyons le lecteur à [5, Chap. 2] pour plus d'informations sur l'histoire de ce sujet, qui est le thème de cet article.

1.1. Énoncés

Soit α un nombre algébrique de degré d sur $\mathbb{Q}$, de sorte que le polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$ s'écrit $a \prod_{i=1}^d (X - \alpha^{(i)})$, les racines $\alpha^{(i)}$ étant des nombres complexes. Nous désignons par

$$h(\alpha) = \frac{1}{d} \left(\log |a| + \sum_{i=1}^d \log \max \left(1, |\alpha^{(i)}| \right) \right)$$

la hauteur logarithmique absolue de Weil du nombre algébrique α .

Pour m et n des entiers naturels, nous posons

$$D_{m,n} = \frac{m!}{\prod_{\substack{q \leq n \\ q \text{ premier}}} q^{v_q(m!)}},$$

où $v_q(m!)$ est l'exposant du premier q qui apparaît dans l'écriture de $m!$ en produits de premiers, et nous définissons d_n comme le plus petit commun multiple de $1, \dots, n$ avec $d_0 = 1$.

Nous allons démontrer les résultats énoncés ci-dessous.

Théorème 1.1. Soient α et β deux nombres algébriques avec $\beta \neq 0$. Posons

$$D = [\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] / [\mathbb{R}(\alpha, \beta) : \mathbb{R}].$$

Soient $\mathcal{A} \geq 1$ et $\mathcal{B} \geq 1$ deux nombres réels tels que

$$\text{Dh}(\alpha) - \log(\max(1, |\alpha|)) \leq \log \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \text{Dh}(\beta) - \log(\max(1, |\beta|)) \leq \log \mathcal{B}.$$

Soient K et L des entiers strictement positifs avec $L \geq 2$, et $E > 1$ un nombre réel tel que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$(1) \quad \begin{aligned} KL \log E &\geq DKL \log 2 + D(K-1) \log \left(e\sqrt{3L}d_{L-1} \right) + D \log (D_{K-1, L-1}) \\ &+ D \log \left((4e)^{L-1} \min \left(d_{L-2}^{K-1}, (L-2)! \right) \right) + \log((K-1)!) \\ &+ (K-1) \log(\mathcal{B}/2) + (L-1) \log(\mathcal{A}/2) + LE|\beta| + L \log E. \end{aligned}$$

Enfin, soit $\epsilon = |\exp(\beta) - \alpha|$. Alors

$$\epsilon \geq E^{-KL}.$$

Remarque 1.2. L'inégalité $L \geq 2$ n'est pas une limitation, le cas $L = 1$ étant sans intérêt puisque les fonctions auxiliaires sont des polynômes.

Remarque 1.3. Sous les hypothèses du théorème 1.1, le théorème de Hermite-Lindemann [5, Theorem 2.2] et [18, Theorem 1.2] s'énonce $\epsilon > 0$.

Remarque 1.4. De (1), nous déduisons que $KL \log E \geq DKL \log 2$ et $E \geq 2^D$. À partir de cette même inégalité, nous obtenons également $KL \log E \geq LE|\beta|$; et en combinant cela avec l'inégalité précédente pour E , nous avons alors

$$KL \log E \geq L2^D |\beta|.$$

Donc $KL \log E$ croît exponentiellement en D . Par la suite, le théorème 1.1 est le mieux adapté pour les petites valeurs de D .

Un cas particulier du théorème 1.1 concerne l'approximation par des entiers algébriques de l'exponentielle d'un entier algébrique. Quand on se restreint aux corps imaginaires quadratiques, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 1.5. Quand α et β sont deux entiers algébriques d'un même corps imaginaire quadratique avec $|\beta|$ suffisamment grand, on a

$$\left| e^\beta - \alpha \right| \geq |\beta|^{-276.55 \dots |\beta|}.$$

Historiquement, la première estimation en lien avec ce corollaire 1.5 est due à Mahler (voir [12] et [5, page 105]) avec une constante égale à 33 pour $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Elle fut améliorée et la constante fut abaissée à 21 (par Mignotte [13]) et à 19.187 (meilleure estimation connue à ce jour, par Wielonsky [19]), encore dans le cas où $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

De telles minoration ont des applications en informatique théorique : dans [14], J.-M. Muller et A. Tisserand ont en effet utilisé les résultats de [15]. Nous projetons, dans un futur article, de déduire du théorème 1.1 des améliorations des théorèmes 1–5 de [15] pour $D = 1$.

1.2. Introduction d'un déterminant et plan de la démonstration du théorème 1.1

Voici le schéma de la démonstration du théorème 1.1. Pour k et ℓ deux entiers naturels, considérons les fonctions

$$\Phi_{k,\ell}(z) = z^k e^{\ell z}.$$

Pour K et L des entiers strictement positifs, posons $S = KL$ et considérons la matrice $\mathcal{M}(x, y) \in \mathbb{M}_{S,S}(\mathbb{Q}[x, y])$ définie par

$$\mathcal{M}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \mathcal{M}_1(x, y) \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathcal{M}_0 = \left(\left(\frac{d}{dz} \right)^s (\Phi_{k,\ell}(z)) (0) \right)_{\substack{0 \leq s \leq S-2 \\ 0 \leq k \leq K-1, 0 \leq \ell \leq L-1}},$$

où s désigne l'indice de ligne et où les couples (k, ℓ) paramétrisent les colonnes, et

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(x, y) &= \left(\delta^\mu (X^k Y^\ell) (x, y) \right)_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \\ &= \left(y^\ell \sum_{j=0}^{\min(\mu, k)} \binom{\mu}{j} \frac{k!}{(k-j)!} x^{k-j} \ell^{\mu-j} \right)_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}}, \end{aligned}$$

où μ désigne un entier naturel qui sera choisi plus tard, $0^0 = 1$, et δ est l'opérateur de dérivation défini par :

$$(2) \quad \delta = \frac{\partial}{\partial X} + Y \frac{\partial}{\partial Y}.$$

Remarque 1.6. On a

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^s (\Phi_{k,\ell}(z)) (0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > s, \\ \binom{s}{k} k! \ell^{s-k} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 1.7. Nous posons tout d'abord $F(x, y) = \det \mathcal{M}(x, y)$, et ensuite $\mathcal{D} = F(\beta, \alpha) = \det (\mathcal{M}(\beta, \alpha))$.

La remarque 1.6 et la définition de $\mathcal{M}_1(x, y)$ permettent de déduire que $F(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$.

Définition 1.8. Pour $0 \leq k \leq K - 1$, $0 \leq \ell \leq L - 1$, définissons les nombres complexes $w_{k,\ell}$ par

$$w_{k,\ell} = \frac{\alpha^\ell - e^{\beta\ell}}{|e^\beta - \alpha|} \sum_{j=0}^{\min(\mu,k)} \binom{\mu}{j} \frac{k! \ell^{\mu-j}}{(k-j)!} \beta^{k-j}.$$

Remarque 1.9. Notons que l'on a

$$\delta^\mu \left(X^k Y^\ell \right) (\beta, \alpha) = \Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(\beta) + \epsilon w_{k,\ell}$$

et

$$\mathcal{D} = \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(\beta) + \epsilon w_{k,\ell} \right)_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.10. D'autres choix sont possibles pour $\mathcal{M}(x, y)$. Par exemple, on pourrait utiliser une matrice $\mathcal{M}_1(x, y)$ comportant T lignes indexées par plusieurs dérivations $\mu_1, \dots, \mu_T$, ou même considérer plusieurs points multiples entiers de β . Mais les travaux du premier auteur, dans la section 3.5 de sa thèse [9], ainsi que des travaux informatiques effectués par le second auteur, suggèrent (mais ne prouvent pas !) que le choix $T = 1$ développé dans cet article pourrait être le meilleur.

La méthode habituelle en théorie des nombres transcendants (quand on utilise les déterminants d'interpolation de Laurent) consiste à montrer que $\mathcal{D}$ n'est pas nul (lemme de zéros), à le majorer par un argument analytique (lemme de Schwarz), à le minorer par un argument arithmétique (inégalité de Liouville) et à comparer les deux estimations pour obtenir la conclusion. Nous suivrons cette démarche, mais le nombre qui interviendra n'est pas $\mathcal{D}$ lui-même, c'est un nombre qui lui est étroitement lié (il s'agit de $\mathcal{G}_{\beta,\alpha}$ donné par la formule (17)). Le lemme de zéros est la proposition 2.1, la minoration arithmétique est la proposition 3.5 et la majoration analytique est la proposition 3.7 ci-dessous.

Un point important de cette étude se trouve dans le lemme de zéros énoncé dans cet article, qui est un raffinement de celui utilisé dans [15].

2. Lemmes auxiliaires

2.1. Un nouveau lemme de zéros

Nous allons énoncer et démontrer un lemme de zéros qui précise celui de Yu.V. Nesterenko et M. Waldschmidt dans [15].

Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et δ l'opérateur défini en (2) sur l'espace $\mathbb{K}[X, Y]$ des polynômes en deux variables.

Proposition 2.1. Soient M un entier positif et $D_0, D_1, S_1, \dots, S_M$ des entiers naturels vérifiant

$$(3) \quad S_1 + \dots + S_M > (D_0 + M)(D_1 + 1) - M.$$

Soient $(\zeta_1, \eta_1), \dots, (\zeta_M, \eta_M)$ des couples de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ où $\zeta_1, \dots, \zeta_M$ sont deux à deux distincts. Alors il n'existe pas de polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X, Y]$, de degré inférieur

ou égal à D_0 en X et de degré inférieur ou égal à D_1 en Y , qui satisfasse

$$(4) \quad \delta^\sigma P(\zeta_\kappa, \eta_\kappa) = 0$$

pour tout couple σ, κ vérifiant $0 \leq \sigma < S_\kappa$ et $1 \leq \kappa \leq M$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un polynôme non nul P de degré inférieur ou égal à D_0 en X et de degré inférieur ou égal à D_1 en Y , qui satisfasse les égalités (4). Nous allons montrer que la condition (3) n'est pas satisfaite.

Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que Y ne divise pas le polynôme P (puisque $\eta_\kappa \neq 0$), et que P a un degré supérieur ou égal à 1 par rapport à la variable Y (le cas où P est de degré 0 en la variable Y est celui, trivial, d'un polynôme en une variable). Définissons les entiers $n, k_0, \dots, k_n, m_0, \dots, m_n$, les polynômes $Q_i \in \mathbb{K}[X]$ ($0 \leq i \leq n$) et les éléments $b_0, \dots, b_n$ de $\mathbb{K}^*$ par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} k_0 = 0 < k_1 < \dots < k_n \leq D_1, \\ P(X, Y) = \sum_{i=0}^n Q_i(X) Y^{k_i}, \\ Q_i(X) = b_i X^{m_i} + \text{termes d'ordre inférieur} \in \mathbb{K}[X], \quad (i = 0, \dots, n). \end{cases}$$

Pour $0 \leq \sigma \leq n$, nous définissons les polynômes $Q_{\sigma i} \in \mathbb{K}[X]$ par

$$(5) \quad \delta^\sigma P(X, Y) = \sum_{i=0}^n Q_{\sigma i}(X) Y^{k_i},$$

de sorte que

$$Q_{\sigma i}(X) = \sum_{j=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{j} Q_i^{(\sigma-j)}(X) k_i^j = b_i k_i^\sigma X^{m_i} + \text{termes d'ordre inférieur}.$$

On pose

$$\begin{aligned} \Delta(X) &= \det (Q_{\sigma i}(X))_{0 \leq i, \sigma \leq n} \\ &= \det (b_i k_i^\sigma X^{m_i} + \text{termes d'ordre inférieur})_{0 \leq i, \sigma \leq n} \\ &= b_0 \dots b_n B X^{m_0 + \dots + m_n} + \text{termes d'ordre inférieur}, \end{aligned}$$

où B est le déterminant de Vandermonde construit à partir des nombres $k_0, \dots, k_n$, donc $B \neq 0$. De (5) nous déduisons, au moyen des formules de Cramer,

$$\Delta(X) = \sum_{\sigma=0}^n \Delta_\sigma(X, Y) \delta^\sigma P(X, Y) \quad \text{avec} \quad \Delta_\sigma(X, Y) \in \mathbb{K}[X, Y].$$

Par conséquent, pour $1 \leq j \leq M$ et $0 \leq \tau < \max \{0, S_j - n\}$, on peut écrire

$$\Delta^{(\tau)}(\zeta_j) = \sum_{\sigma=0}^{n+\tau} c_{\tau, j, \sigma} \delta^\sigma P(\zeta_j, \eta_j) = 0$$

avec $c_{\tau, j, \sigma} \in \mathbb{K}$. Étant donné que les nombres réels ζ_j sont deux à deux distincts par hypothèse, et puisque la somme des multiplicités des zéros d'un polynôme en une

variable est égale au degré de ce polynôme, on obtient

$$\sum_{j=1}^M (S_j - n) \leq \sum_{j=1}^M \max \{0, S_j - n\} \leq \deg \Delta(X).$$

Or, $n \leq D_1$ et $\deg \Delta(X) = m_0 + \dots + m_n \leq (n+1)D_0 \leq (D_1+1)D_0$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M S_j &\leq (D_1+1)D_0 + nM \\ &\leq (D_1+1)D_0 + D_1M \\ &= (D_0+M)(D_1+1) - M. \end{aligned}$$

Ceci montre que la condition (3) n'est pas satisfaite. La proposition 2.1 en résulte. $\square$

Remarque 2.2. Le lemme 2 de [15] est le cas particulier de la proposition 2.1 dans lequel $S_1 = \dots = S_M$.

Remarque 2.3. Un exemple avec $D_0 = 0$ où le lemme de zéros précédent (proposition 2.1) est optimal est donné par le polynôme $\mathcal{P}(X, Y) = (Y-1)^{D_1}$ qui vérifie (4) avec

$$S_1 = \dots = S_M = D_1,$$

pour les points $(\zeta_\mu, \eta_\mu) = (\mu, 1)$, $1 \leq \mu \leq M$.

2.1.1. Une application

Considérons le polynôme $\mathcal{H}(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$ défini par

$$(6) \quad \mathcal{H}(X, Y) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ (X^k Y^\ell)_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \end{pmatrix}.$$

Lemme 2.4. Soient α et β deux nombres algébriques avec $\alpha, \beta \neq 0$ et $L \geq 2$ un entier. Alors il existe un entier naturel $\mu \leq L-2$ tel que $\delta^\mu \mathcal{H}(\beta, \alpha) \neq 0$.

Démonstration. Le polynôme $\mathcal{H}(X, Y)$ est de degré au plus $K-1$ en X et au plus $L-1$ en Y . De plus,

$$\begin{aligned} \delta^\mu \mathcal{H}(z, e^z) &= \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ (\delta^\mu (X^k Y^\ell) (z, e^z))_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ (\Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(z))_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'après la définition des $\Phi_{k,\ell}(z)$. Notons que $S = KL \geq 2$, car $L \geq 2$.

Dans le cas particulier où $z = 0$, pour tout entier naturel μ vérifiant $\mu \leq S-2$, la dernière ligne de la matrice est la même que la ligne, dans $\mathcal{M}_0$, indexée par $s = \mu$. Par conséquent $\delta^\mu \mathcal{H}(0, 1) = 0$ pour tout entier naturel μ vérifiant $\mu < S-1$.

On applique la proposition 2.1 avec $D_0 = K-1$, $D_1 = L-1$, $M = 2$, $S_1 = S-1 = KL-1$, $(\zeta_1, \eta_1) = (0, 1)$ et $(\zeta_2, \eta_2) = (\beta, \alpha)$.

Il est également nécessaire, pour utiliser la proposition 2.1, que $\mathcal{H}(X, Y)$ ne soit pas le polynôme nul. Dans la preuve du lemme 2.22, nous allons montrer que la matrice $\mathcal{M}_0$ est de rang $S - 1$. Nous allons en déduire qu'au moins une des sous-matrices obtenues en supprimant une des colonnes est de déterminant non nul. Pour cela, supposons que l'indice d'une telle sous-matrice est (k_0, ℓ_0) . La dernière ligne de la matrice dont le déterminant est $\mathcal{H}(X, Y)$ contient des monômes distincts de la forme $X^k Y^\ell$. Quand on développe $\mathcal{H}(X, Y)$ comme un déterminant par rapport à la dernière ligne, le polynôme que l'on obtient est $c_{k_0, \ell_0} X^{k_0} Y^{\ell_0}$ plus d'autres termes de degré strictement inférieur et où $c_{k_0, \ell_0} \neq 0$, et donc $\mathcal{H}(X, Y)$ n'est pas le polynôme nul.

Ainsi, toutes les conditions sont réunies pour appliquer notre lemme de zéros (proposition 2.1) et on a

$$S_1 + S_2 = KL - 1 + S_2 \leq (D_0 + 2)(D_1 + 1) - 2 = (K + 1)L - 2,$$

où $S_2 \leq L - 1$. Par conséquent il existe un entier $0 \leq \mu \leq L - 2$ tel que $\delta^\mu \mathcal{H}(\beta, \alpha) \neq 0$ et le lemme 2.4 résulte de la définition 1.7 et de l'égalité (17). $\square$

Définition 2.5. À partir de maintenant, μ désignera le plus petit entier satisfaisant à la conclusion du lemme 2.4.

2.2. Polynômes de Fel'dman

Nous introduisons des polynômes de Fel'dman afin d'affiner de futures estimations.

Définition 2.6. Pour ν entier naturel, on définit le *polynôme de Fel'dman* $\mathcal{F}_\nu$ d'indice ν (et ses coefficients $\lambda_{j,\nu} \in \mathbb{Q}$, $j = 0, \dots, \nu$) par

$$\mathcal{F}_\nu(z) = \frac{z(z-1) \cdots (z-\nu+1)}{\nu!} = \sum_{j=0}^{\nu} \lambda_{j,\nu} z^j.$$

Notons que $\lambda_{j,\nu} = s(\nu, j)/\nu!$, où $s(\nu, j)$ est le (ν, j) -ième nombre de Stirling de première espèce, voir [1, Section 24.1.3, p. 824].

Lemme 2.7. Pour tout $\nu \geq 0$, on a

$$\sum_{j=0}^{\nu} j! |\lambda_{j,\nu}| \leq 2^\nu.$$

Démonstration. Comme

$$\sum_{j=0}^0 j! |\lambda_{j,0}| = 1 = 2^0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^1 j! |\lambda_{j,1}| = 1 < 2^1,$$

on peut supposer $\nu \geq 2$ et procéder par récurrence sur ν . Étant donné que $\lambda_{0,\nu} = 0$ et $\nu! \lambda_{\nu,\nu} = 1$ pour $\nu \geq 2$, on peut écrire

$$\sum_{j=0}^{\nu} j! |\lambda_{j,\nu}| = 1 + \sum_{j=1}^{\nu-1} j! |\lambda_{j,\nu}|.$$

D'après [1, p. 824] (aussi de la relation $\mathcal{F}_\nu(z) = ((z - \nu + 1)/\nu) \mathcal{F}_{\nu-1}(z)$), on a

$$j! |\lambda_{j,\nu}| = \frac{j}{\nu} (j-1)! |\lambda_{j-1,\nu-1}| + \frac{\nu-1}{\nu} j! |\lambda_{j,\nu-1}|.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\nu} j! |\lambda_{j,\nu}| &= 1 + \sum_{j=1}^{\nu-1} \frac{j}{\nu} (j-1)! |\lambda_{j-1,\nu-1}| + \frac{\nu-1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu-1} j! |\lambda_{j,\nu-1}| \\
&= \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{j+1}{\nu} j! |\lambda_{j,\nu-1}| + \frac{\nu-1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu-1} j! |\lambda_{j,\nu-1}| \\
&\leq \frac{2\nu-1}{\nu} \sum_{j=0}^{\nu-1} j! |\lambda_{j,\nu-1}| \\
&< 2 \sum_{j=0}^{\nu-1} j! |\lambda_{j,\nu-1}|.
\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence permet de conclure. $\square$

Lemme 2.8. Soient k et ν deux entiers naturels. Pour tout entier ℓ et tout entier u dans l'intervalle $0 \leq u \leq k$, on a

$$d_{\nu}^k \mathcal{F}_{\nu}^{(u)}(\ell) \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Nous renvoyons au lemme 4 (paragraphe 4) de [15] pour une démonstration de ce lemme (en observant que le polynôme $\mathcal{F}_{\nu}(z)$ est noté $\Delta(z, \nu, \nu)$ dans [15]). $\square$

2.3. Approximants de Hermite-Padé de type I de fonctions exponentielles

Nous allons d'abord définir la notion d'approximants de Hermite-Padé de fonctions analytiques, puis donner quelques propriétés des approximants de Hermite-Padé de fonctions exponentielles.

2.3.1. Définitions et propriétés

Définition 2.9. Soit m un entier naturel non nul. Soient $n_0, \dots, n_m$ des entiers positifs, $f_0, \dots, f_m$ des fonctions analytiques en 0. On appelle *système d'approximants de Padé* (ou *approximants de Hermite-Padé*) de type I pour les fonctions $f_0, \dots, f_m$ et les paramètres $n_0, \dots, n_m$, tout $(m+1)$ -uplet $(P_0, \dots, P_m)$ de polynômes non tous nuls tels que

$$\deg P_{\ell}(z) \leq n_{\ell} - 1 \quad \text{et} \quad \text{ord}_{z=0} \left(\sum_{\ell=0}^m P_{\ell}(z) f_{\ell}(z) \right) \geq \sigma - 1,$$

avec $\sigma = \sum_{\ell=0}^m n_{\ell}$.

Hermite (voir [7], [8] et [12]) a donné les formules suivantes pour les approximants de Hermite-Padé de type I pour les fonctions $e^{x_0 z}, \dots, e^{x_m z}$ et les paramètres $n_0, \dots, n_m$.

Lemme 2.10. Soient C_0 et C_{∞} deux cercles, le premier centré en 0 et de rayon strictement inférieur à la plus petite distance séparant deux x_j , et le second centré en 0

contenant tous les points $x_0, \dots, x_m$. Soient

$$P_\ell(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{z\zeta}}{\prod_{j=0}^m (\zeta + x_\ell - x_j)^{n_j}} d\zeta$$

et

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{z\zeta}}{\prod_{j=0}^m (\zeta - x_j)^{n_j}} d\zeta.$$

Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (a) $P_0, \dots, P_m$ sont des polynômes de degré $n_\ell - 1$,
- (b) $R(z) = \sum_{\ell=0}^m P_\ell(z) e^{x_\ell z}$,
- (c) $\text{ord}_{z=0}(R(z)) \geq \sigma - 1$ où $\sigma = \sum_{\ell=0}^m n_\ell$.

De plus, les polynômes $P_0, \dots, P_m$ sont des approximants de Hermite-Padé de type I pour les fonctions $e^{x_0 z}, \dots, e^{x_m z}$ et les paramètres $n_0, \dots, n_m$.

Définition 2.11. Pour $0 \leq \ell \leq m$ et $0 \leq k \leq n_\ell - 1$, nous définissons $\Lambda(\ell, k)$ (qui dépend de $n_0, \dots, n_m$) comme l'ensemble des multi-indices entiers

$$\gamma = (\gamma_p)_{\substack{0 \leq p \leq m \\ p \neq \ell}} \in \mathbb{Z}^m,$$

avec $\gamma_p \geq 0$ pour p compris entre 0 et m , $p \neq \ell$, tels que

$$\sum_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^m \gamma_p = n_\ell - k - 1.$$

Sous les hypothèses du lemme 2.10, comme chaque $P_\ell(z)$ est un polynôme de degré $n_\ell - 1$, notons

$$p_{\ell, k} = P_\ell^{(k)}(0),$$

où $0 \leq k \leq n_\ell - 1$, $0 \leq \ell \leq m$, les dérivées à l'origine des polynômes P_ℓ . On a donc le développement

$$P_\ell(z) = \sum_{k=0}^{n_\ell-1} p_{\ell, k} \frac{z^k}{k!}.$$

Lemme 2.12. On a

$$p_{\ell, k} = \sum_{\gamma \in \Lambda(\ell, k)} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^m \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(x_\ell - x_p)^{\gamma_p + n_p}} \binom{\gamma_p + n_p - 1}{n_p - 1} \right).$$

En particulier, le coefficient dominant $\frac{1}{(n_\ell - 1)!} p_{\ell, n_\ell - 1}$ du polynôme $P_\ell(z)$ est

$$\frac{1}{(n_\ell - 1)!} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^m \frac{1}{(x_\ell - x_p)^{n_p}}.$$

Démonstration. Nous allons utiliser les formules intégrales du lemme 2.10. En développant $e^{z\zeta}$ en série entière, on a

$$e^{z\zeta} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(z\zeta)^j}{j!}$$

et cette série converge normalement pour ζ décrivant C_0 . Du lemme 2.10 on déduit

$$P_\ell(z) = \sum_{k=0}^{n_\ell-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f_{\ell,k}(\zeta) d\zeta \right) \frac{z^k}{k!},$$

où

$$f_{\ell,k}(\zeta) = \frac{\zeta^{k-n_\ell}}{\prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^m (\zeta + x_\ell - x_p)^{n_p}}.$$

En utilisant l'expression précédente des $P_\ell(z)$, on obtient

$$(7) \quad p_{\ell,k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f_{\ell,k}(\zeta) d\zeta.$$

Les pôles éventuels de la fonction $f_{\ell,k}$ sont en 0 et en $x_p - x_\ell$ ($p = 0, \dots, m$ et $p \neq \ell$); seul le point 0 se trouve à l'intérieur du cercle C_0 . Nous allons étudier le développement de cette fonction $f_{\ell,k}$ au voisinage de 0, afin d'en déterminer le résidu.

En dérivant j fois la série géométrique, on obtient la formule

$$\frac{j!}{(1+x)^{j+1}} = \sum_{n \geq j} n(n-1) \cdots (n-j+1) (-x)^{n-j}$$

qui fournit l'égalité

$$\frac{1}{(\zeta + x_\ell - x_p)^{n_p}} = \frac{1}{(n_p - 1)!} \sum_{n \geq n_p - 1} \frac{(-1)^{n-n_p+1}}{(x_\ell - x_p)^{n+1}} \frac{n!}{(n - n_p + 1)!} \zeta^{n-n_p+1}.$$

Par un simple changement d'indices, on trouve

$$\frac{1}{(\zeta + x_\ell - x_p)^{n_p}} = \frac{1}{(n_p - 1)!} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(x_\ell - x_p)^{n+n_p}} \frac{(n + n_p - 1)!}{n!} \zeta^n.$$

Le produit de telles expressions donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^m (\zeta + x_\ell - x_p)^{n_p}} &= \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^m \left(\frac{1}{(n_p - 1)!} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(x_\ell - x_p)^{n+n_p}} \frac{(n + n_p - 1)!}{n!} \zeta^n \right) \\ &= \left(\prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^m \frac{1}{(n_p - 1)!} \right) \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^m \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(n + n_p - 1)!}{(x_\ell - x_p)^{n+n_p}} \zeta^n \right). \end{aligned}$$

Le coefficient du monôme $\zeta^{n_\ell - k - 1}$ dans le développement de

$$\prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^m (\zeta + x_\ell - x_p)^{-n_p},$$

qui permettra d'obtenir le résidu cherché, vaut

$$\begin{aligned} \left(\prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^m \frac{1}{(n_p - 1)!} \right) \sum_{\Lambda(\ell, k)} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^m \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(x_\ell - x_p)^{\gamma_p + n_p}} \frac{(\gamma_p + n_p - 1)!}{\gamma_p!} \right) \\ = \sum_{\Lambda(\ell, k)} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^m \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(x_\ell - x_p)^{\gamma_p + n_p}} \binom{\gamma_p + n_p - 1}{n_p - 1} \right). \end{aligned}$$

D'après le théorème des résidus, on en déduit

$$p_{\ell, k} = \sum_{\Lambda(\ell, k)} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^m \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(x_\ell - x_p)^{\gamma_p + n_p}} \binom{\gamma_p + n_p - 1}{n_p - 1} \right),$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

2.3.2. Déterminant de Vandermonde généralisé

Définition 2.13. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Quand m est un entier naturel, $n_0, \dots, n_m$ des entiers strictement positifs et $x_0, \dots, x_m$ des éléments de $\mathbb{K}$, on appelle *déterminant de Vandermonde généralisé* le déterminant

$$\Delta = |B_0 \dots B_m|,$$

où, pour $0 \leq \ell \leq m$, B_ℓ désigne la matrice à $\sigma = \sum_{i=0}^m n_i$ lignes et n_ℓ colonnes définie par

$$B_\ell = (b_{\ell; k, s})_{\substack{0 \leq s \leq \sigma - 1 \\ 0 \leq k \leq n_\ell - 1}} = \left(\frac{1}{k!} \left(\frac{d}{dX} \right)^k (X^s)(x_\ell) \right)_{\substack{0 \leq s \leq \sigma - 1 \\ 0 \leq k \leq n_\ell - 1}}.$$

On remarque que

$$\frac{1}{k!} \left(\frac{d}{dX} \right)^k (X^s)(x_\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > s, \\ \binom{s}{k} x_\ell^{s-k} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les déterminants de Vandermonde généralisés vont jouer un rôle important par la suite. Le lemme suivant permettra de montrer que le rang de la matrice $\mathcal{M}_0$ est égal à $S - 1$.

Lemme 2.14. *Soit Δ un déterminant de Vandermonde généralisé. On a*

$$\Delta = \prod_{0 \leq k < \ell \leq m} (x_\ell - x_k)^{n_\ell n_k}.$$

Démonstration. Voir [4]. □

2.4. Hauteurs de matrices

Nous suivons ici le texte de F. Gramain [6]. On y trouve plusieurs identités concernant certains déterminants, utiles en théorie des nombres transcendants, ainsi que la notion de « hauteur de matrice » dont nous rappelons la définition.

Définition 2.15. Soient m, n, d trois entiers strictement positifs. Soit M une matrice à m lignes et n colonnes, à coefficients dans le corps de nombres $\mathbb{K}$ de degré d sur $\mathbb{Q}$, de rang $m \leq n$. On définit ses *valeurs absolues locales* de la façon suivante :

(a) si v est une place ultramétrique,

$$|M|_v = \max_I |\Delta_I|_v,$$

où le maximum porte sur toutes les parties I à m éléments de $\{1, \dots, n\}$, et où Δ_I est le déterminant $m \times m$ extrait de M dont les colonnes sont les éléments de I ;

(b) si v est une place archimédienne réelle,

$$|M|_v = |\det(M {}^tM)|_v^{1/2},$$

où ${}^tM$ est la matrice transposée de la matrice M ;

(c) si v est une place archimédienne complexe,

$$|M|_v = |\det(MM^*)|_v^{1/2},$$

où M^* est la matrice adjointe de la matrice M .

La *hauteur de la matrice* M est définie par

$$H(M) = \prod_{v \in M_{\mathbb{K}}} |M|_v^{d_v/d}.$$

Pour une matrice carrée régulière, on a $H({}^tM) = H(M) = 1$, d'après la formule du produit. Cela permet, pour une matrice M dont le rang est égal au nombre de colonnes, de définir

$$H(M) = H({}^tM).$$

Lemme 2.16. *Pour toute place archimédienne, on a*

$$|M|_v = \left(\sum_I |\Delta_I|_v^2 \right)^{1/2}.$$

Démonstration. Ceci provient essentiellement de la formule de Cauchy-Binet (voir [6] ou [16] par exemple). $\square$

On désignera par $M^\perp$ toute *matrice orthogonale* à M , c'est-à-dire toute matrice à $n - m$ lignes et n colonnes dont les lignes forment une $\mathbb{K}$ -base de l'orthogonal du sous-espace de $\mathbb{K}^n$ engendré par les lignes de M .

Lemme 2.17. *Pour toute matrice $M^\perp$ orthogonale à M , on a*

$$H(M^\perp) = H(M).$$

Démonstration. Voir [17]. $\square$

Le lien entre la hauteur de la matrice $\mathcal{M}_0$ et celle de son orthogonal sera utile. Les composantes de cette matrice $\mathcal{M}_0^\perp$ sont les coefficients des polynômes de Hermite-Padé. Cela permettra de ramener la majoration de hauteurs de matrices à celle de hauteurs de polynômes.

2.4.1. Estimations préliminaires de $H(\mathcal{M}_0)$

Lemme 2.18. (a) *Pour tout nombre réel $x > 1$, on a*

$$\sqrt{2\pi(x-1)} \left(\frac{x-1}{e} \right)^{x-1} < \Gamma(x) < \sqrt{2\pi(x-1)} \left(\frac{x-1}{e} \right)^{x-1} e^{1/(12(x-1))}.$$

(b) *Pour tout entier naturel n , et tout entier k dans l'intervalle $0 \leq k \leq n$, on a*

$$(8) \quad \binom{n}{k} < 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi(n+1/2)}} \quad \text{et} \quad \binom{n}{k} \leq 2^n \sqrt{\frac{1}{n+1}}.$$

Pour $n \geq 1$, et tout entier k dans l'intervalle $0 \leq k \leq n$, on a

$$(9) \quad \binom{n}{k} \leq 2^n \sqrt{\frac{3}{4(n+1)}}.$$

Démonstration. L'encadrement de $\Gamma(x)$ à l'énoncé (a) résulte de la formule de Stirling ; voir [1, equation 6.1.38].

Pour ce qui est de (b), afin de démontrer la première inégalité, on utilise la majoration du théorème 1.1 de [10] appliquée avec $\alpha = 1/2$: pour tout entier n strictement positif, on a

$$\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)n!} < \frac{1}{\Gamma(1/2)\sqrt{n+1/4}}.$$

Pour n pair, on a

$$\max_k \binom{n}{k} = \binom{n}{n/2} = 2^n \frac{\Gamma(n/2+1/2)}{\Gamma(1/2)(n/2)!}.$$

L'inégalité annoncée résulte de la relation $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Pour n impair, la valeur maximale de $\binom{n}{k}$ est atteinte pour $k = (n+1)/2$, et on a

$$2 \binom{n}{(n+1)/2} = \binom{n+1}{(n+1)/2} < 2^{n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi(n+1+1/2)}}.$$

Par conséquent l'inégalité annoncée est encore vraie pour n impair. La seconde inégalité résulte de la première pour $n \geq 1$, et un rapide calcul montre que cette estimation reste valable pour $n = 0$.

Finalement, pour $n \geq (16 - 3\pi)/(6\pi - 16) = 2.307 \dots$, on a

$$\sqrt{\frac{2}{\pi(n+1/2)}} \leq \sqrt{\frac{3}{4(n+1)}}.$$

Donc la dernière inégalité résulte de la première pour $n \geq 3$, et un calcul montre que cette dernière estimation reste valable pour $n = 1, 2$. $\square$

Lemme 2.19. (a) Supposons que $m = L - 1$ et que $n_0 = \dots = n_{L-1} = K$, où K et L désignent des entiers avec $K \geq 1$ et $L \geq 2$. Pour tout entier $0 \leq k \leq K - 1$ et $0 \leq \ell \leq L - 1$, le cardinal de $\Lambda(\ell, k)$ est

$$\binom{K - k - 1 + L - 2}{L - 2}.$$

(b) Pour $K \geq 1$ et $L \geq 2$, on a

$$|\Lambda(\ell, k)| \leq 2^{K+L-3} \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

Démonstration. L'énoncé (a) coïncide avec le lemme 3.7.3 de [3].

Pour ce qui est de (b), pour $L = 2$, on a $|\Lambda(k, \ell)| = 1$, alors que

$$2^{K+2-3} \sqrt{2/2} = 2^{K-1} \geq 1$$

pour $K \geq 1$. Ainsi, pour terminer cette démonstration, on peut supposer $L \geq 3$.

Comme, pour y fixé positif, $\binom{x}{y}$ est croissant en $x \geq 0$, et comme

$$0 \leq K - k - 1 + L - 2 \leq K + L - 3,$$

en appliquant la première inégalité du lemme 2.18b, on obtient

$$\binom{K - k - 1 + L - 2}{L - 2} \leq \binom{K + L - 3}{L - 2} < 2^{K+L-3} \sqrt{\frac{2}{\pi(K + L - 3 + 1/2)}}.$$

Pour $K \geq 1$ et $L > 2$, on a $\pi(K + L - 5/2) \geq \pi(L - 3/2) \geq L$. Cela complète la démonstration du lemme 2.19. $\square$

Lemme 2.20. Fixons deux entiers strictement positifs b et n . Quand $a_1, \dots, a_n$ et A sont des nombres réels positifs, on pose

$$F(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{(b!)^n} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^b (a_i + j)$$

et

$$g(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \dots + a_n - A.$$

Alors, pour $A > 0$, la valeur maximale de F sur le domaine défini par l'égalité $g(a_1, \dots, a_n) = 0$ est atteinte pour $a_1 = \dots = a_n = A/n$. De plus, ce maximum est une fonction croissante de A .

Démonstration. Posons

$$f(a_1, \dots, a_n) = \log(a_1 + 1) + \dots + \log(a_1 + b) \\ + \dots + \log(a_n + 1) + \dots + \log(a_n + b),$$

de sorte que

$$f(a_1, \dots, a_n) = \log((b!)^n F(a_1, \dots, a_n)).$$

Comme b est fixé, il suffit de considérer f . On applique la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour trouver les valeurs extrémales de f . On a

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{1}{a_1 + 1} + \dots + \frac{1}{a_1 + b}, \dots, \frac{1}{a_n + 1} + \dots + \frac{1}{a_n + b} \right)$$

et

$$\nabla g(a_1, \dots, a_n) = (1, \dots, 1).$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange nous conduit à résoudre le système d'équations

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) = \lambda \nabla g(a_1, \dots, a_n)$$

avec la condition $g(a_1, \dots, a_n) = 0$. Ceci nous conduit au système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{1}{a_1 + 1} + \dots + \frac{1}{a_1 + b} & = & \lambda, \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n + 1} + \dots + \frac{1}{a_n + b} & = & \lambda, \\ a_1 + \dots + a_n - A & = & 0, \end{array} \right.$$

en les inconnues $a_1, \dots, a_n, \lambda$.

La fonction $x \mapsto \sum_{i=1}^b (x + i)^{-1}$ est strictement décroissante pour $x \geq 0$. Donc les n premières équations sont satisfaites si et seulement si $a_1 = \dots = a_n$. Si a est cette valeur commune, la dernière équation donne $na = A$, c'est-à-dire $a = A/n$. Le maximum

$$f(a, \dots, a) = n \sum_{j=1}^b \log\left(\frac{A}{n} + j\right)$$

est clairement une fonction croissante de A . D'où le lemme 2.20. $\square$

Lemme 2.21. Soient K et L deux entiers strictement positifs. Pour tous $0 \leq k \leq K - 1$ et $0 \leq \ell \leq L - 1$, soit $\gamma = (\gamma_p)_{\substack{0 \leq p \leq L-1 \\ p \neq \ell}}$ un élément de $\mathbb{Z}^{L-1}$

satisfaisant

$$\sum_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^{L-1} \gamma_p = K - k - 1$$

avec $\gamma_p \geq 0$ pour tout $0 \leq p \leq L - 1, p \neq \ell$. Alors

$$\prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^{L-1} \binom{\gamma_p + K - 1}{K - 1} \leq (e \min(K, L))^{K-1}.$$

Démonstration. Si $K = 1$, alors

$$\prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^{L-1} \binom{\gamma_p + K - 1}{K - 1} = \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^{L-1} \binom{\gamma_p}{0} = 1 = (e \min(K, L))^{K-1},$$

comme annoncé. Si $L = 1$, on a

$$\prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^{L-1} \binom{\gamma_p + K - 1}{K - 1} = 1 \leq (e \min(K, L))^{K-1},$$

pour tout entier strictement positif K , comme voulu.

Pour la suite de cette démonstration, on peut donc supposer que K et L sont supérieurs ou égaux à 2. On applique le lemme 2.20 avec $A = K - k - 1$, $b = K - 1$ et $n = L - 1$. Comme le maximum est une fonction croissante en A , et comme $k \geq 0$, on remplace A par $K - 1$ et on obtient

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^{L-1} \binom{\gamma_p + K - 1}{K - 1} &\leq \left(\frac{1}{(K - 1)!} \prod_{i=1}^{K-1} \left(\frac{K - 1}{L - 1} + i \right) \right)^{L-1} \\ &= \left(\frac{\Gamma\left(\frac{K - 1}{L - 1} + K\right)}{\Gamma(K)\Gamma\left(\frac{K - 1}{L - 1} + 1\right)} \right)^{L-1}. \end{aligned}$$

On suppose dans un premier temps $L \leq K$. Les inégalités $2 \leq L \leq K$ permettent d'appliquer le lemme 2.18a pour obtenir les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \Gamma\left(\frac{K-1}{L-1} + K\right) < \sqrt{\frac{2\pi(K-1)L}{L-1}} \left(\frac{(K-1)L}{e(L-1)}\right)^{(K-1)L/(L-1)} e^{1/12}, \\ \sqrt{2\pi(K-1)} \left(\frac{K-1}{e}\right)^{(K-1)} < \Gamma(K), \\ \sqrt{\frac{2\pi(K-1)}{L-1}} \left(\frac{K-1}{e(L-1)}\right)^{(K-1)/(L-1)} < \Gamma\left(\frac{K-1}{L-1} + 1\right). \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{K-1}{L-1} + K\right)}{\Gamma(K)\Gamma\left(\frac{K-1}{L-1} + 1\right)} < \sqrt{\frac{L}{2\pi(K-1)}} e^{1/12} \frac{L^{L(K-1)/(L-1)}}{(L-1)^{K-1}}.$$

En utilisant l'inégalité

$$e^{1/12} \sqrt{\frac{L}{2\pi(K-1)}} \leq e^{1/12} \sqrt{\frac{K}{2\pi(K-1)}} < 1$$

et l'inégalité $(1 + 1/x)^x < e$ pour tout nombre réel $x > 0$, on obtient

$$\left(\frac{\Gamma\left(\frac{K-1}{L-1} + K\right)}{\Gamma(K)\Gamma\left(\frac{K-1}{L-1} + 1\right)} \right)^{L-1} < L^{K-1} \left[\left(1 + \frac{1}{L-1}\right)^{L-1} \right]^{K-1} < (eL)^{K-1}.$$

Ceci démontre le lemme 2.21 dans le cas $L \leq K$.

Supposons maintenant $L > K$. Dans ce cas, au moins $L - K$ nombres réels parmi les γ_p doivent être nuls. Ceux-ci peuvent être ignorés et on peut supposer $L = K$, cas pour lequel on vient de montrer que l'inégalité du lemme 2.21 est valable. $\square$

2.4.2. Une majoration pour $H(\mathcal{M}_0)$

On reprend les notations de la première section et on utilise la matrice introduite à cette occasion. Nous allons établir une majoration pour la hauteur de la matrice $\mathcal{M}_0$, dont la précision provient du lemme de dualité 2.17. Cette estimation jouera un rôle important dans la démonstration du théorème principal.

Lemme 2.22. Soient K et L des entiers strictement positifs avec $L \geq 2$. On peut choisir pour matrice orthogonale à $\mathcal{M}_0$ la matrice uniligne

$$\mathcal{M}_0^\perp = \left(\frac{p_{\ell,k}}{k!} \right)_{(k,\ell)},$$

où (k, ℓ) décrit le carré $0 \leq k \leq K-1, 0 \leq \ell \leq L-1$.

Démonstration. La matrice $\mathcal{M}_0$ est de taille $(S-1) \times S$, où $S = KL$. La matrice obtenue en divisant par $k!$ chaque colonne de $\mathcal{M}_0$ indexée en (k, ℓ) , coïncide avec la matrice obtenue en remplaçant la dernière ligne de la matrice de Vandermonde généralisée avec $m = L-1, n_\ell = K$ et $x_\ell = \ell$ pour $\ell = 0, \dots, L-1$. Cette matrice a pour rang $S-1$; en effet, la matrice de Vandermonde généralisée a un déterminant non nul, elle est donc de rang S . Par conséquent $\mathcal{M}_0^\perp$ est un vecteur. Les composantes de ce vecteur $\mathcal{M}_0^\perp$ sont les nombres $x_{\ell,k}$ tels que, pour $s = 0, \dots, S-2$,

$$(10) \quad \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{K-1} x_{\ell,k} \left(\frac{d}{dz} \right)^s \left(z^k e^{\ell z} \right) (0) = s! \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{\min(s, K-1)} x_{\ell,k} \frac{\ell^{s-k}}{(s-k)!} = 0.$$

Nous utiliserons les approximants de Hermite-Padé pour de grandes valeurs de L avec $m = L - 1$. Pour $0 \leq \ell \leq L - 1$, considérons le polynôme

$$P_\ell(z) = \sum_{k=0}^{\min(s, K-1)} x_{\ell, k} z^k.$$

On a

$$n_\ell = \deg(P_\ell(z)) + 1 = \min(s + 1, K).$$

La somme

$$\sum_{k=0}^{\min(s, K-1)} x_{\ell, k} \binom{s}{k} \ell^{s-k}$$

est égale à $s!$ fois le coefficient de z^s dans le développement de $P_\ell(z) \cdot e^{\ell z}$ en $z = 0$. D'après (10), ce coefficient est nul pour $s = 0, \dots, S - 2$ et ainsi,

$$\text{ord}_{z=0} (P_\ell(z) \cdot e^{\ell z}) \geq S - 1.$$

Notons que

$$\sigma = \sum_{\ell=0}^m n_\ell \leq KL = S,$$

d'où $S - 1 \geq \sigma - 1$.

Par conséquent les $x_{\ell, k}$ sont précisément les coefficients $p_{\ell, k}/k!$ des approximants de Hermite-Padé, pour les fonctions $1, e^z, \dots, e^{(L-1)z}$ et pour les paramètres $n_0 = \dots = n_{L-1} = K$, déterminés lors de la section précédente. On utilise le lemme 2.12 avec $m = L - 1$, $n_0 = \dots = n_{L-1} = K$ et $x_\ell = \ell$ ($0 \leq \ell \leq L - 1$). On trouve

$$p_{\ell, k} = \sum_{\substack{\Lambda(\ell, k) \\ p=0 \\ p \neq \ell}}^{L-1} \prod \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(\ell - p)^{\gamma_p + K}} \binom{\gamma_p + K - 1}{K - 1} \right),$$

où $\Lambda(\ell, k)$ a été défini dans la deuxième section. □

Proposition 2.23. Pour $K \geq 1$ et $L \geq 2$, on a

$$H(\mathcal{M}_0) \leq \frac{\sqrt{6}}{16L} 2^{KL+L} D_{K-1, L-1} \left(\frac{\sqrt{3} e d_{L-1} \min(K, L)}{2\sqrt{L}} \right)^{K-1}.$$

Démonstration. Pour $L \geq 2$, en vertu des lemmes 2.17 et 2.22, nous avons

$$H(\mathcal{M}_0) = H(\mathcal{M}_0^\perp) = H\left(\left(\frac{1}{k!} p_{\ell, k}\right)_{k, \ell}\right).$$

La hauteur d'une matrice ne change pas si on multiplie tous ses coefficients par un même nombre non nul. On choisit le multiplicateur

$$\rho = d_{L-1}^{K-1} (L-1)!^K D_{K-1, L-1}$$

et, pour tous $0 \leq k \leq K-1$ et $0 \leq \ell \leq L-1$, on considère les nombres

$$y_{\ell,k} = \rho \frac{p_{\ell,k}}{k!} = \pm \frac{D_{K-1,L-1}}{k!} d_{L-1}^{K-1} \binom{L-1}{\ell}^K \sum_{\Lambda(\ell,k)} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^{L-1} \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(\ell-p)^{\gamma_p}} \binom{\gamma_p + K-1}{K-1} \right).$$

On observe que pour tout nombre premier $q \leq L-1$, on a $q^k \mid d_{L-1}^k$ et $v_q(k!) \leq k$. On en déduit $D_{K-1,L-1} d_{L-1}^k / k! \in \mathbb{Z}$. On utilise le fait que $\binom{\gamma_p + K-1}{K-1} \in \mathbb{Z}$. La condition $\sum_{p \neq \ell} \gamma_p = K-k-1$ implique

$$d_{L-1}^{K-k-1} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^{L-1} \frac{1}{(\ell-p)^{\gamma_p}} \in \mathbb{Z},$$

d'où $y_{\ell,k} \in \mathbb{Z}$. On obtient

$$\begin{aligned} H \left(\left(\frac{1}{k!} p_{\ell,k} \right)_{k,\ell} \right) &= H \left((y_{\ell,k})_{k,\ell} \right) = \prod_{v \in M_{\mathbb{Q}}} \max_{k,\ell} |y_{\ell,k}|_v \\ &= \max_{k,\ell} |y_{\ell,k}| \prod_{p \in \mathcal{P}} \max_{k,\ell} |y_{\ell,k}|_p \leq \max_{k,\ell} |y_{\ell,k}| \\ &\leq \max_{k,\ell} \left| \frac{D_{K-1,L-1}}{k!} d_{L-1}^{K-1} \binom{L-1}{\ell}^K \sum_{\Lambda(\ell,k)} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^{L-1} \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(\ell-p)^{\gamma_p}} \binom{\gamma_p + K-1}{K-1} \right) \right|. \end{aligned}$$

Des lemmes 2.21, 2.19b et de la dernière inégalité du lemme 2.18b, on déduit

$$\begin{aligned} &\left| \frac{D_{K-1,L-1}}{k!} d_{L-1}^{K-1} \binom{L-1}{\ell}^K \sum_{\Lambda(\ell,k)} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^{L-1} \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(\ell-p)^{\gamma_p}} \binom{\gamma_p + K-1}{K-1} \right) \right| \\ &\leq D_{K-1,L-1} d_{L-1}^{K-1} \binom{L-1}{\ell}^K |\Lambda(\ell,k)| (e \min(K, L))^{K-1} \\ &\leq D_{K-1,L-1} \left(e \min(K, L) d_{L-1} \binom{L-1}{\ell} \right)^{K-1} \binom{L-1}{\ell} \sqrt{\frac{2}{L}} 2^{K+L-3} \\ &< D_{K-1,L-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{L}} e \min(K, L) d_{L-1} \right)^{K-1} 2^{K(L-1)} \frac{\sqrt{6}}{2L} 2^{K+L-3} \\ &< D_{K-1,L-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{L}} e \min(K, L) d_{L-1} \right)^{K-1} 2^{KL+L} \frac{\sqrt{6}}{16L}, \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration de la proposition 2.23. $\square$

Remarque 2.24. Pour $K \geq 1$ et $L = 1$, on a $\mathcal{M}_0^\perp = (0, \dots, 0, 1)$ et $H(\mathcal{M}_0) = 1$.

2.5. Lemme de Schwarz

Le lemme ci-dessous fournit une majoration analytique du déterminant étudié.

Lemme 2.25 (Lemme de Schwarz). Soient T un entier positif, r et R deux nombres réels vérifiant $0 < r \leq R$ et ψ une fonction d'une variable complexe analytique dans le disque $|z| \leq R$. Supposons que ψ a un zéro de multiplicité au moins T en 0. Alors

$$|\psi|_r \leq \left(\frac{R}{r}\right)^{-T} |\psi|_R,$$

où $|\psi|_R = \max_{|z|=R} |\psi(z)|$.

Démonstration. Voir [18, lemme 2.4]. □

Voici une majoration du déterminant $\mathcal{D}$ (voir la définition 1.7) qui utilise les nombres $w_{k,\ell}$ de la définition 1.8.

Lemme 2.26. Soient K et L deux entiers strictement positifs avec $L \geq 2$, μ un entier supérieur ou égal à 0 et E un nombre réel supérieur ou égal à 1. Soit $\mathcal{N}$ un nombre réel strictement positif tel que

$$(11) \quad \max \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} |w_{k,\ell}|, \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} \left| \Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(z\beta) \right|_E \right\} \leq e^{\mathcal{N}}.$$

Supposons que le nombre $\epsilon = |\exp(\beta) - \alpha|$ vérifie

$$(12) \quad \epsilon < E^{-KL}.$$

Alors

$$\log |\mathcal{D}| \leq -(KL - \mu - 1) \log E + \mathcal{N} + \log |\mathcal{M}_0| + \log(2).$$

Démonstration. Considérons la fonction

$$\mathcal{D}(z) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(\beta z) + \epsilon w_{k,\ell} \right)_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \end{pmatrix},$$

de sorte que $\mathcal{D} = \mathcal{D}(1)$. Alors

$$(13) \quad \mathcal{D}(z) = \mathcal{D}_0(z) + \epsilon \mathcal{D}_1(z),$$

où

$$\mathcal{D}_0(z) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(\beta z) \right)_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{D}_1(z) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ (w_{k,\ell})_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^t \mathcal{D}_0(z) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\beta^t \Phi_{k,\ell}^{(\mu+t)}(\beta z) \right)_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \end{pmatrix}.$$

Supposons que $t + \mu \leq S - 2 = KL - 2$. Alors la ligne

$$\left(\beta^t \Phi_{k,\ell}^{(\mu+t)}(0 \cdot \beta) \right)_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}}$$

est égale à β^t fois la ligne dans $\mathcal{M}_0$ indexée par $t + \mu$. Donc, pour $0 \leq t < KL - 1 - \mu$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^t \mathcal{D}_0(0) = 0.$$

Par conséquent, le déterminant $\mathcal{D}_0(z)$ a un zéro à l'origine d'ordre supérieur ou égal à $KL - \mu - 1$.

Du lemme de Schwarz (lemme 2.25), on déduit, pour tout $E \geq 1$,

$$(14) \quad \log |\mathcal{D}_0(1)| \leq -(KL - \mu - 1) \log E + \log |\mathcal{D}_0(z)|_E.$$

Comme $\mathcal{D}_1(z)$ ne dépend pas de z , on peut écrire

$$\log |\mathcal{D}_1(1)| = \log |\mathcal{D}_1(z)|_E.$$

Étudions maintenant, pour $I = 0$ et $I = 1$, le terme $\log |\mathcal{D}_I(z)|_E$. En développant $\mathcal{D}_I(z)$ suivant la dernière ligne, on obtient

$$|\mathcal{D}_I(z)| \leq \begin{cases} \sum_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \left| \Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(\beta z) \right| |\Delta_{k,\ell}| & \text{si } I = 0, \\ \sum_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} |w_{k,\ell}| |\Delta_{k,\ell}| & \text{si } I = 1, \end{cases}$$

où $|\Delta_{k,\ell}|$ est le mineur de la matrice $\mathcal{M}_0$ dont la colonne d'indice (k, ℓ) a été ôtée. De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_I(z)|_E^2 &\leq \max \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} |w_{k,\ell}|^2, \sum_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \left| \Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(\beta z) \right|_E^2 \right) \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} |\Delta_{k,\ell}|^2 \right) \\ &\leq \max \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} |w_{k,\ell}|, \sum_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \left| \Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(\beta z) \right|_E \right)^2 \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} |\Delta_{k,\ell}|^2 \right). \end{aligned}$$

De plus, le lemme 2.16 donne

$$|\mathcal{M}_0|^2 = \sum_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} |\Delta_{k,\ell}|^2.$$

On en déduit, en utilisant l'hypothèse (11),

$$\log |\mathcal{D}_I(z)|_E \leq \log |\mathcal{M}_0| + \mathcal{N}.$$

En utilisant l'inégalité (14), on obtient

$$\log |\mathcal{D}_I(1)| \leq \begin{cases} -(KL - \mu - 1) \log E + \mathcal{N} + \log |\mathcal{M}_0| & \text{si } I = 0, \\ \mathcal{N} + \log |\mathcal{M}_0| & \text{si } I = 1. \end{cases}$$

De l'égalité (13), on déduit

$$|\mathcal{D}| = |\mathcal{D}(1)| \leq 2 \max \{|\mathcal{D}_0(1)|, \epsilon |\mathcal{D}_1(1)|\}.$$

Comme $E \geq 1$, en utilisant l'inégalité (12) on trouve

$$\log \epsilon \leq -KL \log E \leq -(KL - \mu - 1) \log E.$$

Par conséquent,

$$\log |\mathcal{D}| \leq -(KL - \mu - 1) \log E + \mathcal{N} + \log |\mathcal{M}_0| + \log(2).$$

Ceci démontre le lemme 2.26. □

3. Démonstration du théorème 1.1

Nous devons traiter le cas $\alpha = 0$ séparément : dans ce cas, nous ne pouvons pas utiliser notre lemme de zéros (proposition 2.1). Nous voulons minorer $|e^\beta|$. Notons que $|e^\beta| = |e^{\Re(\beta)}| \geq e^{-|\beta|}$. De (1), on en déduit que $KL \log(E) > |\beta|$, donc que $|e^\beta| > E^{-KL}$. Ainsi le théorème 1.1 est vrai pour $\alpha = 0$.

Nous supposons dans la suite $\alpha \neq 0$. Commençons par définir une nouvelle quantité, $\mathcal{G}_{\beta, \alpha}$, liée à $\mathcal{D}$.

3.1. Définition de $\mathcal{G}_{\beta, \alpha}$

Avec μ tel que défini dans la définition 2.5, on introduit l'opérateur de dérivation

$$\mathcal{F}_\mu(\delta) = \frac{\delta(\delta - 1) \cdots (\delta - \mu + 1)}{\mu!},$$

avec $\mathcal{F}_0(\delta) = 1$.

Considérons le polynôme en deux variables $\mathcal{G}_1(X, Y)$ défini par

$$(15) \quad \mathcal{G}_1(X, Y) = d_\mu^{K-1} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} |\mathcal{M}_0|_p \right) \mathcal{F}_\mu(\delta) (\mathcal{H}(X, Y)),$$

où $\mathcal{H}(X, Y)$ est donné par (6) et où on a posé par convention $d_\mu = 1$ quand $\mu = 0$.

Lemme 3.1. *Le polynôme $\mathcal{G}_1(X, Y)$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Alors*

$$\mathcal{G}_1(\beta, \alpha) = \frac{d_\mu^{K-1}}{\mu!} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} |\mathcal{M}_0|_p \right) F(\beta, \alpha),$$

où $F(X, Y)$ est tel que décrit dans la définition 1.7, et nous avons $\mathcal{G}_1(\beta, \alpha) \neq 0$.

Démonstration. Avec $0^0 = 1$, pour tout couple d'indices (k, ℓ) , on a

$$\delta^i(X^k Y^\ell) = \sum_{j=0}^{\min(i,k)} \binom{i}{j} \frac{k!}{(k-j)!} \ell^{i-j} X^{k-j} Y^\ell,$$

$$\delta^i(X^k) = \begin{cases} \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i} & \text{si } i \leq k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\mathcal{F}_\mu^{(j)}(\ell) = \sum_{i=j}^{\mu} \lambda_{i,\mu} \frac{i!}{(i-j)!} \ell^{i-j} = \sum_{i=j}^{\mu} \lambda_{i,\mu} (i-j+1) \cdots i \ell^{i-j}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\mu(\delta)(X^k Y^\ell) &= \sum_{i=0}^{\mu} \lambda_{i,\mu} \sum_{j=0}^{\min(i,k)} \binom{i}{j} \frac{k!}{(k-j)!} \ell^{i-j} X^{k-j} Y^\ell \\ &= \sum_{i=0}^{\mu} \lambda_{i,\mu} \sum_{j=0}^{\min(i,k)} \frac{i!}{(i-j)!} \binom{k}{j} \ell^{i-j} X^{k-j} Y^\ell \\ &= \sum_{i=0}^{\mu} \lambda_{i,\mu} \sum_{j=0}^{\min(i,k)} (i-j+1) \cdots i \binom{k}{j} \ell^{i-j} X^{k-j} Y^\ell \\ &= \sum_{i=0}^{\mu} \lambda_{i,\mu} \sum_{j=0}^k (i-j+1) \cdots i \binom{k}{j} \ell^{i-j} X^{k-j} Y^\ell \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \sum_{i=0}^{\mu} \lambda_{i,\mu} (i-j+1) \cdots i \ell^{i-j} X^{k-j} Y^\ell \\ &= Y^\ell \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\sum_{i=0}^{\mu} \lambda_{i,\mu} (i-j+1) \cdots i \ell^{i-j} \right) X^{k-j} \\ &= Y^\ell \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mathcal{F}_\mu^{(j)}(\ell) X^{k-j}. \end{aligned}$$

Grâce au lemme 2.8, on en déduit que $d_\mu^{K-1} \mathcal{F}_\mu(\delta)(X^k Y^\ell)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Comme

$$\mathcal{F}_\mu(\delta)(\mathcal{H}(X, Y)) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ (\mathcal{F}_\mu(\delta)(X^k Y^\ell))_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \end{pmatrix},$$

il résulte de la définition de $|\mathcal{M}_0|_p$ que les coefficients du polynôme $\mathcal{G}(X, Y)$ sont dans $\mathbb{Z}$.

En utilisant d'une part la définition de $\mathcal{H}$ et d'autre part le fait que le polynôme en deux variables

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ (\delta^j (X^k Y^\ell))_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \end{pmatrix}$$

s'annule au point (β, α) pour $0 \leq j < \mu$, on déduit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\mu(\delta)(\mathcal{H})(\beta, \alpha) &= \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ (\mathcal{F}_\mu(\delta)(X^k Y^\ell))_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \end{pmatrix} (\beta, \alpha) \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\frac{1}{\mu!} \delta^\mu (X^k Y^\ell) \right)_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \end{pmatrix} (\beta, \alpha) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\mu-1} \lambda_{j,\mu} \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ (\delta^j (X^k Y^\ell))_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \end{pmatrix} (\beta, \alpha) \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\frac{1}{\mu!} \delta^\mu (X^k Y^\ell) \right)_{\substack{0 \leq k \leq K-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1}} \end{pmatrix} (\beta, \alpha) \\ &= \frac{\delta^\mu}{\mu!} \mathcal{H}(\beta, \alpha) \\ &= \frac{1}{\mu!} F(\beta, \alpha). \end{aligned}$$

Ainsi, les deux polynômes $\frac{1}{\mu!} F(X, Y)$ et $\mathcal{F}_\mu(\delta)(\mathcal{H}(X, Y))$ prennent la même valeur au point (β, α) . En vertu de la définition 2.5, nous avons $\delta^\mu \mathcal{H}(\beta, \alpha) \neq 0$, et la preuve du lemme 3.1 est ainsi complète. $\square$

On définit

$$(16) \quad \mathcal{G}_2(X, Y) = \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} |\mathcal{M}_0|_p \right) \delta^\mu (\mathcal{H}(X, Y)).$$

Puisque $F(X, Y) = \delta^\mu (\mathcal{H}(X, Y))$, on a $\mathcal{G}_2(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$ et

$$\mathcal{G}_2(\beta, \alpha) = \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} |\mathcal{M}_0|_p \right) F(\beta, \alpha).$$

Finalement, on définit

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathcal{G}_{\beta, \alpha} &= \min(|\mathcal{G}_1(\beta, \alpha)|, |\mathcal{G}_2(\beta, \alpha)|) \\ &= \min \left(1, \frac{d_\mu^{K-1}}{\mu!} \right) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} |\mathcal{M}_0|_p \right) |F(\beta, \alpha)|. \end{aligned}$$

3.2. Minoration de $\mathcal{G}_{\beta,\alpha}$

Définition 3.2. Soit $f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$ un polynôme à coefficients complexes. On définit la *longueur* $L(f)$ de f comme la somme des valeurs absolues de ses coefficients, à savoir

$$L(f) = \sum_{i_1, \dots, i_n} |a_{i_1, \dots, i_n}|.$$

Pour minorer $\mathcal{G}_{\beta,\alpha}$, on utilisera l'estimation suivante de la longueur de $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$.

Lemme 3.3. (a) La longueur du polynôme $\mathcal{G}_1$ est majorée comme suit :

$$L(\mathcal{G}_1) \leq d_\mu^{K-1} H(\mathcal{M}_0) 2^{\mu+K-1} e^{L-1} \sqrt{L}.$$

(b) La longueur du polynôme $\mathcal{G}_2$ est majorée comme suit :

$$L(\mathcal{G}_2) \leq \mu! H(\mathcal{M}_0) 2^{\mu+K-1} e^{L-1} \sqrt{L}.$$

Démonstration. Pour (a), on commence en majorant $L(\mathcal{F}_\mu(\delta)(\mathcal{H}(X, Y)))$. Soit $\mathcal{M}_{0,k,\ell}$ la matrice obtenue à partir de $\mathcal{M}_0$ en supprimant la colonne d'indice (k, ℓ) . En utilisant la majoration $L(f \pm g) \leq L(f) + L(g)$ et en développant le déterminant $\mathcal{F}_\mu(\delta)(\mathcal{H}(X, Y))$ suivant la dernière ligne, on obtient

$$\begin{aligned} L(\mathcal{F}_\mu(\delta)(\mathcal{H}(X, Y))) &\leq \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} L\left(\mathcal{F}_\mu(\delta)\left(X^k Y^\ell\right) \det(\mathcal{M}_{0,k,\ell})\right) \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} L\left(\left(\sum_{j=0}^{\mu} \lambda_{j,\mu} \delta^j\left(X^k Y^\ell\right)\right) \det(\mathcal{M}_{0,k,\ell})\right) \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} L\left(\left(\sum_{j=0}^{\mu} \lambda_{j,\mu} \sum_{h=0}^{\min(j,k)} \binom{j}{h} \frac{k!}{(k-h)!} \ell^{j-h} X^{k-h} Y^\ell\right) \det(\mathcal{M}_{0,k,\ell})\right) \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} |\det(\mathcal{M}_{0,k,\ell})| \cdot \sum_{j=0}^{\mu} \sum_{h=0}^{\min(j,k)} |\lambda_{j,\mu}| \binom{j}{h} \frac{k!}{(k-h)!} \ell^{j-h}. \end{aligned}$$

En utilisant, de plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} L(\mathcal{F}_\mu(\delta)(\mathcal{H}(X, Y))) &\leq \left(\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} |\det(\mathcal{M}_{0,k,\ell})|^2\right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} \left(\sum_{j=0}^{\mu} \sum_{h=0}^{\min(j,k)} |\lambda_{j,\mu}| \binom{j}{h} \frac{k!}{(k-h)!} \ell^{j-h}\right)^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On majore $\binom{K-1}{h}$ par $\frac{2^{K-1}}{\sqrt{K}}$, grâce à la seconde inégalité du lemme 2.18b, et

$$\sum_{h=0}^{\min(j,k)} \frac{(L-1)^{j-h}}{(j-h)!} \text{ par } e^{L-1}, \text{ puis on utilise le lemme 2.7 et le lemme 2.16 afin de}$$

conclure de la façon suivante :

$$\begin{aligned} L(\mathcal{F}_\mu(\delta)(\mathcal{H}(X, Y))) &\leq |\mathcal{M}_0| \sqrt{KL} \sum_{j=0}^{\mu} \sum_{h=0}^{\min(j, k)} |\lambda_{j, \mu}| j! \binom{K-1}{h} \frac{(L-1)^{j-h}}{(j-h)!} \\ &\leq |\mathcal{M}_0| \sqrt{L} \sum_{j=0}^{\mu} |\lambda_{j, \mu}| j! 2^{K-1} e^{L-1} \\ &\leq |\mathcal{M}_0| 2^{\mu+K-1} e^{L-1} \sqrt{L}. \end{aligned}$$

La définition (15) de $\mathcal{G}_1(X, Y)$ termine la démonstration de (a).

Dans le cas de l'énoncé (b), on procède de façon similaire : on développe tout d'abord le déterminant $\delta^\mu(\mathcal{H}(X, Y))$ suivant la dernière ligne, puis on développe $\delta^\mu(X^k Y^\ell)$ et enfin on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$\begin{aligned} L(\delta^\mu(\mathcal{H}(X, Y))) &\leq \left(\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} |\det(\mathcal{M}_{0, k, \ell})|^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} \left(\sum_{h=0}^{\min(\mu, k)} \binom{\mu}{h} \frac{k!}{(k-h)!} \ell^{\mu-h} \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En utilisant les majorations

$$\binom{K-1}{h} \leq \frac{2^{K-1}}{\sqrt{K}} \quad \text{et} \quad \sum_{h=0}^{\min(\mu, k)} \frac{(L-1)^{\mu-h}}{(\mu-h)!} \leq e^{L-1}$$

et le lemme 2.16, on obtient

$$\begin{aligned} L(\delta^\mu(\mathcal{H}(X, Y))) &\leq |\mathcal{M}_0| \left(KL \left(\sum_{h=0}^{\min(\mu, k)} \mu! \binom{K-1}{h} \frac{(L-1)^{\mu-h}}{(\mu-h)!} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq |\mathcal{M}_0| \sqrt{L} \mu! 2^{K-1} e^{L-1}. \end{aligned}$$

On multiplie également le membre de droite de cette expression par 2^μ . La définition (16) de $\mathcal{G}_2(X, Y)$ permet de compléter cette démonstration du lemme 3.3. $\square$

Lemme 3.4 (Liouville). Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres algébriques. On pose $D = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \mathbb{Q}] / [\mathbb{R}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \mathbb{R}]$. Soit f un polynôme de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, de degré au plus N_i par rapport à la variable X_i , et qui ne s'annule pas au point $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Alors

$$\begin{aligned} \log |f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| &\geq -(D-1) \log L(f) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n N_i \log(\max(1, |\alpha_i|)) - D \sum_{i=1}^n N_i h(\alpha_i). \end{aligned}$$

Démonstration. Ceci est la généralisation de la version de l'inégalité de Liouville utilisée en [11, p. 298] appliquée avec l'inégalité $|f| \leq L(f)$. Voir aussi [5, § 1.7] et [18, prop. 3.14]. $\square$

Grâce à la proposition 2.23, on en déduit la minoration suivante de $\mathcal{G}_{\beta,\alpha}$.

Proposition 3.5. *Si $\alpha \neq 0$, on a*

$$\begin{aligned} \log \mathcal{G}_{\beta,\alpha} &\geq -(D-1) \log \left(\min(d_\mu^{K-1}, \mu!) H(\mathcal{M}_0) 2^{\mu+K-1} e^{L-1} \sqrt{L} \right) \\ &\quad - (K-1) \log(\mathcal{B}) - (L-1) \log(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Démonstration. Grâce aux lemmes 3.3 et 3.4, en utilisant les définitions de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$, on trouve

$$\begin{aligned} \log \mathcal{G}_{\beta,\alpha} &\geq -(D-1) \min(\log(L(\mathcal{G}_1)), \log(L(\mathcal{G}_2))) \\ &\quad + (K-1) \log(\max(1, |\beta|)) + (L-1) \log(\max(1, |\alpha|)) \\ &\quad - D(K-1)h(\beta) - D(L-1)h(\alpha) \\ &\geq -(D-1) \log \left(\min(d_\mu^{K-1}, \mu!) H(\mathcal{M}_0) 2^{\mu+K-1} e^{L-1} \sqrt{L} \right) \\ &\quad - (K-1) \log(\mathcal{B}) - (L-1) \log(\mathcal{A}). \quad \square \end{aligned}$$

3.3. Majoration de $\mathcal{G}_{\beta,\alpha}$

Pour vérifier les hypothèses du lemme 2.26, il faut connaître une valeur admissible du paramètre $\mathcal{N}$. Dans ce but, nous allons établir la majoration analytique que voici.

Lemme 3.6. *Soit E un nombre réel supérieur à 1. Soient K et L des nombres entiers strictement positifs avec $L \geq 2$. On pose*

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \max \left\{ E|\beta|L, \log(L-1) + (L-1) \log(e^{|\beta|} + \epsilon) \right\} \\ &\quad + \log((K-1)!) + (\mu+1) \log(L+1) + \log(2). \end{aligned}$$

Alors

$$\max \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} |\Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(z\beta)|_E, \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} |w_{k,\ell}| \right\} \leq e^{\mathcal{N}}.$$

Démonstration. On estime $|\Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(z\beta)|_E$. On a

$$\left| \sum_{j=0}^{\min(\mu,k)} \frac{k! z^{k-j}}{(k-j)!} \right| \leq k! e^{|z|}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^{\min(\mu,k)} \binom{\mu}{j} k! \ell^{\mu-j} \frac{z^{k-j}}{(k-j)!} \right| &\leq \left| \sum_{j=0}^{\min(\mu,k)} \binom{\mu}{j} \ell^{\mu-j} \right| \cdot \left| \sum_{j=0}^{\min(\mu,k)} \frac{k! z^{k-j}}{(k-j)!} \right| \\ &\leq (\ell+1)^\mu k! e^{|z|} \end{aligned}$$

et, d'après la définition de $\Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(z)$ à la section 1.2, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(z) \right| &= \left| \delta^\mu \left(X^k Y^\ell \right) (z, e^z) \right| \\ &= \left| e^{\ell z} \sum_{j=0}^{\min(\mu, k)} \binom{\mu}{j} \frac{k!}{(k-j)!} z^{k-j} \ell^{\mu-j} \right| \\ &\leq e^{\ell|z|} (\ell+1)^\mu k! e^{|z|}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|\Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(z\beta)|_E \leq e^{\ell|\beta z|} (\ell+1)^\mu k! e^{|\beta z|} \leq e^{(\ell+1)|\beta z|} (\ell+1)^\mu k!,$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} |\Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(z\beta)|_E &\leq e^{L|\beta E|} \sum_{k=0}^{K-1} k! \sum_{\ell=1}^L \ell^\mu \\ &< e^{L|\beta E|} \frac{(L+1)^{\mu+1}}{\mu+1} \sum_{k=0}^{K-1} k! \\ &< e^{L|\beta E|} \frac{(L+1)^{\mu+1}}{\mu+1} 2(K-1)!. \end{aligned}$$

Pour $\ell \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} |w_{k,\ell}| &= \left| \frac{\alpha^\ell - e^{\beta\ell}}{e^\beta - \alpha} \sum_{j=0}^{\min(\mu, k)} \binom{\mu}{j} \frac{k! \ell^{\mu-j}}{(k-j)!} \beta^{k-j} \right| \\ &\leq \left| \frac{\alpha^\ell - e^{\beta\ell}}{e^\beta - \alpha} \right| e^{|\beta|} k! (\ell+1)^\mu \\ &\leq \ell \max(\alpha, e^{|\beta|})^{\ell-1} e^{|\beta|} k! (\ell+1)^\mu \\ &\leq \ell (e^{|\beta|} + \epsilon)^\ell k! (\ell+1)^\mu. \end{aligned}$$

Ainsi, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} |w_{k,\ell}| &\leq (L-1)(e^{|\beta|} + \epsilon)^{L-1} \sum_{k=0}^{K-1} k! \sum_{\ell=1}^L \ell^\mu \\ &< (L-1)(e^{|\beta|} + \epsilon)^{L-1} \frac{(L+1)^{\mu+1}}{\mu+1} \sum_{k=0}^{K-1} k! \\ &< (L-1)(e^{|\beta|} + \epsilon)^{L-1} \frac{(L+1)^{\mu+1}}{\mu+1} 2(K-1)!, \end{aligned}$$

d'où le lemme 3.6. □

Ainsi, sous les hypothèses du lemme 2.26, on obtient la proposition suivante.

Proposition 3.7. Soient $E > 1$ un nombre réel, K et L deux entiers strictement positifs avec $L \geq 2$. On suppose $\epsilon < E^{-KL}$. On a

$$\begin{aligned} \log \mathcal{G}_{\beta, \alpha} &\leq -(KL - \mu - 1) \log(E) + \log(4) + \log((K - 1)!) \\ &\quad + \max \left\{ E|\beta|L, \log(L) + L \log(e^{|\beta|} + \epsilon) \right\} + (\mu + 1) \log(L + 1) \\ &\quad + \log(\min(d_{\mu}^{K-1}, \mu!)) + \log(H(\mathcal{M}_0)) - \log(\mu!). \end{aligned}$$

Démonstration. La proposition 3.7 est une conséquence des lemmes 2.26 et 3.6 et de la relation entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}_{\beta, \alpha}$ donnée par (17). $\square$

3.4. Fin de la démonstration du théorème 1.1

On raisonne par l'absurde en supposant $\epsilon \leq E^{-KL}$. On va utiliser la minoration de $\mathcal{G}_{\beta, \alpha}$ fournie par la proposition 3.5 et la majoration donnée par la proposition 3.7.

Comme $L \geq 2$, on majore μ par $L - 2$ et $\mu \log(L) - \log(\mu!)$ par $L - 0.5 \log(2\pi L)$, en utilisant le lemme 2.18a et en faisant quelques calculs pour de petites valeurs de L . Donc, on obtient

$$\begin{aligned} &-D \log \left(H(\mathcal{M}_0) \min(d_{L-2}^{K-1}, (L-2)!) \right) - (D-1) \log \left(2^{L+K-3} e^{L-1} \sqrt{L} \right) \\ &\quad - (K-1) \log(\mathcal{B}) - (L-1) \log(\mathcal{A}) \\ &\leq -(KL - L + 1) \log(E) + \log(4) + \log((K-1)!) + L - \frac{\log(2\pi L)}{2} \\ &\quad + \max \left\{ E|\beta|L, \log(L-1) + (L-1) \log(e^{|\beta|} + E^{-KL}) \right\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut supposer $KL \log(E) \geq DLK \log(2) + L \log(E)$, soit $(K-1)L \log(E) \geq DLK \log(2)$. Puisque K et L sont des entiers strictement positifs, le membre de droite est positif et donc $K \geq 2$. On a alors

$$\begin{aligned} (L-1) \log(e^{|\beta|} + E^{-KL}) &\leq |\beta|(L-1) + (L-1) \log(1 + 2^{-2L}) \\ &< |\beta|L + L2^{-L} \leq |\beta|L + 0.061. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\max \left\{ E|\beta|L, \log(L-1) + (L-1) \log(e^{|\beta|} + E^{-KL}) \right\} \\ &< E|\beta|L + \log(L-1) + 0.061. \end{aligned}$$

En appliquant ceci avec la proposition 2.23 et $\log(4) - \log(2\pi)/2 + 0.061 < 0.53$, on trouve

$$\begin{aligned} &-D \log \left(D_{K-1, L-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{\min(K, L)}{\sqrt{L}}} d_{L-1} \right)^{K-1} 2^{KL+L} \frac{\sqrt{6}}{16L} \min(d_{L-2}^{K-1}, (L-2)!) \right) \\ &\quad - (D-1) \log \left(2^{L+K-3} e^{L-1} \sqrt{L} \right) - (K-1) \log(\mathcal{B}) - (L-1) \log(\mathcal{A}) \\ &< -(KL - L + 1) \log(E) + \log((K-1)!) + L + E|\beta|L + 0.5 \log(L) + 0.53. \end{aligned}$$

En regroupant et en réarrangeant les différents termes, on obtient

$$\begin{aligned}
 (18) \quad KL \log(E) &< DKL \log(2) + D(K-1) \log \left(\sqrt{3} e \frac{\min(K, L)}{\sqrt{L}} d_{L-1} \right) \\
 &+ D \log \left\{ (4e)^{L-1} \min \left(d_{L-2}^{K-1}, (L-2)! \right) \right\} + D \log \left(\frac{D_{K-1, L-1}}{\sqrt{L}} \right) \\
 &+ \log((K-1)!) + (K-1) \log(\mathcal{B}/2) + (L-1) \log(\mathcal{A}/2) \\
 &+ E|\beta|L + (L-1) \log(E) + \log(2e) + D \log \left(\frac{\sqrt{6}}{16} \right) + 0.53.
 \end{aligned}$$

La majoration $D \log \left(\sqrt{6}/(16\sqrt{L}) \right) + \log(2e) + 0.53 < 0$ permet de conclure cette démonstration du théorème 1.1. $\square$

4. Démonstration du corollaire 1.5

On choisit $K = \lfloor c_1 |\beta| \rfloor$ et $L = \lfloor c_2 \log(|\beta|) \rfloor$ avec des constantes réelles strictement positives c_1 et c_2 . Nous déterminerons les valeurs optimales de c_1 , c_2 et E . Cela nous permettra de démontrer le corollaire 1.5.

On peut écrire le membre de gauche de l'inégalité (1) de la façon suivante

$$c_1 c_2 |\beta| \log(|\beta|) \log(E) + o(|\beta| \log(|\beta|)).$$

Puisque les nombres α et β sont des entiers algébriques dans un corps imaginaire quadratique, on a $D = 1$ et on peut prendre $\mathcal{A} = \mathcal{B} = 1$. On majore $D_{K-1, L-1}$ par $(K-1)!$, comme le logarithme du dénominateur de $D_{K-1, L-1}$ est en $o(|\beta| \log(|\beta|))$. Aussi on écrit d_x sous la forme $\exp(\psi(x))$, où $\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log p$ et on remplace $x!$ par $\Gamma(x+1)$. Étant donné que $e\sqrt{3L}$ et $(4e)^{L-1}$ sont tous deux en $o(|\beta| \log(|\beta|))$, on peut écrire le membre de droite de l'inégalité (1) sous la forme

$$\begin{aligned}
 &c_1 c_2 |\beta| \log(|\beta|) \log 2 + c_1 |\beta| \psi(c_2 \log(|\beta|)) + 2 \log(\Gamma(c_1 |\beta|)) \\
 &+ \min(c_1 |\beta| \psi(c_2 \log(|\beta|)), \log(\Gamma(c_2 \log(|\beta|)))) \\
 &+ E|\beta| (c_2 \log(|\beta|)) + c_2 \log(|\beta|) \log E + o(|\beta| \log(|\beta|)).
 \end{aligned}$$

Des développements asymptotiques $\log \Gamma(x) = x \log(x) + o(x \log x)$ et $\psi(x) = x + o(x)$, on déduit que le membre de droite de l'inégalité (1) est

$$c_1 c_2 (1 + \log(2)) |\beta| \log(|\beta|) + 2c_1 |\beta| \log(|\beta|) + Ec_2 |\beta| \log(|\beta|) + o(|\beta| \log(|\beta|)).$$

En combinant ces expressions des membres de gauche et de droite de l'inégalité (1) et en divisant ces deux mêmes membres par $|\beta| \log(|\beta|)$, la condition à satisfaire devient

$$(19) \quad c_1 c_2 \log E > c_1 c_2 (1 + \log(2)) + 2c_1 + Ec_2 + o(1).$$

En ignorant le terme $o(1)$, pour le moment, et en résolvant l'équation

$$c_1 c_2 \log E = c_1 c_2 (1 + \log(2)) + 2c_1 + Ec_2$$

pour c_1 , on obtient

$$c_1 = \frac{c_2 E}{c_2(\log(E) - 1 - \log(2)) - 2},$$

qui s'écrit

$$(20) \quad c_1 c_2 \log E = \frac{c_2^2 E \log(E)}{c_2(\log(E) - 1 - \log(2)) - 2}.$$

En dérivant cette fonction de c_2 dans le membre de droite et en résolvant l'équation permettant de trouver les points annulant cette dérivée, on trouve la valeur

$$c_2 = \frac{4}{\log(E) - 1 - \log(2)}.$$

Pour cette valeur de c_2 , le membre de droite de l'égalité (20) vaut

$$\frac{8E \log(E)}{(\log(E) - 1 - \log(2))^2}.$$

En dérivant cette expression par rapport à E et en résolvant à nouveau l'équation permettant de trouver les points annulant cette nouvelle dérivée, on trouve la valeur

$$E = \exp \left(1 + \frac{\log(2)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\log^2(2) + 8 \log(2) + 8} \right) = 25.0059 \dots$$

En posant $\gamma = \log^2(2) + 8 \log(2) + 8$, on obtient

$$c_1 c_2 \log(E) = \frac{16\sqrt{2} \exp \left(1 + (1/2)\sqrt{\gamma} \right) (2 + \log(2) + \sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\gamma} - \log(2))^2} = 276.55 \dots$$

Il résulte de cette étude que pour tout $\epsilon > 0$, il existe B_0 tel que pour $|\beta| > B_0$, l'inégalité (19) soit vérifiée avec $c_1 c_2 \log(E) = 276.55 \dots + \epsilon$. D'où le résultat. $\square$

Remerciements. Les auteurs souhaitent exprimer leur gratitude aux « deux Michel » (Michel Laurent et Michel Waldschmidt) pour leur aide précieuse au cours de ce travail. Cette aide a commencé lors des premiers travaux de recherche entrepris par le premier auteur sous la direction de Michel Laurent et s'est poursuivie lorsque Khémira est devenu, pour sa thèse de doctorat, l'élève de Michel Waldschmidt. Les deux Michel ont généreusement offert leur temps et leur expertise au cours de la préparation de cet article et ont patiemment donné des réponses perspicaces aux nombreuses questions posées par le second auteur. Sans leurs efforts, cet article n'aurait probablement jamais vu le jour sous cette forme.

RÉFÉRENCES

- [1] M. Abramowitz et I.E. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 55, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964, xiv+1046 p.
- [2] É. Borel, *Sur la nature arithmétique du nombre e* , C. R. Acad. Sci. Paris **128** (1899), 596–599.

- [3] P.J. Cameron, *Combinatorics : topics, techniques, algorithms*, Cambridge University Press, 1994, x+355 p.
- [4] V. Elconin, *The Wronskian of the functions $x^{k-1}e^{a_j x}$* , Giorn. Mat. Battaglini **74** (1936), 189–193.
- [5] N.I. Fel’dman et Yu.V. Nesterenko, *Transcendental Numbers*, Number Theory, IV, 1–345, Encyclopædia Math. Sci. **44**, Springer, Berlin, 1998.
- [6] F. Gramain, *Sur le lemme de Siegel (d’après E. Bombieri et J. Vaaler)*, Publications mathématiques de l’Université Pierre et Marie Curie **64** (1983-1984), fascicule 1.
- [7] C. Hermite, *Sur la fonction exponentielle*, C. R. Acad. Sci. Paris **77** (1873), 18–24.
- [8] C. Hermite, *Œuvres de Charles Hermite*, tome III, 432–443, Gauthier-Villars, Paris, 1917.
- [9] S. Khémira, *Approximants de Hermite-Padé, déterminants d’interpolation et approximation diophantienne*, Thèse de Doctorat de l’Université Paris 6, 2005.
- [10] S. Koumandos, *Remarks on a paper : “The best bounds in Wallis’ inequality” by C.-P. Chen and F. Qi*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), no. 5, 1365–1367.
- [11] M. Laurent, M. Mignotte et Y. Nesterenko, *Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d’interpolation*, J. Number Theory **55** (1995), no. 2, 285–321.
- [12] K. Mahler, *Applications of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms*, Math. Ann. **168** (1967), 200–227.
- [13] M. Mignotte *Approximations rationnelles de π et quelques autres nombres*, Journées Arithmétiques (Grenoble, 1973), 121–132, Bull. Soc. Math. France, Mem. 37, Soc. Math. France, Paris, 1974.
- [14] J.-M. Muller et A. Tisserand, *Towards exact rounding of the elementary functions*, in Scientific computing and validated numerics, (Wuppertal, 1995), 59–71, Math. Res. **90**, Akademie Verlag, Berlin, 1996.
- [15] Yu. Nesterenko et M. Waldschmidt, *On the approximation of the values of exponential function and logarithm by algebraic numbers*, in Proceedings of papers dedicated to the memory of Prof. N.I. Feldman, 23–42, Mat. Zapiski **2**, Diophantine approximations, Moscow, 1996.
- [16] A. Sert, *Une version effective du théorème de Lindemann-Weierstrass par les déterminants d’interpolation*, J. Number Theory **76** (1999), no. 1, 94–119.
- [17] T. Struppeck et J.D. Vaaler, *Inequalities for heights of algebraic subspaces and the Thue-Siegel principle*, in Analytic Number Theory (Allerton Park, IL, 1989), 493–528, Progr. Math. **85**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [18] M. Waldschmidt, *Diophantine approximation on linear algebraic groups*, Transcendence properties of the exponential function in several variables, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] **326**, Springer-Verlag, Berlin, 2000, xxiv+633 p.
- [19] F. Wielonsky, *Hermite-Padé approximants of exponential functions and an inequality of Mahler*, J. Number Theory **74** (1999), no. 2, 230–249.

S. KHÉMIRA, LYCÉE LE CORBUSIER, 93300 AUBERVILLIERS, FRANCE
 khemira@math.jussieu.fr

P. VOUTIER, LONDON, UK
 paul.voutier@gmail.com