

ÉQUIDISTRIBUTION UNIPOTENTE ET HAUTEUR ARITHMÉTIQUE

LAURENT CLOZEL

Pour le professeur Paulo Ribenboim à l'occasion de son 80^e anniversaire.

RÉSUMÉ. Soit $X = G/\Gamma$ un quotient arithmétique d'un groupe algébrique réel défini sur $\mathbb{Q}$ et muni de la mesure de probabilité invariante. Si H est un $\mathbb{Q}$ -sous-groupe de G , alors il définit naturellement une mesure sur X . E. Ullmo et l'auteur ont fait la conjecture que pour une suite stricte de sous-groupes, ces mesures convergent vers la mesure invariante sur X (dans certains cas, il faut considérer une pondération adélique). Dans cet article, on étudie, dans le cas le plus simple ($G = \mathrm{SL}(2)$ et H décrit la famille des sous-groupes unipotents) la vitesse de convergence des mesures associées, évaluées contre une fonction suffisamment différentiable. On montre que le paramètre naturel est la hauteur arithmétique du sous-groupe.

ABSTRACT. Assume $X = G/\Gamma$ is an arithmetic quotient of a real algebraic group defined over $\mathbb{Q}$, with its invariant probability measure. If H is a $\mathbb{Q}$ -subgroup of G , there is associated to it a natural measure on X . E. Ullmo and the author have conjectured that for a strict sequence of subgroups these measures converge to the invariant measure on X (in some cases, an adelic weighting must be introduced). In this paper, we study the simplest case where $G = \mathrm{SL}(2)$ and H ranges over the unipotent subgroups. We show that the rate of convergence of the associated measures, tested against sufficiently smooth functions, is given by an inverse power of the arithmetic height of the subgroup.

1. Introduction

Soit G un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ tel que $G(\mathbb{R})$ soit connexe et soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe de congruences. On suppose $X = \Gamma \backslash G(\mathbb{R})$ de volume fini et on note μ la mesure de Haar unitaire sur ce quotient. Soit $H \subset G$ un $\mathbb{Q}$ -sous-groupe vérifiant les mêmes conditions relativement au sous-groupe de congruence $\Gamma_H = \Gamma \cap H(\mathbb{Q})$. Alors μ_H peut être considérée comme une mesure de probabilité sur X . Si (H_α) est une suite stricte de $\mathbb{Q}$ -sous-groupes engendrés par des éléments unipotents et si G est semi-simple, alors il résulte de la théorie de Ratner, développée par Mozes et Shah [7, 3], que la suite $\mu_\alpha = \mu_{H_\alpha}$ tend vers μ pour la topologie vague.

Cependant, les arguments ergodiques de la théorie unipotente ne permettent pas de déterminer la vitesse de convergence, pour des fonctions suffisamment régulières f sur X , de $\langle \mu_\alpha, f \rangle$ vers $\langle \mu, f \rangle$.

Dans des situations assez générales, H_α peut être paramétré par un espace projectif et on peut donc définir sa hauteur. Si G est le groupe additif (de sorte que X est un tore compact), la convergence de μ_α est déterminée par la suite des hauteurs des H_α . Nous allons vérifier qu'il en est de même si $G = \mathrm{SL}(2)$ et si les H_α sont des sous-groupes unipotents maximaux ; dans les deux cas (en considérant un tore de dimension 2), les groupes considérés sont paramétrés par $\mathbb{P}^1$.

Les démonstrations reposent sur des calculs très simples. Dans le cas de $\mathrm{SL}(2)$, la hauteur du groupe considéré figure, de façon naturelle, dans un calcul relatif à la représentation induite définissant les séries d'Eisenstein.

Il y a une différence notable entre le cas de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ et le cas abélien. Notons H la hauteur du groupe considéré. Dans le cas abélien, la hauteur intervient dans l'estimé de convergence au moyen d'une puissance négative H^{-s} arbitraire, avec $s > 0$, déterminant un espace de Sobolev où est astreinte à varier f . Dans le cas du groupe modulaire, la hauteur intervient par son inverse H^{-1} donnant un terme exact, et le degré de différentiabilité s mesure le terme suivant de l'approximation (théorème 1, section 4).

Les estimés pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ reposent sur un théorème de Paley-Wiener dû à Ehrenpreis et Mautner et revisité par Casselman [4, 1]. Le résultat obtenu devrait être comparé avec celui de Sarnak [8] concernant une famille d'horocycles associés à une pointe donnée, et dont l'altitude y tend vers 0.

2. Le cas d'un tore

Soit $X = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$. On introduit les objets usuels de l'analyse harmonique :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{ab} : (x, y) \mapsto e^{2i\pi(ax+by)}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \\ \Delta = -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \\ \Delta e_{ab} = (a^2 + b^2)e_{ab}, \\ \|f\|_{L^2}^2 = \int_X |f|^2 dx dy, \\ \|f\|_{H^s}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|\Delta^{s/2} f\|_{L^2}^2. \end{array} \right.$$

La transformation de Fourier identifie $L^2(X)$ à $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$. Si $f \in H^s$ et

$$f = \sum_{a,b} \widehat{f}(a, b) e_{ab},$$

alors $\|f\|_{H^s}$ est équivalente à la norme, que l'on note désormais $\|\cdot\|_{H^s}$, définie par

$$\left|\widehat{f}(0,0)\right|^2 + \sum_{(a,b)} (a^2 + b^2)^{s/2} \left|\widehat{f}(a,b)\right|^2.$$

Soit maintenant $P = (p, q) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ où $p, q \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux. Soient $\mathbb{T}_P$ l'image de la droite $L_P : qx - py = 0$ dans $\mathbb{T}^2$ et μ_P la mesure de Haar normalisée sur $\mathbb{T}_P$, vue comme mesure sur $\mathbb{T}$.

Lemme 2.1. *La transformée de Fourier de μ_P est la fonction caractéristique de $L_P^\perp \cap \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^2$ où $L_P^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid px + py = 0\}$.*

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 2.2. (i) *La fonction μ_P se prolonge en une forme linéaire continue sur H^s si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} < \infty$, si et seulement si $s > 1/2$.*

(ii) *Pour tout $s \in]\frac{1}{2}, \infty[$,*

$$\begin{aligned} \|\mu_P - \mu\|_{H^s}^2 &= \sum_{\substack{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 - \{0\} \\ pa+qb=0}} (a^2 + b^2)^{-s} \\ &= 2\zeta(2s)(p^2 + q^2)^{-s}. \end{aligned}$$

Dans l'énoncé (ii), la norme de H^s est utilisée pour définir la norme duale sur l'espace des formes linéaires. Les démonstrations sont évidentes et laissées au lecteur. Pour un point $P = (p, q) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ (avec $(p, q) = 1$), soit

$$H(P) = (p^2 + q^2)^{1/2}$$

sa *hauteur arithmétique*. On obtient ainsi le corollaire suivant.

Corollaire 2.3. *On a $\|\mu_P - \mu\|_{H^s} = \sqrt{2} \zeta(2s)^{1/2} H(P)^{-s}$.*

Si $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ tend vers l'infini (pour le filtre des complémentaires de parties finies), le corollaire donne donc la mesure exacte de $\|\mu_P - \mu\|$ en fonction de $H(P)$.

3. Le cas de $\mathrm{SL}(2)$: formule explicite

Le groupe G est désormais $\mathrm{SL}(2)$. Pour simplifier, on note $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ le groupe des points réels. Soit $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ un sous-groupe de congruences. Les $\mathbb{Q}$ -sous-groupes unipotents de G sont de la forme $\gamma N_\infty \gamma^{-1}$, où $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ et

$$N_\infty = \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq G.$$

Ils sont en bijection avec $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ par $\gamma \mapsto \gamma \cdot \infty = \frac{a}{c}$ lorsque $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Pour simplifier, nous considérons, au lieu de $\Gamma \backslash G$, l'espace $X = \Gamma \backslash G / K_\infty$ où $K_\infty = \mathrm{SO}(2)$ et G / K_∞ s'identifie naturellement à $\mathcal{H}$ où $\mathcal{H}$ est le demi-plan de Poincaré, l'application quotient étant définie par $g \mapsto g \cdot i$. Soit μ la mesure invariante normalisée sur $\mathcal{H}$. On suppose aussi que $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Si $f \in C_c^\infty(X)$, f s'écrit selon la décomposition spectrale du laplacien :

$$(1) \quad f = f_0 \cdot \mathbf{1} + \sum_{n \geq 1} f_n g_n + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \widehat{f} \left(\frac{1}{2} + it \right) \cdot E(\cdot, \frac{1}{2} + it) dt.$$

La fonction $\mathbf{1}$ (constante et égale à 1) et les fonctions g_n (formes de Maass paraboliques) sont les fonctions propres du laplacien, g_n étant associée à la valeur propre $\lambda_n > 0$. On suppose g_n normalisée, donc (ici, on note simplement dz l'élément de mesure invariant)

$$(2) \quad f_n = \langle f, g_n \rangle = \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} f(z) \overline{g_n}(z) dz.$$

Dans le terme intégral,

$$E(z, s) = \frac{1}{2} y^s \sum_{(c,d)=1} |cz + d|^{-2s}$$

est la série d'Eisenstein non holomorphe et pour $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$, $\mathrm{Re}(s) \neq 1$, on a

$$(3) \quad \widehat{f}(s) = \langle f, E(z, s) \rangle.$$

Les produits scalaires (2) et (3) sont déduits de la mesure invariante. La norme du terme intégral dans (1) est égale à

$$(4) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| \widehat{f} \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt.$$

Si f est C^∞ et à support compact, alors les intégrales dans (1) et (4) sont absolument convergentes.

La convergence de (1) est uniforme pour z dans un compact de $\mathcal{H}$. Ceci est affirmé, mais point démontré dans [6, théorème 7.3]. Pour une démonstration simple, voir [2, section 8.1]. Soit

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Q}),$$

de sorte que $\gamma \cdot \infty = (a : c) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Soit $N = \gamma N_\infty \gamma^{-1}$ et munissons $\Gamma \cap N \backslash N$ de la mesure invariante de masse 1. Nous devons calculer

$$J_N = \int_{\Gamma \cap N \backslash N} f(n \cdot i) dn.$$

Les formes de Maass g_n étant paraboliques, la dernière expression est la somme de

$$(5) \quad \int f_0 \cdot \mathbf{1} \, dn = f_0 = \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} f(z) dz,$$

et

$$(6) \quad \int_{\Gamma \cap N \backslash N} E\left(n \cdot i, \frac{1}{2} + it\right) dn,$$

intégrée contre $\widehat{f}\left(\frac{1}{2} + it\right)$.

Nous devons donc calculer

$$(7) \quad \int_{\Gamma \cap N \backslash N} E(n \cdot i, s)$$

d'abord dans le domaine de convergence, c'est-à-dire lorsque $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Supposons d'abord que $\gamma = 1$, de sorte que $N = N_\infty$. Alors (7) n'est autre que le terme constant de la série d'Eisenstein, égal à (lorsque $z = x + iy$)

$$y^s + m(s) y^{1-s}$$

où $m(s) = \frac{\xi(2s-1)}{\xi(2s)}$ et $\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$. Le terme (6) s'écrit donc

$$(8) \quad \int_0^\infty \widehat{f}\left(\frac{1}{2} + it\right) \left[1 + \frac{\xi(1-2it)}{\xi(1+2it)}\right] dt.$$

Considérons maintenant le cas où $\gamma \cdot \infty \neq \infty$. Le calcul se fait aisément dans le cadre adélique. Écrivons

$$X = \Gamma \backslash G(\mathbb{R}) / K_\infty = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / K_\infty K_f$$

où $K_f = \prod_p \operatorname{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$. Pour $s \in \mathbb{C}$, soit I_s l'induite adélique (non normalisée) formée des fonctions φ sur $G(\mathbb{A})$, lisses et K_∞ -finies, vérifiant

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} y & x \\ * & y^{-1} \end{pmatrix} g\right) = |y|^s \varphi(g), \quad g \in G(\mathbb{A}),$$

où $x \in \mathbb{A}$, $y \in \mathbb{A}^\times$ et $|y|$ est la norme d'idèle. Notons B le groupe des matrices triangulaires supérieures dans G . La représentation I_s contient un vecteur sphérique φ_s pour $K_\infty \times K_f$, unique si l'on suppose que $\varphi_s(1) = 1$. De plus, on a

$$E(g, s) = \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})} \varphi_s(\gamma g)$$

pour tout $g \in G(\mathbb{A})$ relevant d'un élément de X et pour $\operatorname{Re}(s) > 1$. On a alors, si $N = \gamma N_\infty \gamma^{-1}$,

$$(9) \quad \begin{aligned} \int_{N \cap \Gamma \backslash N} E(n, s) dn &= \int_{N(\mathbb{Q}) \backslash N(\mathbb{A})} E(n, s) dn \\ &= \int_{N_\infty(\mathbb{Q}) \backslash N_\infty(\mathbb{A})} E(n\gamma^{-1}, s) du \\ &= E_B(\gamma^{-1}, s) \quad (\text{par définition}), \end{aligned}$$

qui est le terme constant de la série d'Eisenstein selon N , puisque E est invariante pour les éléments rationnels. Par ailleurs, la variante adélique du calcul du terme constant donne, pour E associée à φ_s ,

$$E_B(g, s) = \varphi_s(g) + m(s)\varphi_{1-s}(g), \quad g \in G(\mathbb{A}).$$

Il suffit donc de calculer $\varphi_s(\gamma^{-1})$. Puisque $\gamma^{-1} \neq 1$, on peut supposer que

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\xi \in \mathbb{Q}^*$. Le lemme qui suit est le cas le plus simple d'un résultat de Franke, Manin et Tschinkel [5, prop. 3].

Lemme 3.1. (i) Soit $\xi \in \mathbb{Q}_p^\times$ et $\alpha = v_p(\xi)$. Alors

$$\varphi_s(\gamma^{-1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \geq 0, \\ p^{\alpha s} & \text{si } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

(ii) Soit $\xi \in \mathbb{R}^\times$. Alors $\varphi_s(\gamma^{-1}) = (\xi^2 + 1)^{-s/2}$.

Démonstration. La fonction φ_s , aux places finies, est invariante à droite par le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$ et coïncide donc sur deux éléments g et h tels que $g\Lambda = h\Lambda$ avec $\Lambda = \mathbb{Z}_p^2 \subset \mathbb{Q}_p^2$. Si $v_p(\xi) \geq 0$, la partie (i) est triviale. Sinon, soit $\xi = p^\alpha$ avec $\alpha < 0$.

Notons $\langle v_1, v_2 \rangle$ le réseau engendré par v_1 et v_2 dans $\mathbb{Q}_p^2$. Alors

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}\Lambda &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ p^\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ p^\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p^{-\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= b\Lambda \end{aligned}$$

où

$$b = \begin{pmatrix} p^{-\alpha} & 1 \\ 0 & p^\alpha \end{pmatrix}.$$

Le résultat suit de ceci. Pour (ii), on note que, G opérant sur $\mathcal{H}$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \cdot i = \frac{i}{\xi^2 + 1} + \cdots = \begin{pmatrix} (\xi^2 + 1)^{-1/2} & * \\ 0 & (\xi^2 + 1)^{1/2} \end{pmatrix} \cdot i$$

d'où la valeur indiquée. □

Nous utilisons la hauteur arithmétique sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ définie pour $P = (\xi : \eta)$ avec $\xi, \eta \in \mathbb{Q}$ par

$$H(P) = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} \prod_p \mathrm{Max}(|\xi|_p, |\eta|_p).$$

On a alors le corollaire suivant.

Corollaire 3.2. Supposons que $\gamma \cdot \infty = (a : b) = P$. Alors on a

$$\varphi_s(\gamma^{-1}) = H(P)^{-s}.$$

C'est manifestement le cas si $P = \infty$ et $H(P) = 1$. Sinon, on peut supposer que

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\xi & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\gamma \cdot \infty = (1 : -\xi)$ et $H(P) = H((\xi : 1))$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \varphi_s(\gamma^{-1}) &= (\xi^2 + 1)^{-s/2} \prod_{|\xi|_p > 1} |\xi|_p^{-s} \\ &= H((\xi : 1))^{-s}. \end{aligned}$$

Soit alors J_N l'intégrale relative à N . On a obtenu la forme explicite du terme (6) :

$$H^{-1/2} \int_0^\infty \widehat{f}\left(\frac{1}{2} + it\right) \left[H^{-it} + \frac{\xi(1-2it)}{\xi(1+2it)} H^{it} \right] dt.$$

La dépendance de la fonction ζ (ou ξ) est en fait illusoire. En effet, l'équation fonctionnelle de la série d'Eisenstein,

$$E(z, 1-s) = m(1-s)E(z, s),$$

donne (les produits scalaires étant hermitiens) :

$$\widehat{f}(1-s) = \overline{m(1-s)} \widehat{f}(s)$$

et donc

$$\widehat{f}\left(\frac{1}{2} - it\right) = \overline{m\left(\frac{1}{2} - it\right)} \widehat{f}\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

avec

$$\overline{m\left(\frac{1}{2} - it\right)} = \frac{\bar{\xi}(1+2it)}{\bar{\xi}(1-2it)} = \frac{\xi(1-2it)}{\xi(1+2it)}.$$

On a donc obtenu l'expression explicite très simple de la proposition suivante.

Proposition 3.3. *Supposons que N est associé à $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ et que $H = H(P)$. Alors l'intégrale J_N est donnée par*

$$(10) \quad J_N(f) = \int_{\Gamma \setminus \mathcal{H}} f(z) dz + \frac{1}{2\pi} H^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{1}{2} + it\right) H^{-it} dt.$$

La convergence absolue de l'intégrale ainsi que le fait que l'intégration commute avec le calcul du terme constant (9) résultent des propriétés de convergence absolue, uniforme en z , rappelées après l'équation (3).

4. Le cas de $SL(2)$: décroissance en fonction de H

Pour $f \in C_c^\infty(X)$, l'estimation de $J_N(f)$ en fonction de H se réduit, d'après la proposition 3.3, à des estimées relatives à $\widehat{f}(s)$ pour $\text{Re}(s) > 0$ et $\text{Re}(s)$ grand. Il semble difficile (voir [1, p. 168]) d'obtenir une caractérisation exacte des transformées $\widehat{f}(s)$ des fonctions C^∞ à support compact. En revanche, cela a été fait par Ehrenpreis et Mautner [4], puis par Casselman [1] lorsque f décrit un espace de Schwartz convenable.

Notons une différence importante entre ces articles. Ehrenpreis et Mautner définissent une transformée d'Eisenstein, que nous notons $\widehat{f}_{EM}(s)$, en intégrant f contre une série d'Epstein :

$$\begin{aligned} Ep(z, s) &= y^s \sum_{(c,d) \neq (0,0)} |cz + d|^{-2s} \\ &= 2\zeta(2s)E(z, s). \end{aligned}$$

L'équation fonctionnelle de $Ep(z, s)$ (qui ne contient plus la fonction ζ) ainsi que la caractérisation de $\widehat{f}_{EM}(s)$ ([4, théorème 9.1]) sont alors plus simples. En revanche, la décomposition spectrale, et donc la formule (10), s'expriment moins naturellement en fonction de $\widehat{f}_{EM}$. Nous allons démontrer les estimées de croissance à l'aide des résultats de [4].

L'espace $\mathcal{S}(X)$ est défini comme l'ensemble des fonctions différentiables sur X telles que, pour tout entier positif j et pour tout p ,

$$(\omega^j f)(z) = O(y^{-p})$$

pour $z = x + iy \in H$ et y tendant vers $+\infty$ et

$$\omega = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

étant le laplacien hyperbolique. Il est donc défini par les semi-normes

$$\|f\|_{j,p} = \text{Sup } |y^p \omega^j(f)|,$$

la borne étant prise dans le domaine fondamental usuel pour Γ . Pour $f \in \mathcal{S}(X)$, Ehrenpreis et Mautner montrent que $\widehat{f}_{EM}(s)$ (essentiellement $2\zeta(2s)\widehat{f}(s)$, voir plus loin) vérifie la propriété

$$(11) \quad (s-1)\widehat{f}_{EM}(s) \text{ est une fonction entière de } s$$

de même que l'égalité

$$(12) \quad (s-1)\widehat{f}_{EM}(s) = O(|t|^{-p})$$

pour tout $p > 0$ quand $|t| \rightarrow +\infty$, uniformément pour σ borné. On a posé ici $s = \sigma + it$. Voir [4, lemme 9.6].

Revenons à l'expression (10). Avec notre définition (3), le produit scalaire étant hermitien, $\widehat{f}(s)$ est antiholomorphe.

Changeons de notation en posant

$$\widehat{f}(s) = \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} \overline{f}(s) E(z, s) dz$$

et définissons de même $\widehat{f}_{EM}(s)$ à partir de $Ep(z, s)$: ce sont des fonctions holomorphes, la relation $\widehat{f}_{EM}(s) = 2\zeta(2s)\widehat{f}(s)$ est vérifiée et (10) s'écrit :

$$\begin{aligned} J_N(\bar{f}) &= \int_{\Gamma \setminus \mathcal{H}} \bar{f}(z) dz + \frac{1}{2\pi} H^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(s) H^{it} dt \\ &= \int_{\Gamma \setminus \mathcal{H}} \bar{f}(z) dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\frac{1}{2}} \frac{\widehat{f}_{EM}(s)}{2\zeta(2s)} H^{-s} ds. \end{aligned}$$

L'estimée (4.2) et le comportement connu de la fonction ζ pour $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ montrent que l'on peut déplacer l'intégrale verticale vers la droite. On obtient alors en $s = 1$ le résidu

$$-H^{-1} \cdot \operatorname{Res}_{s=1} \widehat{f}(s) = -H^{-1} \int_{\Gamma \setminus \mathcal{H}} \bar{f}(s) dz$$

compté négativement. Si f_0 est, comme dans (1), l'intégrale de f , il vient

$$J_N(\bar{f}) = (1 + H^{-1})\bar{f}_0 - \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} \frac{\widehat{f}_{EM}(s)}{2\zeta(2s)} H^{-s} ds.$$

On déduit alors de (12) le résultat suivant.

Théorème 4.1. *Quels que soient $\sigma > 1$ et $f \in \mathcal{S}$, on a*

$$J_N(f) - f_0 = H^{-1}f_0 + O(H^{-\sigma}),$$

la constante implicite dépendant de σ .

En revenant à la démonstration de [4], on peut voir que le résultat peut s'exprimer dans un espace de Sobolev ne dépendant que d'un ensemble fini de semi-normes. En fait, la démonstration de (12) montre que si $f = O(|y|^{-p})$ pour $p \geq p_0$, alors

$$\left| (s-1)\widehat{f}_{EM}(s) \right| \leq C_p(1+|t|)^{r_0}$$

où r_0 est une constante positive fixe et

$$C_p \leq C(\sigma) \|f\|_{0,p},$$

$C(\sigma)$ étant localement bornée en σ .

Puisque

$$\widehat{(\omega f)}_{EM} = s(s-1)\widehat{f}_{EM},$$

on voit que

$$\left| (s-1)\widehat{f}_{EM}(s) \right| \leq C(\sigma) \|f_{j,p}\| (1+|t|)^{t_0-2j},$$

soit l'équation

$$(13) \quad \left| J_N(f) - f_0 + H^{-1}f_0 \right| \leq C(\sigma) \|f\|_{j,p} H^{-\sigma},$$

quels que soient $p \geq p_0$, $j > j_0 = 1 + \frac{r_0}{2}$ et la constante $C(\sigma)$ étant localement bornée pour $\sigma > 1$.

On note que si cela était nécessaire, on pourrait estimer le comportement de $C(\sigma)$. Notons que dans la situation décrite dans l'introduction, la mesure de la convergence des $\mu_\alpha = \mu_{H_\alpha}$ par une puissance inverse de la hauteur paraît être un fait assez général. Outre les familles de sous-groupes unipotents étudiées dans les sections 2 et 3, les

familles d'intégrales toriques de [3] vérifient cette condition. On considère la famille des tores elliptiques de $GL(2, \mathbb{Q})$. Dans ce cas, l'intégrale de l'introduction

$$\int_{\Gamma_\alpha \backslash H_\alpha} f \, dh_\alpha$$

où $\Gamma_\alpha = \Gamma \cap H_\alpha$ doit être remplacée par une moyenne adélique, voir [3]. Notons T_d le tore donné par

$$(14) \quad T_d(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 - db^2 \neq 0,$$

d étant un nombre sans carré dans $\mathbb{Z}$.

On obtient ainsi, pour $d \rightarrow \infty$, une famille μ_d d'intégrales définies dans [3, sections 5-7] et la convergence vers $\mu(f)$ est donnée, pour f suffisamment régulière, par

$$(15) \quad \mu_d(f) - \mu(f) = O(|d|^{-1/4+\theta/2+\varepsilon})$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Dans cette expression, $\theta < \frac{1}{2}$ mesure la déviation par rapport à la conjecture de Selberg pour les valeurs propres du laplacien sur les formes de Maass [3, p. 1274]. Pour $G = GL(2)/\mathbb{Q}$, on sait que $\theta < \frac{7}{32}$. Par ailleurs, le tore (4.4) est paramétré par son algèbre de Lie (intersectée avec $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{Q})$), une droite de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}^3)$ dont la hauteur est essentiellement $|d|$. On voit que (15) est conforme à ce principe général.

Erratum

Le théorème 4.8 de [3] est incorrect, comme nous l'a fait remarquer F. Maucourant. L'erreur intervient à la deuxième ligne de la preuve, où le calcul du dénominateur d'un quotient de deux nombres complexes est faux. Nous remercions Maucourant de cette correction.

Remerciements. Je remercie Jean-Benoît Bost qui m'a expliqué la formulation élégante de la convergence pour les tores, telle que mentionnée dans la section 2.

RÉFÉRENCES

- [1] B. Casselman, *Harmonic analysis of the Schwartz space of $\Gamma \backslash SL_2(\mathbb{R})$* , in Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004, 163–192.
- [2] L. Clozel et E. Ullmo, *Equidistribution des points de Hecke*, in Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004, 193–254.
- [3] L. Clozel et E. Ullmo, *Equidistribution de mesures algébriques*, Compos. Math. **141**, 2005, no. 5, 1255–1309.
- [4] L. Ehrenpreis et I. Mautner, *Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups III*, Trans. AMS **90**, 1959, 431–484.

- [5] J. Franke, Y.I. Manin et Yu. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95**, 1989, no. 2, 421–435.
- [6] H. Iwaniec, *Spectral methods of automorphic forms*, Graduate Studies in Mathematics, **53**, AMS, Providence, RI, 2002, xii+220 pp.
- [7] S. Mozes et N. Shah, *On the space of ergodic invariant measures of unipotent flows*, Ergodic Theory Dynam. Systems **15**, 1995, no. 1, 149–159.
- [8] P. Sarnak, *Asymptotic behavior of periodic orbits of the horocycle flow and Eisenstein series*, Comm. Pure Appl. Math. **34**, 1981, no. 6, 719–739.

L. CLOZEL, DÉP. DE MATH., BÂT. 425, U. PARIS-SUD 11, 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE.
laurent.clozel@math.u-psud.fr