

CALCULS EXACTS ET ASYMPTOTIQUES DE POTENTIELS DE MARCHES ALÉATOIRES DANS $\mathbb{Z}^2$, ET APPLICATION AU NOMBRE DE COLLISIONS

PHILIPPE RAMBOUR ET JEAN-MARC RINKEL

RÉSUMÉ. Ce travail concerne des marches aléatoires d'une ou plusieurs particules dans le plan et donne un outil pour traiter les marches aléatoires en n'importe quelle dimension. L'objectif est de calculer des potentiels lorsque les transitions sont bornées. Nous développons deux méthodes, suivant la structure des matrices de transition. L'une d'elle est algébrique. L'autre est de nature géométrique par l'interprétation des matrices de transition comme des projections qui sont des matrices de Toeplitz agissant sur les polynômes trigonométriques à coefficients matriciels. On obtient un calcul exact et un calcul asymptotique des potentiels. Une application est donnée au calcul de l'espérance de collisions.

ABSTRACT. This paper is devoted to the study of a family of random walks of one or several particles in the plane, and we give a tool to treat these random walks in any dimension. Our aim is to obtain the potentials for bounded transitions. We use successively two different methods. The first one is essentially algebraic, while the second is based on a geometric point of view, where transition matrices are interpreted as projections, and finally as Toeplitz matrices on trigonometrical polynomials with matrix coefficients. We have to remark that the two methods allow us to obtain an exact and an asymptotic expansion of the potentials. As an application, we compute the expectation of collisions for a family of random walks.

1. Introduction

1.1. Le contexte

Un résultat qui a historiquement contribué au développement de l'étude des marches aléatoires est le théorème de Pólya en 1921 (voir [11]). Le théorème de Pólya affirme (entre autres) que toute marche aléatoire est récurrente sur $\mathbb{Z}^2$. Une marche aléatoire est dite *récurrente* si, partant d'un point, l'espérance d'un retour en ce point est infinie. Les concepts associés aux marches aléatoires tels que l'espérance du nombre de visites, du nombre de retours (consécutivement la récurrence et la transience), la probabilité de première sortie d'un domaine du réseau sont évaluables à partir des potentiels associés à ces marches aléatoires. Deux catégories de travaux se distinguent sur les marches aléatoires discrètes. Dans la première, classons les approches qualitatives

en dimension quelconque consistant à donner des critères de récurrence, de transience. C'est dans cette ligne que se situent des auteurs tels que G. Fayolle et Malyshev ([6] et [7]).

Dans la seconde catégorie, l'effort se concentre sur le calcul des potentiels. La taille du domaine est paramétrée et donne lieu à des estimations asymptotiques ou exactes des potentiels. Ces travaux concernent, essentiellement, la dimension 1. C'est dans cette ligne que l'on doit citer les travaux de F.L. Spitzer et C.J. Stone [17], où l'asymptotique des potentiels met en évidence un noyau de Green. Il faut signaler aussi l'article de Kesten [9] dans le cas où les fonctions caractéristiques des marches aléatoires ont un zéro d'ordre réel α tel que $0 < \alpha < 2$. Ces travaux sont liés à l'analyse des fonctions caractéristiques associées à la variable aléatoire qui engendre la marche; celles-ci permettent les manipulations adéquates des matrices de transition pour l'obtention des potentiels. Les outils d'investigation concernent l'analyse harmonique (et plus précisément les opérateurs de Toeplitz), l'analyse complexe et dans certains cas l'algèbre linéaire. Les auteurs de ce travail ont également contribué à ce type de résultat en dimension 1 pour des marches de type symétrique (à fonction caractéristique réelle), voir [12] et des marches asymétriques (fonctions génératrices méromorphes), voir [5]. L'article de A. Seghier [16] est une ouverture pour l'étude des marches aléatoires en dimension quelconque. Par la suite, J. Chanzy a donné une structure géométrique d'inversion d'un opérateur de Toeplitz tronqué opérant sur des polynômes trigonométriques à deux indéterminées en se ramenant à une théorie des matrices de Toeplitz unidimensionnelle, quitte à utiliser des coefficients de Fourier matriciels ([3] et [4]). Il a pu ainsi obtenir une expression particulièrement compacte du noyau de Green du laplacien discret en dimension 2.

Le travail présenté ici se situe dans la seconde catégorie et utilise deux points de vue différents.

Le premier point de vue développe une géométrie de l'inversion des opérateurs de Toeplitz tronqués à symbole matriciel. Il est présenté dans la section 3. L'idée, qui est de se ramener à la dimension 1, a une portée universelle et laisse espérer le calcul des potentiels ou de leur estimation asymptotique en dimension supérieure à 2. De plus, nous pouvons espérer par cette méthode le calcul de potentiels pour des marches aléatoires à transitions non bornées. Une marche aléatoire est à *transitions bornées* s'il existe un réel positif M tel que la probabilité de passer en un coup d'un point A à un point B est nulle si leur distance est supérieure à M . Cependant, dans ce travail, nous nous limiterons à des transitions bornées. Plus précisément, si X est la variable aléatoire qui gouverne la marche aléatoire dans le plan, nous illustrons la méthode en choisissant une structure de transitions définie par $\mathbf{P}(X = (a, b)) = 0$ si $|a| > 1$ ou $|b| > 1$ (voir figure 1); le théorème 2.1.3 ainsi que le corollaire 2.1.5 donnent les potentiels et leurs asymptotiques pour ces transitions.

Le deuxième point de vue concerne les marches aléatoires dont les matrices de transition sont des produits tensoriels de matrices particulières. Cela concerne, par exemple, les particules aléatoires dont les coordonnées sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Cette propriété a été mise en oeuvre dans un autre cadre pour des calculs de durée d'un jeu (problème de la ruine du joueur), voir [10]. Dans cet article, on développe

une méthode algébrique qui permet de calculer en toute dimension, c'est-à-dire dans n'importe quel hypercube de dimension n , les potentiels de marches aléatoire de p particules. Le théorème 2.3.1 traite le cas de p particules sur un intervalle, les théorèmes 2.4.2 et 2.4.4 traitent le cas de p particules dans un carré.

1.2. Notations

Dans cet article, on étudie une famille de marches aléatoires discrètes dans le plan. De façon plus précise, une telle marche est définie par la donnée d'une suite

$$S_n = S_0 + X_1 + \cdots + X_n$$

où les variables X_i sont des copies indépendantes et également distribuées, à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$, d'une variable aléatoire X et où S_0 est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^2 \cap [0, N]^2$. Dans cet article, on suppose que S_0 suit une loi uniforme sur R . La loi de X est donnée par la famille de réels

$$\{c_{kl} = \mathbf{P}(X = (k, l))\}.$$

Si l'on exige que cette marche reste confinée à un domaine R de $\mathbb{Z}^2$, on associera à cette marche les fonctions de transition $\{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ définies de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \forall \xi, \zeta \in R, \quad Q_0(\xi, \zeta) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \xi = \zeta, \\ 0 & \text{si } \xi \neq \zeta, \end{cases} \\ Q_1(\xi, \zeta) &= \mathbf{P}(X = \zeta - \xi), \quad Q_n(\xi, \zeta) = \sum_{t \in R} Q_{n-1}(\xi, t) Q_1(t, \zeta). \end{aligned}$$

Les *potentiels* associés à cette marche dans le domaine R sont définis par

$$(1) \quad \forall \xi, \zeta \in R, \quad g_R(\xi, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\xi, \zeta).$$

Le nombre $g_R(\xi, \zeta)$ est l'espérance du nombre de visites en ζ partant de ξ sans quitter le domaine R . L'importance de ces nombres est largement décrite dans [18]. Dans cet article, le domaine plan considéré est le carré $R_N = [0, N]^2 \cap \mathbb{N}^2$ pour lequel N est un paramètre susceptible de tendre vers l'infini. Sa notation sera toujours R_N . On montre alors (voir [18]) la relation

$$(2) \quad \forall \xi, \zeta \in R, \quad g_R(\xi, \zeta) - \sum_{t \in R} g_R(\xi, t) Q_1(t, \zeta) = \tau(\xi, \zeta)$$

où τ est le symbole de Kronecker. La traduction matricielle de la relation (2) nécessite d'ordonner les points du domaine R_N . Nous conviendrons de l'ordre suivant sur R_N , noté $\ll$:

$$(a, b) \ll (a', b') \quad \text{si} \quad \begin{cases} b < b' & \text{ou} \\ b = b' & \text{et } a < a'. \end{cases}$$

On peut définir ainsi la matrice carrée $\mathcal{Q}$ de terme général $Q_1(\xi_i, \xi_j)$ où ξ_i et ξ_j sont respectivement les i -ième et j -ième points de R_N (dans cette notation, on distingue l'objet Q_1 , qui est une probabilité, de l'objet $\mathcal{Q}$, qui est une matrice). Notons que $\mathcal{Q}$ est de taille $(N+1)^2 \times (N+1)^2$. Remarquons alors qu'avec cette convention, la matrice peut se lire comme une matrice par blocs de taille $(N+1) \times (N+1)$ et de terme général la matrice $Q_{i,j}$ qui est de taille $(N+1) \times (N+1)$ telle que

$$(3) \quad Q_{i,j}(k, l) = \mathcal{Q}((k, i), (l, j)) = Q_1((k, i), (l, j)).$$

Ainsi, dans l'équation (3), i est le numéro de ligne des blocs, j est le numéro de colonne des blocs, k est le numéro de ligne dans le bloc et l est le numéro de colonne dans le bloc. Notons de façon analogue la matrice des potentiels $\mathcal{G}$ de terme général $g_R(\xi_i, \xi_j)$ où ξ_i et ξ_j sont respectivement les i -ième et j -ième points de R_N . La relation (2) prend la forme

$$(4) \quad (I - \mathcal{Q})\mathcal{G} = I,$$

où I désigne la matrice identité d'ordre $(N + 1)^2$. En lisant la matrice $\mathcal{G}$ comme une matrice par blocs de terme général $G_{i,j}$, on aura de façon analogue à l'égalité (3) :

$$(5) \quad G_{i,j}(k, l) = \mathcal{G}((k, i), (l, j)).$$

Lorsque $R = R_N$ et que l'ordre choisi est $\ll$, on notera

$$\mathcal{G}((k, i), (l, j)) = g_N((k, i), (l, j)).$$

Le calcul des potentiels se ramène, grâce à l'équation (4), à l'inversion de la matrice $I - \mathcal{Q}$. Cette inversion dépend alors de la structure de la matrice de transition. Nous allons considérer dans ce travail deux structures décrites dans les deux sous-sections suivantes.

1.3. Potentiels d'une marche aléatoire d'une particule dans R_N

Pour tout i, j dans $\{0, \dots, N\}$, $Q_{i,j}$ ne dépend que de $j - i$. Comme nous avons

$$\mathcal{Q}((k, i), (l, j)) = \mathbf{P}(X = (l - k, j - i)),$$

les matrices $\mathcal{Q}$ apparaissent comme des « matrices de Toeplitz à blocs ». En effet, avec les notations de l'équation (3), $Q_{i,j} = Q_{i',j'}$ si $j - i = j' - i'$. Et on peut remarquer, à titre de curiosité, que chacun des blocs est lui-même une matrice de Toeplitz.

Pour donner une idée de notre méthode d'obtention des potentiels, nous devons commencer par faire quelques rappels. On note $\mathbb{T}$ le tore de dimension 1 et $\chi = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Une base hilbertienne de l'espace des fonctions de carré intégrable $L^2(\mathbb{T})$ est $\{\chi^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ dont on note $\hat{f}(k)$ le k -ième coefficient de Fourier. La matrice de Toeplitz associée au « symbole » f est la matrice dont le terme général est $(\hat{f}(l - k))_{0 \leq k, l \leq N}$. Dans le cadre des marches aléatoires sur une droite, la matrice de transition est une matrice de Toeplitz associée au symbole $f(\theta) = 1 - \Phi(e^{i\theta})$ où $z \mapsto \Phi(z)$ est la fonction génératrice associée à la marche aléatoire. L'inversion de cette matrice dépend de la régularité du symbole. La question de la régularité et de l'inversibilité des opérateurs de Toeplitz tronqués concernent de nombreux travaux (liés ou non aux probabilités), citons notamment [2], [13], [12] et [15]. L'idée ici est d'introduire naturellement un « symbole à coefficients matriciels » $\sum_{\mathbb{Z}} Q_{0,k} \chi^k$. On a ainsi un développement de Fourier en dimension 1 mais avec des coefficients de Fourier matriciels. Cette généralisation des structures d'inversion développées dans [15], [14] (en dimension 1) et [3] (en dimension 2 avec symbole réel), en une version adaptée à l'étude des marches aléatoires dans le plan, est exposée dans la section 3. Le résultat nouveau du théorème 3.1.5 sur l'inversion des matrices de Toeplitz à symbole matriciel est la clef du calcul des potentiels présenté dans ce travail lorsque l'on se libère du cadre plus contraignant du point de vue de la section 1.4.

1.4. Marche aléatoire de p particules sur une demi-droite

Il est possible de définir la marche aléatoire dans R_N par une variable aléatoire de la forme $X = (X_1, X_2)$ où X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$, mais pas nécessairement de même loi. Nous noterons respectivement $\mathcal{Q}_{X_1}$ et $\mathcal{Q}_{X_2}$ les matrices de transition de X_1 et X_2 sur $[0, N]$ (avec l'ordre naturel des points sur une droite). On a alors, avec les notations de l'équation (3) et en notant $\mathcal{Q}_2$ la matrice de transition,

$$\begin{aligned} Q_{i,j}(k, l) &= \mathcal{Q}_2((k, i), (l, j)) \\ &= \mathbf{P}(X = (l - k, j - i)) \\ &= \mathbf{P}(X_1 = (l - k))\mathbf{P}(X_2 = (j - i)), \end{aligned}$$

d'où

$$Q_{i,j} = \mathbf{P}(X_2 = (j - i)) \mathcal{Q}_{X_1}.$$

Par conséquent, $\mathcal{Q}_2$ est le produit tensoriel des matrices de transition associées à X_1 et X_2 , c'est-à-dire

$$(6) \quad \mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_{X_2} \otimes \mathcal{Q}_{X_1}.$$

La marche aléatoire dans le plan dont la matrice de transition est donnée par l'égalité (6) traduit en fait la marche aléatoire de deux particules indépendantes sur $[0, N] \cap \mathbb{Z}$. Appelons particule 1 et particule 2 les particules respectivement associées aux marches aléatoires engendrées par X_1 et X_2 . Dans ce cas, le nombre $\mathcal{G}((k, i), (l, j))$ défini dans l'équation (5) représente l'espérance du nombre de visites simultanées en l pour la particule 1, en j pour la particule 2, sachant qu'elles partent en même temps respectivement de k et de i . Ainsi, l'espérance $\mathcal{C}_2$ du nombre de collisions sur le sous-réseau $\mathcal{R}_N = [0, N] \cap \mathbb{Z}$ avant d'en sortir (avec une distribution initiale uniforme) est donnée par l'égalité suivante:

$$(7) \quad (N + 1)^2 \mathcal{C}_2 = \sum_{(i,j) \in \mathcal{R}_N^2} \sum_{l=0}^N \mathcal{G}((i, j), (l, l)).$$

La structure se généralise pour décrire le mouvement aléatoire de p particules sur $\mathcal{R}_N$. Dans ce cas, la matrice de transition, notée $\mathcal{Q}_p$, est donnée par

$$(8) \quad \mathcal{Q}_p = \bigotimes_{i=1}^p \mathcal{Q}_{X_i}.$$

Cette structure permet, avec des hypothèses raisonnables sur la loi des variables X_i , d'obtenir avec une grande précision les potentiels et les espérances de collisions d'ordre p (qu'on notera $\mathcal{C}_p$). Les résultats sont exposés dans la section suivante. On distinguera les résultats probabilistes (section 2) des résultats d'analyse (section 3).

2. Les résultats probabilistes

2.1. Marche aléatoire dans le plan à transition bornée

Nous exploitons ici un théorème d'inversion d'une matrice de Toeplitz par blocs. Ce problème est résolu pour la dimension 2 par le théorème 3.1.5 dont l'énoncé se trouve à la section 3. Remarquons que ce même théorème permet de traiter le cas des

transitions non bornées comme cela est exposé en 3.2. Partant d'une structure de transition générale donnée par la figure 1, il faut signaler dès maintenant trois phénomènes liés au calcul matriciel.

(a) L'opérateur de transition dépend des probabilités de transition, mais son expression matricielle dépend d'un ordre (non naturel dans le plan) pour les points du carré $[0, N]^2 \times \mathbb{Z}^2$.

(b) Un choix étant fait (par exemple $\ll$), on dispose, grâce au théorème 3.1.5, d'une matrice de potentiels de terme général $g_N((i, j), (k, l))$ décrivant le nombre de visites espérées en (k, l) partant de (i, j) .

(c) Le choix de l'ordre qui induit la forme de la matrice de transition fait que, pour certaines marches aléatoires, le théorème 2.1.3 ne permet pas d'obtenir les potentiels (la matrice de transition ne vérifiant plus les hypothèses du théorème 2.1.3). Par exemple, alors que la configuration de la figure 1 avec les probabilités $c_i = 0$ pour $i = 1, 2, 4, 5, 6, 8$ entre dans les hypothèses du théorème 2.1.3, la configuration symétrique $c_i = 0$ pour $i = 2, 3, 4, 6, 7, 8$ n'entre pas dans les hypothèses de ce même théorème car ces hypothèses sont liées à un ordre des points, arbitraire, dans le carré $[0, N]^2 \times \mathbb{Z}^2$. Ceci d'ailleurs n'a rien d'étonnant lorsque l'on fait du calcul matriciel. Pour traiter le cas d'une configuration rétive aux hypothèses, il peut suffire de faire un autre choix pour l'ordre des points; c'est le cas dans l'exemple évoqué. Pour terminer, les symétries qui apparaissent dans les formules des potentiels sont liés à l'ordre des points.

Nous voulons illustrer l'efficacité de la méthode fondée sur le théorème 3.1.5 par l'exemple le plus général d'une marche aléatoire dont la loi du générateur X vérifie $\mathbf{P}(X = (a, b)) = 0$ si $|a| > 1$ ou $|b| > 1$. La figure 1 indique les transitions dont la probabilité est susceptible de ne pas être nulle. Par exemple, cette figure nous indique que $\mathbf{P}(X = (1, 1)) = c_2$ et $\mathbf{P}(X = (0, 2)) = 0$.

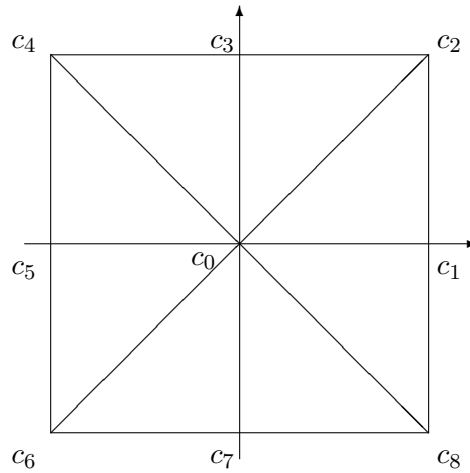


FIGURE 1. Transitions

Nous supposons, bien sûr, que dans la figure 1 on a

$$(9) \quad \sum_{i=0}^8 c_i = 1 \quad \text{et} \quad c_0 \neq 1.$$

Le lemme suivant introduit l'énoncé du théorème 2.1.3.

Lemme 2.1.1. *Sous les hypothèses données par l'équation (9), les polynômes*

$$q_s(Y) = \left(c_7 + 2\sqrt{c_6 c_8} \cos\left(\frac{s+1}{N+2}\pi\right) \right) - \left(1 - c_0 - 2\sqrt{c_1 c_5} \cos\left(\frac{s+1}{N+2}\pi\right) \right) Y \\ + \left(c_3 + 2\sqrt{c_2 c_4} \cos\left(\frac{s+1}{N+2}\pi\right) \right) Y^2$$

où $s \in \{0, \dots, N\}$ admettent deux racines réelles positives. Elles sont séparées par 1 et distinctes de 1 si

$$(10) \quad c_7 > 2\sqrt{c_6 c_8} \quad \text{et} \quad c_3 > 2\sqrt{c_2 c_4}.$$

On notera ces racines $\beta_s \leq 1$ et $\frac{1}{\alpha_s} \geq 1$ sous les hypothèses (10). En posant

$$\Delta_s = \left(1 - c_0 - 2\sqrt{c_1 c_5} \cos\left(\frac{s+1}{N+2}\pi\right) \right)^2 - 4 \left(c_7 + 2\sqrt{c_6 c_8} \cos\left(\frac{s+1}{N+2}\pi\right) \right) \\ \cdot \left(c_3 + 2\sqrt{c_2 c_4} \cos\left(\frac{s+1}{N+2}\pi\right) \right),$$

on a

$$\begin{cases} \beta_s = \frac{1 - c_0 - 2\sqrt{c_1 c_5} \cos\left(\frac{s+1}{N+2}\pi\right) - \sqrt{\Delta_s}}{2(c_3 + 2\sqrt{c_2 c_4} \cos\left(\frac{s+1}{N+2}\pi\right))}, \\ \alpha_s = \frac{2(c_3 + 2\sqrt{c_2 c_4} \cos\left(\frac{s+1}{N+2}\pi\right))}{1 - c_0 - 2\sqrt{c_1 c_5} \cos\left(\frac{s+1}{N+2}\pi\right) + \sqrt{\Delta_s}}. \end{cases}$$

Remarque 2.1.2. Si, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \{0, \dots, N\}$, 1 sépare les racines, alors $c_3 \geq \sqrt{c_2 c_4}$.

Théorème 2.1.3. *On reprend les notations du lemme 2.1.1. Nous supposons vérifiées les relations (9) et (10). Soit $\mathcal{V} = \{(c_2, c_4), (c_1, c_5), (c_8, c_6)\}$. On suppose qu'il existe $\gamma \neq 0$ tel que, pour tout couple $(a, b) \in \mathcal{V}$, ou bien $\frac{b}{a} = \gamma$ ou bien $(a, b) = (0, 0)$.*

(a) Si $\mathcal{V} \neq \{(0, 0)\}$, posons, pour $s \in \{0, \dots, N\}$,

$$\begin{cases} A_s(N) = \frac{\alpha_s}{c_3 + 2\sqrt{c_2 c_4} \cos\left(\frac{s+1}{N+2}\pi\right)}, \\ \theta_s(k, l) = A_s(N) \frac{\alpha_s^{-k} \beta_s^{-l} (\alpha_s \beta_s)^{\max(k, l)}}{(1 - \alpha_s \beta_s) (1 - (\alpha_s \beta_s)^{N+2})} \\ \cdot \left((1 - (\alpha_s \beta_s)^{1 + \min(k, l)}) (1 - (\alpha_s \beta_s)^{(N+1) - \max(k, l)}) \right), \end{cases}$$

alors,

$$(11) \quad g_N((i, k), (j, l)) = \left(\frac{2}{N+2} \right) \gamma^{i-j} \sum_{s=0}^N \theta_s(k, l) \sin\left(\frac{s+1}{N+2}(i+1)\pi\right) \\ \cdot \sin\left(\frac{s+1}{N+2}(j+1)\pi\right).$$

(b) Si $\mathcal{V} = \{(0, 0)\}$ et $c_3 \neq c_7$, alors

$$(12) \quad g_N((i, k), (j, l)) = \theta(k, l) \tau_{i,j}$$

où $\tau_{i,j}$ est le symbole de Kronecker et, en posant $\mu = \min(k, l)$ et $\nu = \max(k, l)$,

$$(13) \quad \theta(k, l) = \frac{\left(c_7^{1+\mu} - c_3^{1+\mu}\right) \left(c_7^{N+1-\nu} - c_3^{N+1-\nu}\right)}{(c_7 - c_3) \left(c_7^{N+2} - c_3^{N+2}\right)} c_3^{\max(0, l-k)} c_7^{\max(0, k-l)}.$$

(c) Si $\mathcal{V} = \{(0, 0)\}$ et $c_3 = c_7$, alors

$$g_N((i, k), (j, l)) = \theta(k, l) \tau_{i,j}$$

où $\tau_{i,j}$ est le symbole de Kronecker et

$$(14) \quad \theta(k, l) = \frac{1}{c_3} \left(\frac{1}{N+2} \right) (1 + \min(k, l))(N + 1 - \max(k, l)).$$

Remarque 2.1.4. Dans le cas $c_0 = 0$, $c_3 = c_7 = 1/2$, le théorème 2.1.3 donne

$$\theta(k, l) = 2 \left(k + 1 - \frac{(k+1)(l+1)}{N+2} \right)$$

pour $k \leq l$. On retrouve le résultat classique du problème de la marche aléatoire simple sur une droite, tel que décrit précisément dans [18, p. 242].

On en déduit une expression asymptotique des potentiels.

Corollaire 2.1.5 (Asymptotique des potentiels). Posons, pour t réel, les fonctions suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(t) = (1 - c_0 - 2\sqrt{c_1 c_5} \cos(\pi t))^2 \\ \quad - 4(1 - c_7 - 2\sqrt{c_6 c_8} \cos(\pi t))(1 - c_3 - 2\sqrt{c_2 c_4} \cos(\pi t)), \\ \alpha(t) = \frac{(1 - c_0 - 2\sqrt{c_1 c_5} \cos(\pi t)) - \sqrt{\Delta(t)}}{2(c_3 + 2\sqrt{c_2 c_4} \cos(\pi t))}, \\ \beta(t) = \frac{2(c_3 + 2\sqrt{c_2 c_4} \cos(\pi t))}{(1 - c_0 - 2\sqrt{c_1 c_5} \cos(\pi t)) + \sqrt{\Delta(t)}}, \\ A(t) = \frac{\alpha(t)}{c_3 + 2c_4 \sqrt{\gamma} \cos(\pi t)}. \end{array} \right.$$

On pose alors

$$\begin{aligned} \theta(k, l)(t) &= A(t) \frac{\alpha(t)^{-k} \beta(t)^{-l} (\alpha(t) \beta(t))^{\max(k, l)}}{(1 - \alpha(t) \beta(t)) (1 - (\alpha(t) \beta(t))^{N+2})} \\ &\quad \cdot \left((1 - (\alpha(t) \beta(t))^{1+\min(k, l)}) (1 - (\alpha(t) \beta(t))^{(N+1)-\max(k, l)}) \right). \end{aligned}$$

Alors,

$$g_N((i, k), (j, l)) = 2\gamma^{i-j} \int_0^1 \theta(k, l)(t) \sin((i+1)\pi t) \cdot \sin((j+1)\pi t) dt + o(1).$$

2.2. Cas de deux particules indépendantes sur une demi-droite

Théorème 2.2.1. *On suppose que les marches aléatoires sur $[0, N]$ des deux particules indépendantes sont respectivement gouvernées par les variables aléatoires X et Y dont les lois sont définies par:*

$$\mathbf{P}(X = i) = c_i, \quad i = -1, 0, 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(Y = i) = d_i, \quad i = -1, 0, 1$$

avec, bien entendu, $c_{-1} + c_0 + c_1 = 1$ et $d_{-1} + d_0 + d_1 = 1$. On note $g_N((i, j), (k, l))$ l'espérance du nombre de visites en k pour la première particule issue de i , et en l pour la deuxième particule issue de j , avant toute sortie de $[0, N]$.

En posant

$$C_2 = [0, \pi]^2, \quad \gamma = \sqrt{c_{-1}/c_1}, \quad \delta = \sqrt{d_{-1}/d_1}, \quad \tilde{\gamma} = \sqrt{c_{-1}c_1} \quad \text{et} \quad \tilde{\delta} = \sqrt{d_{-1}d_1},$$

on a

$$(15) \quad g_N((i, j), (k, l)) = 2^2 \gamma^{(j-l)} \delta^{(i-k)} \Lambda(i, j, k, l)$$

où

$$\Lambda(i, j, k, l) = \int_{C_2} \frac{\sin(i+1)s \sin(j+1)t}{1 - (c_0 + 2\tilde{\gamma} \cos t)(d_0 + 2\tilde{\delta} \cos s)} \sin(k+1)s \sin(l+1)t \, dt ds + o(1).$$

Remarquons que $|\Lambda(i, j, k, l)| < 1$. Dans le prochain corollaire, on note $C_2(N)$ l'espérance du nombre de collisions des deux particules avant sortie du domaine $[0, N]$ qui est donnée dans l'égalité (7).

Corollaire 2.2.2. *Sous les mêmes notations et hypothèses que celles du théorème 2.2.1, il existe $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, des fonctions des probabilités de transition, bornées par rapport à N , et une fonction ρ_5 des probabilités de transition à croissance polynomiale par rapport à N , d'ordre $O(N^5)$, telles que*

$$N^4 C_2(N) = \begin{cases} \rho_1 (\gamma\delta)^{-N} & \text{si } \gamma < 1 \text{ et } \delta < 1, \\ \rho_2 (\gamma\delta)^N & \text{si } \gamma > 1 \text{ et } \delta > 1, \\ \rho_3 \delta^N & \text{si } \gamma < 1, \delta > 1 \text{ et } \delta\gamma > 1, \\ \rho_4 \gamma^{-N} & \text{si } \gamma < 1, \delta > 1 \text{ et } \delta\gamma < 1, \\ \rho_5 & \text{si } \gamma = 1, \delta = 1 \text{ et } c_0 = d_0 = 0. \end{cases}$$

Ces fonctions sont calculables avec la même précision que la fonction Λ du théorème 2.2.1 et leur expression est donnée dans la section 4 à la fin de la démonstration du corollaire.

Remarque 2.2.3. Dans le cas où $\gamma = \delta = 1$, mais $d_0 \neq 1$ ou $c_0 \neq 1$, la somme définie par l'équation (31), paragraphe 4.6.2, montre que E est donné par une somme de N termes qui n'est plus nécessairement d'ordre $O(N^5)$: il est facile de voir que E est toujours d'ordre $O(N^6)$. Il est cependant difficile d'être plus précis.

2.3. Cas de p particules indépendantes sur la demi-droite

On a l'analogie du théorème 2.2.1 sous la forme suivante.

Théorème 2.3.1. *On pose, pour la i -ième particule,*

$$\mathbf{P}(X = j) = c_{i,j}, j = 1, 0, -1 \quad \text{avec} \quad c_{i,-1} + c_{i,0} + c_{i,1} = 1.$$

Conformément au théorème 2.2.1, on note $g_N((i_p, i_{p-1}, \dots, i_1), (j_p, j_{p-1}, \dots, j_1))$ l'espérance du nombre de visites des particules $1, 2, \dots, p$, respectivement issues de $i_p, i_{p-1}, \dots, i_1$ en les points $j_p, j_{p-1}, \dots, j_1$, respectivement, avant toute sortie de $[0, N]$. Alors,

$$g_N((i_p, i_{p-1}, \dots, i_1), (j_p, j_{p-1}, \dots, j_1)) = 2^p \prod_{k=1}^p \gamma_k^{(i_k - j_k)} \Lambda_p$$

où

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \sqrt{c_{k,-1}/c_{k,1}} \quad \text{et} \\ \Lambda_p &= \int_{C_p} \frac{\prod_{k=1}^p \sin(1 + i_k)x_k \sin(1 + j_k)x_k}{1 - \prod_{k=1}^p (c_{i_k,0} + 2\tilde{\gamma}_k \cos x_k)} dx_1 \cdots dx_p + o(1) \end{aligned}$$

avec $C_p = [0, \pi]^p$ et $\tilde{\gamma}_k = \sqrt{c_{k,-1}c_{k,1}}$.

Ce théorème permet un calcul de $\mathcal{C}_p(N)$ (l'espérance du nombre de collisions) analogue à celui du corollaire 2.2.2.

2.4. Famille de marches aléatoires dans le plan.

Il est facile d'extrapoler cette méthode pour traiter le cas de deux ou de plusieurs particules dans le plan de même que d particules dans $\mathbb{R}^n$. En effet, pour rester dans le cas de deux particules dans le plan, il est aisé de comprendre que la matrice de transition sera le produit tensoriel de deux matrices de transition. Si ces matrices sont de la forme de $\mathcal{Q}_2$ (voir l'équation (6)), alors nous aurons un produit tensoriel de quatre matrices que nous saurons inverser.

Définition 2.4.1. Dans la suite, nous noterons $J(a, b)$ les matrices $N \times N$ vérifiant

$$\begin{cases} J(a, b)_{i,j} = 0 & \text{si } |i - j| \neq 1, \\ J(a, b)_{i+1,i} = b, \\ J(a, b)_{i,i+1} = a. \end{cases}$$

Théorème 2.4.2. Soient deux particules dans le carré $[0, N]^2$ suivant des marches aléatoires dont les matrices de transitions $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ vérifient

$$\mathcal{Q}_1 = (d_1 I_N + J(a_1, b_1)) \otimes (\delta_1 I_N + J(\alpha_1, \beta_1))$$

et

$$\mathcal{Q}_2 = (d_2 I_N + J(a_2, b_2)) \otimes (\delta_2 I_N + J(\alpha_2, \beta_2)),$$

avec $a_1 > 0, b_1 > 0, \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, a_2 > 0, b_2 > 0, \alpha_2 > 0$ et $\beta_2 > 0$. Notons $g_N(((i_1, i_2), (i_3, i_4)), ((j_1, j_2), (j_3, j_4)))$ l'espérance du nombre de visites en (j_1, j_2) pour la première particule issue de (i_1, i_2) , et en (j_3, j_4) pour la deuxième particule issue de (i_3, i_4) . Alors

$$g_N(((i_1, i_2), (i_3, i_4)), ((j_1, j_2), (j_3, j_4))) = 2^4 \gamma_1^{i_1 - j_1} \gamma_2^{i_3 - j_3} \zeta_1^{i_2 - j_2} \zeta_2^{i_4 - j_4} \Lambda_4$$

avec

$$\gamma_1 = \sqrt{a_1/b_1}, \gamma_2 = \sqrt{a_2/b_2}, \zeta_1 = \sqrt{\alpha_1/\beta_1}, \zeta_2 = \sqrt{\alpha_2/\beta_2},$$

$$\Lambda_4 = \int_{[0,\pi]^4} \frac{\prod_{k=1}^4 \sin(1+i_k)x_k \sin(1+j_k)x_k}{1 - A(x_1, x_2, x_3, x_4)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 + o(1)$$

et

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3, x_4) = & (d_1 + 2\sqrt{a_1 b_1} \cos x_1)(d_2 + 2\sqrt{a_2 b_2} \cos x_3) \\ & \cdot (\delta_1 + 2\sqrt{\alpha_1 \beta_1} \cos x_2)(\delta_2 + 2\sqrt{\alpha_2 \beta_2} \cos x_4). \end{aligned}$$

Remarque 2.4.3. Supposons qu'une particule dans $[O, N]^2$ a pour coordonnées $(S_{1,n}, S_{2,n})$ à l'instant n où

$$(a) \ S_{1,n} = S_{1,0} + \sum_{i=1}^n X_i, \ S_{2,n} = S_{2,0} + \sum_{i=1}^n Y_i,$$

(b) les X_i et Y_i sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, copies respectives des variables indépendantes X et Y ,

(c) les lois de X et Y sont données par $\mathbf{P}(X = i) = c_i, i = -1, 0, 1$ et aussi $\mathbf{P}(Y = i) = d_i, i = -1, 0, 1$ avec, bien entendu, $c_{-1} + c_0 + c_1 = 1$ et $d_{-1} + d_0 + d_1 = 1$.

Alors, la structure de transition de la particule dans le plan est donnée nécessairement par la figure 2. On n'a pas toujours une telle configuration. Au moins deux cas illustrant ceci peuvent se présenter.

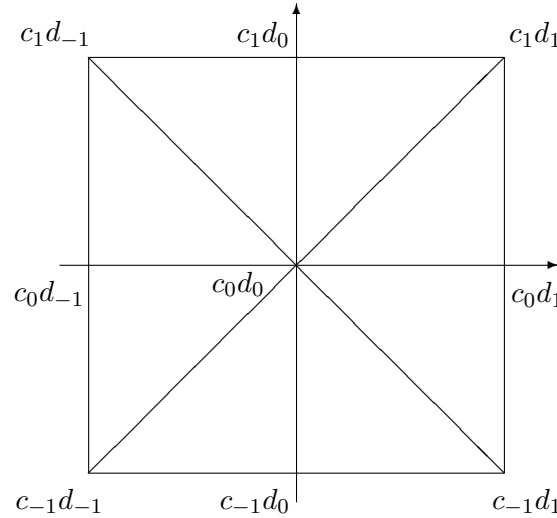


FIGURE 2. Produit de deux marches aléatoires

(a) La marche aléatoire de probabilités de transition

$$\mathbf{P}(X, Y) = (\pm\varepsilon, \pm(1 - \varepsilon)) = 1/4, \ \varepsilon \in \{0, 1\},$$

n'est pas le produit de deux marches aléatoires sur la droite.

(b) Si une des deux marches aléatoires considérées dans le théorème 2.4.2 est en fait le produit de deux marches aléatoires sur $[0, N]$, alors les coefficients de la matrice

$$\mathcal{Q} = (dI_N + J(a, b)) \otimes (\delta I_N + J(\alpha, \beta))$$

sont bien entendu des probabilités, comme dans la partie 2.2. Par contre, les coefficients intervenant dans la formule ci-dessus ne correspondent pas, *a priori*, aux probabilités de passer d'un point de la droite à un autre. Ainsi, si l'on reprend la configuration de la figure 1 de la section 2.1, en supposant

$$c_3 = \lambda_1 c_0, c_4 = \lambda_1 c_5, c_2 = \lambda_1 c_1,$$

$$c_7 = \lambda_2 c_0, c_6 = \lambda_2 c_5, c_8 = \lambda_2 c_1,$$

avec $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, on obtient une matrice de transition de la forme

$$(1 + J(\lambda_2, \lambda_1)) \otimes (c_0 I_N + J(c_5, c_1)).$$

Théorème 2.4.4. Soient p particules dans le carré $[0, N]^2$ suivant des marches aléatoires dont les matrices de transitions $\mathcal{Q}_k$ vérifient

$$\mathcal{Q}_k = (d_k I_N + J(a_k, b_k)) \otimes (\delta_k I_N + J(\alpha_k, \beta_k)),$$

avec $a_k > 0$, $b_k > 0$, $\alpha_k > 0$ et $\beta_k > 0$. Notons

$$g_N = g_N(((i_1, i_2), (i_3, i_4), \dots, (i_{2p-1}, i_{2p})), ((j_1, j_2), (j_3, j_4), \dots, (j_{2p-1}, j_{2p})))$$

l'espérance du nombre de visites en (j_{2s-1}, j_{2s}) pour la s -ième particule issue de (i_{2s-1}, i_{2s}) , pour $s = 1, 2, \dots, p$. On obtient

$$g_N = 2^{2p} \prod_{k=1}^p \gamma_k^{i_{2k-1} - j_{2k-1}} \zeta_k^{i_{2k} - j_{2k}} \Lambda_{2p}$$

avec

$$\gamma_k = \sqrt{a_k/b_k}, \zeta_k = \sqrt{\alpha_k/\beta_k},$$

$$\Lambda_{2p} = \int_{[0, \pi]^4} \frac{\prod_{k=1}^{2p} \sin(1 + i_k) x_k \sin(1 + j_k) x_k}{1 - A(x_1, x_2, \dots, x_k)} dx_1 dx_2 \dots dx_k + o(1)$$

et

$$A(x_1 x_2, \dots, x_4) = \prod_{i=1}^p \left(d_i + 2\sqrt{a_i b_i} \cos(x_{2i-1}) \right) \prod_{i=1}^p \left(\delta_i + 2\sqrt{\alpha_i \beta_i} \cos(x_{2i}) \right).$$

Démonstration des théorèmes 2.4.4 et 2.4.2. La démonstration de ces deux derniers théorèmes est en fait totalement identique à celles des théorèmes 2.2.1 et 2.3.1. Le point de vue est différent mais le cadre mathématique est le même. $\square$

3. Un théorème d'inversion des opérateurs de Toeplitz tronqués à symbole matriciel

Nous allons présenter maintenant l'outil fondamental qui permet l'obtention des énoncés de la section 2.1: le théorème d'inversion (théorème 3.1.5). L'énoncé de ce théorème nécessite l'introduction de quelques notations et concepts.

3.1. Une structure d'inversion

On notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices complexes de taille $(n+1) \times (n+1)$ et $\mathbb{T}$ le tore de dimension 1.

Les trois espaces fondamentaux sont $L^1_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})$, $L^2_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})$ et $L^\infty_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})$ avec

$$\begin{aligned} L^1_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T}) &= \left\{ M : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \|M\|_1 d\sigma < +\infty \right\}, \quad \|M\|_1 = \sum_{i,j} |m_{ij}|, \\ L^2_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T}) &= \left\{ M : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \int_{\mathbb{T}} \|M\|_2^2 d\sigma < +\infty \right\}, \quad \|M\|_2 = [\text{tr}(MM^*)]^{1/2}, \\ L^\infty_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T}) &= \left\{ M : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \sup_{z \in \mathbb{T}} \|M\|_\infty < +\infty \right\}, \quad \|M\|_\infty = \max_{i,j} |m_{ij}|, \end{aligned}$$

où $M = (m_{ij})$ désigne génériquement une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les deux normes $\|\cdot\|_{L^2_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})}$ et $\|\cdot\|_{L^\infty_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})}$ sont respectivement associées aux espaces de fonction $L^2_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})$ et $L^\infty_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})$. Elle définissent précisément ces espaces, à savoir

$$\begin{cases} \|M\|_{L^2_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})} &= \left(\frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \|M\|_2^2 d\sigma \right)^{1/2}, \\ \|M\|_{L^\infty_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})} &= \sup_{z \in \mathbb{T}} \|M\|_\infty, \\ \|M\|_{L^1_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})} &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \|M\|_1 d\sigma. \end{cases}$$

La norme $\|\cdot\|_{L^2_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})}$ est définie par le produit scalaire

$$\langle A, B \rangle_{L^2_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})} = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \text{tr}(AB^*) d\sigma.$$

On notera d_∞ la distance définie par la norme $\|\cdot\|_{L^\infty_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})}$ et $\|\cdot\|_2$ la norme des opérateurs de l'espace vectoriel $L^2_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})$. Le symbole abrégé $\langle \cdot \rangle$ désignera par la suite le produit scalaire $\langle \cdot \rangle_{L^2_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})}$.

Soit M une fonction matricielle de $L^2_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})$. Posons

$$\hat{M}(k) = \int_{\mathbb{T}} \bar{\chi}^k M(\chi) d\sigma,$$

le k -ième coefficient de Fourier matriciel de M . De l'espace $L^2_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T})$, nous sommes amenés à considérer les sous-espaces suivants, dits *espaces de Hardy*.

$$H^+ = \left\{ M \in L^2_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T}) \mid \hat{M}(k) = 0 \text{ si } k < 0 \right\},$$

$$H^- = \left\{ M \in L^2_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{T}) \mid \hat{M}(k) = 0 \text{ si } k \geq 0 \right\},$$

ainsi que $\mathcal{P}_N$, le module sur l'anneau des matrices carrées complexes d'ordre $N+1$ engendré par $\{\chi^k I\}_{0 \leq k \leq N}$ (appelé *l'espace des polynômes matriciels de degré au plus N*) et $\mathcal{P}_{[-N,N]}$, le module sur l'anneau des matrices carrées complexes d'ordre $N+1$ engendré par $\{\chi^k I\}_{-N \leq k \leq N}$. Les opérateurs π_+ , π_- et π_N désigneront respectivement les projections orthogonales de $L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})$ sur H^+ , H^- et $\mathcal{P}_N$.

Définition 3.1.1. Soit $F \in L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})$. On dit que F vérifie *l'hypothèse de décomposition* s'il existe deux fonctions matricielles G_1 et G_2 de $L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})$ vérifiant les trois conditions suivantes:

- (a) $F = G_1 G_2$,
- (b) G_1 et G_2 sont inversibles et commutent,
- (c) $G_1, G_1^{-1}, G_2^*, G_2^{*-1} \in H^+ \cap L_{\mathcal{M}_N}^\infty(\mathbb{T})$.

Supposons donnée une hypothèse de décomposition, avec les notations de la définition 3.1.1. Deux opérateurs associés à cette hypothèse, appelés *opérateurs de Hankel*, jouent un rôle clef dans l'inversion des matrices de Toeplitz. Ce sont les opérateurs suivants:

$$\begin{aligned} H_{\Phi_N} : H^+ &\longrightarrow H^- \\ \psi &\longmapsto \pi_-(\psi \Phi_N) \quad \text{où } \Phi_N = \chi^{N+1} G_1 G_2^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_{\tilde{\Phi}_N} : H^- &\longrightarrow H^+ \\ \varphi &\longmapsto \pi_+(\varphi \tilde{\Phi}_N) \quad \text{où } \tilde{\Phi}_N = \bar{\chi}^{N+1} G_2 G_1^{-1}. \end{aligned}$$

Définition 3.1.2. L'opérateur de Toeplitz tronqué $T_N(F)$ associé au symbole (matriciel) F est défini par la composée suivante:

$$\begin{aligned} T_N(F) : \mathcal{P}_N &\longrightarrow \mathcal{P}_N \\ Q &\longmapsto \pi_N(QF). \end{aligned}$$

Remarque 3.1.3. La matrice des potentiels qui est définie par l'égalité (1) est la matrice associée à l'inverse de l'opérateur de Toeplitz tronqué $T_N(F)$ avec F donné par $F = \sum_{p \in \mathbb{Z}} F_p \chi^p$, F_p étant n'importe quel bloc $(I - \mathcal{Q})_{ij}$ de taille $(N+1) \times (N+1)$ tel que $j - i = p$. En effet, dans la base naturelle $\{\chi^k I\}_{0 \leq k \leq N}$ de $\mathcal{P}_N$, la matrice représentant $T_N(F)$ est $I - \mathcal{Q}$. On généralisera naturellement, dans ce cadre, la notion de fonction génératrice classiquement associée à une marche aléatoire sur la droite, en posant

$$\Phi(z) = \sum_{\mathbb{Z}} Q_k z^k$$

où Q_k est n'importe quelle matrice $Q_{i,j}$ (voir l'équation (3)) telle que $j - i = k$. Dans ce cas, le symbole s'écrit encore $F(\theta) = I - \Phi(e^{i\theta})$.

Définition 3.1.4. On suppose que $F = G_1 G_2$ vérifie l'hypothèse de la définition 3.1.1. On dit que F vérifie l'hypothèse $\mathcal{D}_\infty$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

- (a) $\lim_{N \rightarrow \infty} d_\infty(G_2^{*-1} G_2^{-1}, \mathcal{P}_{[-N, N]}) = 0$ et $N^2 d_\infty(G_1^{*-1} G_1^{-1}, \mathcal{P}_{[-N, N]})$ est bornée,
- (b) $\lim_{N \rightarrow \infty} d_\infty(G_1^{*-1} G_1^{-1}, \mathcal{P}_{[-N, N]}) = 0$ et $N^2 d_\infty(G_2^{*-1} G_2^{-1}, \mathcal{P}_{[-N, N]})$ est bornée.

Théorème 3.1.5. On suppose que F vérifie l'hypothèse de décomposition et l'hypothèse $\mathcal{D}_\infty$ (voir définitions 3.1.1 et 3.1.4).

(a) Pour N assez grand, on a $\|H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\|_2 < 1$, ce qui assure l'inversibilité de l'opérateur $I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}$.

(b) Pour tout polynôme Q de $\mathcal{P}_N$,

$$T_N(F)^{-1}(Q) = \pi_+(Q G_2^{-1}) G_1^{-1} - \pi_+ \left\{ \left((I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N})^{-1} \pi_+ \left[\pi_+(Q G_2^{-1}) \tilde{\Phi}_N \right] \right) \Phi_N \right\} G_1^{-1}.$$

Ce théorème est démontré dans la section 7.1.

3.2. Vers une extension aux marches aléatoires à transitions non bornées dans le plan

Il s'agit ici d'illustrer le fait que la structure précédente permet de traiter des marches à transitions non bornées dans la mesure où le symbole associé à la marche aléatoire (voir définition 3.1.2 et remarque 3.1.3) vérifie les hypothèses du théorème 3.1.4. Des catégories intéressantes de marches aléatoires en dimension 1 et à transitions non bornées ont été étudiées dans les travaux cités. Nous allons aussi considérer l'exemple suivant obtenu par perturbation d'une marche aléatoire en dimension 1. Soit X la variable aléatoire génératrice. Sa loi est donnée par

$$(16) \quad \mathbf{P}(X = (a, b)) = \begin{cases} d_i & \text{si } (a, b) = (0, i), i \geq -p, \\ c_j & \text{si } (a, b) = (j, 0), j \in \{-1, 1\}. \end{cases}$$

avec

$$\sum_{i=-p}^{\infty} d_i + c_{-1} + c_1 = 1$$

et pour tout i , $0 \leq d_i \leq 1$ et $0 \leq c_{-1}, c_1 \leq 1$.

Proposition 3.2.1. *Soit $z \mapsto \Phi(z)$ la fonction génératrice associée à la marche aléatoire définie par les équations (16) (voir la remarque 3.1.3). Alors le symbole $F(\theta) = I - \Phi(e^{i\theta})$ vérifie l'hypothèse de décomposition $\mathcal{D}_\infty$ (voir définition 3.1.4).*

Exemple 3.2.2. Soient $\varepsilon, p, q \in]0, 1[$ tels que $p + q < 1$. Les probabilités sont définies par

$$d_i = qp^{i+1}, \quad c_{-1} = \varepsilon \frac{1 - (p + q)}{1 - p} \quad \text{et} \quad c_1 = (1 - \varepsilon) \frac{1 - (p + q)}{1 - p}.$$

Cette marche vérifie (selon la proposition 3.2.1) l'hypothèse de décomposition ainsi que l'hypothèse $\mathcal{D}_\infty$.

Toutes les justifications des résultats de cette sous-section se trouvent dans la section 8.

4. Démonstration des résultats de la section 2.2

4.1. Calcul de la matrice de transition

On adopte les notations de l'introduction. On doit étudier $\mathcal{Q} = T_Y \otimes T_X$ avec

$$\begin{cases} T_X(k, k) = c_0, & k \in [1, N], \\ T_X(k, k + 1) = c_1, & k \in [1, N - 1], \\ T_X(k + 1, k) = c_{-1}, \\ T_X(u, v) = 0 & \text{si } |u - v| > 1. \end{cases}$$

De même,

$$\begin{cases} T_Y(k, k) = d_0, & k \in [1, N], \\ T_Y(k, k+1) = d_1, & k \in [1, N-1], \\ T_Y(k+1, k) = d_{-1}, \\ T_Y(u, v) = 0 & \text{si } |u - v| > 1. \end{cases}$$

On commence par diagonaliser les matrices T_X et T_Y . Les valeurs propres et les vecteurs propres du laplacien discret (sur $[0, N]$) vont jouer un rôle central dans cette diagonalisation. La k -ième valeur propre est $\cos((k+1/N+2)\pi)$ et apparaît dans les matrices ci-dessous notées Λ_X et Λ_Y . Rappelons que le vecteur propre associé à la valeur propre $\cos((k+1/N+2)\pi)$ est $v_k = (v_k(0), \dots, v_k(N))$, voir l'équation (18).

Posons Λ_X et Λ_Y les matrices diagonales telles que

$$(\Lambda_X)_{k,k} = \lambda_X(k) \quad \text{et} \quad (\Lambda_Y)_{k,k} = \lambda_Y(k),$$

avec

$$(17) \quad \lambda_X(k) = 2\sqrt{c_1 c_{-1}} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right) \quad \text{et} \quad \lambda_Y(k) = 2\sqrt{d_1 d_{-1}} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right).$$

On définit de même $\mathcal{P}_X = \Delta_{X,N+1}\tilde{Q}$ et $\mathcal{P}_Y = \Gamma_{Y,N+1}\tilde{Q}$ avec

$$(18) \quad \tilde{Q}_{i,k} = v_k(i) = \sqrt{\frac{2}{N+2}} \sin\left(\frac{(k+1)(i+1)\pi}{N+2}\right), \quad i = 0, \dots, N, k = 0, \dots, N,$$

où $\Delta_{X,N+1}$ et $\Gamma_{Y,N+1}$ sont les matrices diagonales de termes diagonaux γ^{i+1} et δ^{i+1} avec $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ et, rappelons-le,

$$\delta = \sqrt{\frac{d_{-1}}{d_1}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{c_{-1}}{c_1}}.$$

Nous pouvons alors définir les matrices $J(c_{-1}, c_1)$ et $J(d_{-1}, d_1)$ par

$$J(c_{-1}, c_1) = \mathcal{P}_X \Lambda_X \mathcal{P}_X^{-1},$$

et

$$J(d_{-1}, d_1) = \mathcal{P}_Y \Lambda_Y \mathcal{P}_Y^{-1}.$$

On a alors

$$(19) \quad T_X = c_0 I + J(c_{-1}, c_1) = \mathcal{P}_X (c_0 I_N + \Lambda_X) \mathcal{P}_X^{-1}$$

de même que

$$(20) \quad T_Y = d_0 I + J(d_{-1}, d_1) = \mathcal{P}_Y (d_0 I_N + \Lambda_Y) \mathcal{P}_Y^{-1}.$$

La démonstration des égalités (19) et (20) est donnée par le lemme 6.1.1. Si l'on pose maintenant $T'_X = c_0 I_N + \Lambda_X$ et $T'_Y = d_0 I_N + \Lambda_Y$, on peut écrire

$$T_Y \otimes T_X = (\mathcal{P}_Y \otimes \mathcal{P}_X) (T'_Y \otimes T'_X) (\mathcal{P}_Y^{-1} \otimes \mathcal{P}_X^{-1}).$$

Il est clair que l'on a

$$(\mathcal{P}_Y \otimes \mathcal{P}_X) (\mathcal{P}_Y^{-1} \otimes \mathcal{P}_X^{-1}) = I_{(N+1)^2},$$

de sorte que

$$(I_{(N+1)^2} - \mathcal{Q})^{-1} = (\mathcal{P}_Y \otimes \mathcal{P}_X) (I_{(N+1)^2} - T'_Y \otimes T'_X)^{-1} (\mathcal{P}_Y^{-1} \otimes \mathcal{P}_X^{-1}).$$

Examinons $I_{(N+1)^2} - T'_Y \otimes T'_X = T'_N$. On a

$$T'_N = I_{(N+1)^2} - (d_0 I_N + \Lambda_Y) \otimes (c_0 I_N + \Lambda_X).$$

En développant, nous trouvons que T'_N est la différence entre la matrice $I_{(N+1)^2}$ et la matrice diagonale par blocs dont la diagonale est constituée des $N + 1$ blocs $(d_0 + \lambda_Y)T'_X$. Autrement dit, T'_N est une matrice diagonale $(N + 1)^2 \times (N + 1)^2$ dont le coefficient $(T'_N)_{p,p}$ vaut

$$1 - (d_0 + \lambda_Y(k)) (c_0 + \lambda_X(l))$$

avec $p = (N + 1)k + l$.

4.2. Calcul des coefficients de $\mathcal{P}_Y \otimes \mathcal{P}_X$

Nous allons d'abord rappeler le lemme d'algèbre linéaire suivant.

Lemme 4.2.1. Soient A et B deux matrices $(N + 1) \times (N + 1)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $A = (a_{ij})_{0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N}$ et $B = (b_{ij})_{0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N}$. Alors on a $(A \otimes B)_{uv} = a_j b_{ik}$ avec $u = j(N + 1) + i$ et $v = l(N + 1) + k$.

La preuve de ce lemme est tout à fait classique, elle sera donc laissée au lecteur.

Remarque 4.2.2. En reprenant les notations du lemme 4.2.1, le couple (j, l) représente les coordonnées du bloc dans $A \otimes B$ alors que le couple (i, k) représente les coordonnées dans le bloc (j, l) . Ainsi, si $A \otimes B$ représente une matrice de transition on a, avec les conventions de l'équation (3),

$$(A \otimes B)_{uv} = Q_1((i, j), (k, l))$$

qui est la probabilité de transition du point (i, j) au point (k, l) .

Par définition nous avons aussi

$$(\mathcal{P}_Y)_{lk} = \delta^{l+1} v_k(l) \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}_X)_{lk} = \gamma^{l+1} v_k(l).$$

Le lemme 4.2.1 nous permet alors d'obtenir les coefficients de $\mathcal{P}_Y \otimes \mathcal{P}_X$. On a

$$(\mathcal{P}_Y \otimes \mathcal{P}_X)_{uv} = (\mathcal{P}_Y)_{ik} (\mathcal{P}_X)_{jl}$$

avec $u = (N + 1)i + j$ et $v = (N + 1)k + l$. Ceci permet finalement d'écrire

$$(\mathcal{P}_Y \otimes \mathcal{P}_X)_{uv} = \delta^{i+1} \gamma^{j+1} v_k(i) v_l(j).$$

4.3. Calcul des coefficients de $(\mathcal{P}_Y \otimes \mathcal{P}_X)^{(-1)}$

Puisque l'on a

$$(\mathcal{P}_Y \otimes \mathcal{P}_X)^{(-1)} = (\mathcal{P}_Y)^{(-1)} \otimes (\mathcal{P}_X)^{(-1)},$$

le lemme 4.2.1 nous permet de calculer les coefficients de ce produit tensoriel. Par définition, on a

$$(\mathcal{P}_Y)^{(-1)} = \tilde{Q}^{-1} \Delta_{X, N+1}^{-1}$$

et donc,

$$(\mathcal{P}_Y)_{st}^{(-1)} = \sum_{h=0}^N \tilde{Q}_{sh}^{-1} (\Delta_{X,N+1}^{-1})_{ht} = \tilde{Q}_{st}^{-1} \delta^{(-1-t)} = v_s(t) \delta^{(-1-t)}$$

puisque $\tilde{Q}$ est une matrice orthogonale. De même,

$$(\mathcal{P}_X)_{st}^{(-1)} = v_s(t) \gamma^{(-1-t)}.$$

Par conséquent, si u et v sont des entiers tels que $0 \leq u < (N+1)^2$ et $0 \leq v < (N+1)^2$ avec $u = i(N+1) + j$, $v = k(N+1) + l$ et $0 \leq k, l, i, j \leq N$, nous pouvons écrire

$$(\mathcal{P}_Y \otimes \mathcal{P}_X)_{uv}^{(-1)} = (\mathcal{P}_Y)_{ik}^{(-1)} (\mathcal{P}_X)_{jl}^{(-1)} = \delta^{-(1+k)} \gamma^{-(1+l)} v_i(k) v_j(l).$$

4.4. Calcul des coefficients de $(I_{(N+1)^2} - T_Y \otimes T_X)^{-1}$

Comme plus haut, posons $u = i(N+1) + j$ et $v = k(N+1) + l$ et calculons $(I_{(N+1)^2} - T_Y \otimes T_X)_{uv}^{-1}$. Pour ce faire, remarquons tout d'abord que si a désigne un entier tel que $0 \leq a < (N+1)^2$, on a

$$(I_{(N+1)^2} - T'_Y \otimes T'_X)_{aa}^{-1} = \frac{1}{1 - (d_0 + \lambda_Y(x))(c_0 + \lambda_X(y))}$$

avec $a = x(N+1) + y$ et $0 \leq x, y \leq N$. D'où, en posant

$$\left((I_{(N+1)^2} - T'_Y \otimes T'_X)^{-1} \otimes (\mathcal{P}_Y \otimes \mathcal{P}_X)^{-1} \right)_{av} = T_{av}^{-1}$$

pour $v = k(N+1) + l$, il vient

$$\begin{aligned} T_{av}^{-1} &= \sum_{s=0}^{(N+1)^2-1} (I_{(N+1)^2} - T'_Y \otimes T'_X)_{as}^{-1} (\mathcal{P}_Y \otimes \mathcal{P}_X)_{sv}^{-1} \\ &= (I_{(N+1)^2} - T'_Y \otimes T'_X)_{aa}^{-1} (\mathcal{P}_Y \otimes \mathcal{P}_X)_{av}^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{1 - (d_0 + \lambda_Y(x))(c_0 + \lambda_X(y))} \right) \delta^{-(1+k)} \gamma^{-(1+l)} v_x(k) v_y(l). \end{aligned}$$

Ceci donne finalement, pour $u = i(N+1) + j$,

$$\begin{aligned} (I_{(N+1)^2} - T_Y \otimes T_X)_{uv}^{-1} &= \sum_{s=0}^{(N+1)^2-1} (\mathcal{P}_Y \otimes \mathcal{P}_X)_{us} T_{sv}^{-1} \\ &= \sum_{x,y=0}^N \delta^{i+1} \gamma^{j+1} v_x(i) v_y(j) \left(\frac{\delta^{-(1+k)} \gamma^{-(1+l)} v_x(k) v_y(l)}{1 - (d_0 + \lambda_Y(x))(c_0 + \lambda_X(y))} \right). \end{aligned}$$

en n'oubliant pas que $s = x(N+1) + y$. Ceci peut s'écrire

$$\begin{aligned} &(I_{(N+1)^2} - T_Y \otimes T_X)_{uv}^{-1} \\ &= \frac{4}{(N+2)^2} \sum_{0 \leq x, y \leq N} \left[\frac{\delta^{i-k} \gamma^{j-l} s(x, N, i) s(y, N, j) s(x, N, k) s(y, N, l)}{1 - \left(d_0 + 2\sqrt{d_{-1}d_1} \cos\left(\frac{x+1}{N+2}\pi\right) \right) \left(c_0 + 2\sqrt{c_{-1}c_1} \cos\left(\frac{y+1}{N+2}\pi\right) \right)} \right] \end{aligned}$$

où, pour $t = i, j, k, l$ et $z = x, y$, on a posé $s(z, N, t) = \sin\left(\frac{z+1}{N+2}(t+1)\pi\right)$.

4.5. Asymptotique des potentiels

Un couple de particules sur la droite peut être représenté par un point (a, b) du plan réel, a et b représentant les abscisses des deux particules. D'après la remarque 4.2.2, dans l'expression

$$(I_{(N+1)^2} - T_Y \otimes T_X)_{j(N+1)+i, l(N+1)+k},$$

le couple (i, k) correspond à une transition de la particule numéro un de l'état i à l'état k , et le couple (j, l) correspond à une transition de la particule numéro deux de l'état j à l'état l ; c'est-à-dire que le point du plan passe de l'état (i, j) à l'état (k, l) . On peut donc légitimement écrire

$$g_N((i, j), (k, l)) = (I_{(N+1)^2} - T_Y \otimes T_X)_{j(N+1)+i, l(N+1)+k}^{-1}.$$

En faisant apparaître une intégrale de Riemann, on obtient l'asymptotique

$$g_N((i, j), (k, l)) = 4\delta^{i-k}\gamma^{j-l} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin((i+1)t) \sin((k+1)t) \sin((j+1)t') \sin((l+1)t')}{1 - (d_0 + \lambda_Y(t'))(c_0 + \lambda_X(t))} dt dt' + o(1)$$

où $\lambda_X(t) = 2\tilde{\gamma} \cos t$ et $\lambda_Y(t') = 2\tilde{\delta} \cos t'$, par analogie avec la notation de l'équation (17).

4.6. Espérance du nombre de collisions

Il nous faut d'abord établir le résultat suivant.

Proposition 4.6.1. *L'espérance du nombre de collisions dans le réseau $\mathcal{R} = [O, N]$ avant sortie de l'une des deux particules, si chaque point de départ est équiprobable, est égale à*

$$\mathcal{C}_2(N) = \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{(i,j) \in [O,N]^2} \sum_{l=0}^N \mathcal{G}((i, j), (l, l)).$$

Démonstration. On voit la marche aléatoire des deux particules dans $\mathcal{R}$ comme la marche aléatoire d'une particule dans $\mathcal{R}^2$. On note A le point générique de $\mathcal{R}^2$, Δ sa diagonale et (l, l) un point de Δ . Si T est le temps d'arrêt associé à la marche aléatoire dans $\mathcal{R}^2$, alors le nombre de collisions en (l, l) , avant sortie de $\mathcal{R}$, est

$$N_l = \sum_{A \in \mathcal{R}^2} \sum_{n \geq 0} I_{\{\{A\} \times \{(l, l)\} \times]n, +\infty[\}}(S_0, S_n, T).$$

L'espérance de la variable aléatoire $N(l)$ est alors

$$\begin{aligned} E(N_l) &= \sum_{A \in \mathcal{R}^2} \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}((S_n = (l, l)) \cap (T > n) \cap (S_0 = A)) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{R}^2} \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}((S_n = (l, l)) \cap (T > n) | S_0 = A) \mathbf{P}(S_0 = A) \\ &= \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{A \in \mathcal{R}^2} \sum_{n \geq 0} Q_n(A, (l, l)), \end{aligned}$$

à cause de la loi uniforme de la condition initiale. En faisant la somme sur l , on obtient l'égalité annoncée. $\square$

Si maintenant $E(i, j)$ désigne l'espérance du nombre de collisions en partant d'un état (i, j) , on a $E(i, j) = \sum_{l=0}^N g_N((i, j), (l, l))$. Posons

$$t_N = \frac{x+1}{N+2}\pi, \quad t'_N = \frac{y+1}{N+2}\pi$$

et

$$A_{ij}(t_N, t'_N) = \frac{\sin((i+1)t_N) \sin((j+1)t'_N)}{1 - (d_0 + \lambda_Y(t'_N))(c_0 + \lambda_X(t_N))}.$$

Les résultats précédents nous permettent d'écrire

$$E(i, j) = 4 \frac{\delta^i \gamma^j}{(N+2)^2} \sum_{0 \leq x, y \leq N} A_{ij}(t_N, t'_N) \sum_{l=0}^N (\delta\gamma)^{-l} \sin(t_N(l+1)) \sin(t'_N(l+1)).$$

Ceci s'écrit aussi comme

$$E(i, j) = 2 \frac{\delta^i \gamma^j}{(N+2)^2} \sum_{0 \leq x, y \leq N} A_{ij}(t_N, t'_N) (S_{1,N}(t_N, t'_N) - S_{2,N}(t_N, t'_N)),$$

en posant

$$S_{1,N} = \sum_{l=0}^N (\delta\gamma)^{-l} \cos((t'_N - t_N)(l+1))$$

et

$$S_{2,N}(t_N, t'_N) = \sum_{l=0}^N (\delta\gamma)^{-l} \cos((t'_N + t_N)(l+1)).$$

On évalue $S_{1,N}$ et $S_{2,N}$ en distinguant deux cas.

(a) Premier cas: $t_N \neq t'_N$, c'est-à-dire $x \neq y$.

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} (21) \quad S_{1,N}(t_N, t'_N) &= \Re \left(\sum_{l=0}^N (\delta\gamma)^{-l} e^{i(t'_N - t_N)(l+1)} \right) \\ &= \Re \left(e^{i(t'_N - t_N)} \left(1 - \frac{e^{i(t'_N - t_N)(N+1)}}{(\delta\gamma)^{N+1}} \right) \frac{1}{1 - (e^{i(t'_N - t_N)} / (\delta\gamma))} \right) \\ &= \frac{1}{(\gamma\delta)^N} \Re \left(e^{i(t'_N - t_N)} \left((\delta\gamma)^{N+1} - e^{i(t'_N - t_N)(N+1)} \right) (\delta\gamma - e^{-i(t'_N - t_N)}) \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{1 + (\delta\gamma)^2 - 2\delta\gamma \cos(t'_N - t_N)} \right) \\ &= \left(-(\gamma\delta)^{N+1} + (\gamma\delta)^{N+2} \cos(t'_N - t_N) - (\gamma\delta)(-1)^{(y-x)} + (-1)^{(y-x)} \cos(t'_N - t_N) \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{(\gamma\delta)^{-N}}{1 + (\delta\gamma)^2 - 2\delta\gamma \cos(t'_N - t_N)} \right) \\ &= \left((\gamma\delta)^2 \cos(t'_N - t_N) - (\gamma\delta) - (\gamma\delta)^{-(N-1)}(-1)^{(y-x)} + (\gamma\delta)^{-N}(-1)^{(y-x)} \cos(t'_N - t_N) \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{1 + (\delta\gamma)^2 - 2\delta\gamma \cos(t'_N - t_N)} \right). \end{aligned}$$

On a de même

$$(22) \quad S_{2,N} = \left(\frac{1}{1 + (\delta\gamma)^2 - 2\delta\gamma \cos(t'_N + t_N)} \right) \left((\gamma\delta)^2 \cos(t'_N + t_N) - (\gamma\delta) - (\gamma\delta)^{-(N-1)}(-1)^{(y-x)} + (\gamma\delta)^{-N}(-1)^{(y-x)} \cos(t_N + t'_N) \right).$$

(b) Deuxième cas: $t_N = t'_N$.

L'expression de $S_{2,N}$ reste inchangée: on remplace dans l'équation (22) t'_N par t_N . Par contre, on ne peut utiliser le calcul précédent pour S_1 : on repart de l'équation (21). Lorsque $\delta\gamma = 1$, on a

$$(23) \quad S_{1,N} = N + 1.$$

Et lorsque $\delta\gamma \neq 1$, on obtient

$$(24) \quad S_{1,N} = \frac{1 - (\delta\gamma)^{-(N+1)}}{1 - (\delta\gamma)^{-1}}.$$

4.6.1. Calcul de $S_{1,N}(t_N, t'_N) - S_{2,N}(t_N, t'_N)$

Posons $\Phi(t_N, t'_N) = S_{1,N}(t_N, t'_N) - S_{2,N}(t_N, t'_N)$. On est amené à vérifier trois cas séparément. Chacun de ces trois cas est séparé en certains sous-cas.

(a) Cas où $\delta\gamma > 1$, c'est-à-dire $d_{-1}c_{-1} > d_1c_1$. Si $t_N \neq t'_N$, on obtient

$$(25) \quad \Phi(t_N, t'_N) = \frac{(\gamma\delta)^2 \cos(t'_N - t_N) - \gamma\delta}{1 + (\gamma\delta)^2 - 2\gamma\delta \cos(t'_N - t_N)} - \frac{(\gamma\delta)^2 \cos(t'_N + t_N) - \gamma\delta}{1 + (\gamma\delta)^2 - 2\gamma\delta \cos(t'_N + t_N)} + O((\delta\gamma)^{-N}).$$

Si $t_N = t'_N$, on a

$$(26) \quad \Phi(t_N, t_N) = \frac{1}{1 - (\delta\gamma)^{-1}} - \frac{(\delta\gamma)^2 \cos 2t_N - \delta\gamma}{1 + (\delta\gamma)^2 - 2\delta\gamma \cos 2t_N} + O((\delta\gamma)^{-N}).$$

(b) Cas où $\delta\gamma < 1$, c'est-à-dire $d_{-1}c_{-1} < d_1c_1$. Si $t_N \neq t'_N$, on obtient

$$(27) \quad \Phi(t_N, t'_N) = (\delta\gamma)^{-N} \Psi_1(t_N, t'_N) + O(1)$$

avec

$$\Psi_1(t_N, t'_N) = (-1)^{y-x} \left(\frac{-\delta\gamma + \cos(t'_N - t_N)}{1 + (\delta\gamma)^2 - 2\delta\gamma \cos(t'_N - t_N)} - \frac{-\delta\gamma + \cos(t'_N + t_N)}{1 + (\delta\gamma)^2 - 2\delta\gamma \cos(t'_N + t_N)} \right).$$

Si $t_N = t'_N$, alors on note de même

$$(28) \quad \Phi(t_N, t_N) = (\delta\gamma)^{-N} \Psi_2(t_N, t_N) + O(1)$$

avec

$$\Psi_2(t_N, t_N) = \frac{1}{1 - \delta\gamma} - (-1)^{y-x} \left(\frac{-\delta\gamma + \cos(2t_N)}{1 + (\delta\gamma)^2 - 2\delta\gamma \cos(2t_N)} \right).$$

(c) Cas où $\delta\gamma = 1$, c'est-à-dire $d_{-1}c_{-1} = d_1c_1$.

Si $t_N \neq t'_N$, on a immédiatement $\Phi(t_N, t'_N) = 0$. Si $t_N = t'_N$, alors

$$(29) \quad \Phi(t_N, t'_N) = N + 2.$$

On est ramené à calculer, avec la notation du corollaire 2.2.2,

$$E = (N + 2)^2 \sum_{i,j} E_{i,j} = (N + 2)^2 (N + 1)^2 \mathcal{C}_2(N).$$

4.6.2. Calcul de E

On a

$$E = 2 \sum_{0 \leq x, y \leq N} \sum_{i,j} \delta^i \gamma^j \frac{\sin(i+1)t_N \sin(j+1)t'_N}{1 - (d_0 + \lambda_Y(t'_N))(c_0 + \lambda_X(t_N))} (S_{1,N}(t_N, t'_N) - S_{2,N}(t_N, t'_N)).$$

Nous avons donc à calculer la quantité

$$\begin{aligned} A(t_N, t'_N) &= \sum_{i=0}^N \delta^i \sin((i+1)t_N) \sum_{j=0}^N \gamma^j \sin((j+1)t'_N) \\ &= \Im \left(\chi(t_N) \sum_{i=0}^N (\delta \chi(t_N))^i \right) \Im \left(\chi(t'_N) \sum_{j=0}^N (\gamma \chi(t'_N))^j \right) \\ &= \Im \left(\chi(t_N) \frac{1 - \delta^{N+1} \chi(t_N)^{(N+1)}}{1 - \delta \chi(t_N)} \right) \Im \left(\chi(t'_N) \frac{1 - \gamma^{N+1} \chi(t'_N)^{(N+1)}}{1 - \gamma \chi(t'_N)} \right). \end{aligned}$$

Posons

$$\nu(t_N, t'_N) = \frac{1}{(1 + \delta^2 - 2\delta \cos t_N)(1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos t'_N)}$$

et écrivons

$$A(t_N, t'_N) = \nu(t_N, t'_N) A_1(t_N) A_2(t'_N)$$

avec

$$A_1(t_N) = \Im \left(\chi(t_N) (1 - \delta \bar{\chi}(t_N)) (1 - \delta^{N+1} \chi^{N+1}(t_N)) \right)$$

et

$$A_2(t'_N) = \Im \left(\chi(t'_N) (1 - \gamma \bar{\chi}(t'_N)) (1 - \gamma^{N+1} \chi^{N+1}(t'_N)) \right).$$

On obtient immédiatement

$$A_1(t_N) = \delta^{N+2} (-1)^x \sin t_N + \sin(t_N)$$

et

$$A_2(t'_N) = \gamma^{N+2} (-1)^y \sin t'_N + \sin(t'_N).$$

Et finalement,

$$\begin{aligned} A(t_N, t'_N) &= \nu(t_N, t'_N) \left(\delta^{N+2} (-1)^x \sin t_N + \sin(t_N) \right) \\ &\quad \cdot \left(\gamma^{N+2} (-1)^y \sin t'_N + \sin(t'_N) \right). \end{aligned}$$

On a donc obtenu la quantité E sous la forme

$$(30) \quad E = 2 \sum_{0 \leq x, y \leq N} \frac{A(t_N, t'_N) (S_{1,N}(t_N, t'_N) - S_{2,N}(t_N, t'_N))}{1 - (d_0 + \lambda_Y(t_N))(c_0 + \lambda_X(t'_N))}.$$

Différents cas sont maintenant à envisager pour le calcul de E .

(a) Cas où $0 < \delta < 1$ et $0 < \gamma < 1$. On a alors $\delta\gamma < 1$ et on obtient

$$A(t_N, t'_N) = \nu(t_N, t'_N) \left(\sin t_N \sin t'_N + O\left(\max(\delta, \gamma)^{N+1}\right) \right).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} E &= 2(\delta\gamma)^{-N} \sum_{\substack{0 \leq x, y \leq N \\ x \neq y}} \frac{\nu(t_N, t'_N) \sin t_N \sin t'_N}{1 - (d_0 + \tilde{\delta} \cos t'_N)(c_0 + \tilde{\gamma} \cos t_N)} \Psi_1(t_N, t'_N) \\ &+ \sum_{x=0}^N (\delta\gamma)^{-N} \frac{\nu(t_N, t_N) \sin^2 t_N}{1 - (d_0 + \tilde{\delta} \cos t_N)(c_0 + \tilde{\gamma} \cos t_N)} \Psi_1(t_N, t_N) + N^2 O\left(\min(\delta, \gamma)^{-N}\right) \end{aligned}$$

où les différentes expressions de $\Psi_1(t_N, t'_N)$ sont données par les équations (27) et (28).

(b) Cas où $\delta > 1$ et $\gamma > 1$. On est alors dans le cas $\delta\gamma > 1$ et on obtient

$$A(t_N, t'_N) = \nu(t_N, t'_N) (\delta\gamma)^{N+2} (-1)^{(x+y)} \sin t_N \sin t'_N + O\left(\max(\delta, \gamma)^{N+2}\right).$$

On obtient alors par le même calcul que le précédent

$$\begin{aligned} E &= 2(\delta\gamma)^{N+2} \sum_{\substack{0 \leq x, y \leq N \\ x \neq y}} \frac{(-1)^{x+y} \nu(t_N, t'_N) \sin t_N \sin t'_N}{1 - (d_0 + \tilde{\delta} \cos t'_N)(c_0 + \tilde{\gamma} \cos t_N)} \Phi(t_N, t'_N) \\ &+ \sum_{x=0}^N (\delta\gamma)^{N+2} \frac{(-1)^{x+y} \nu(t_N, t_N) \sin^2 t_N}{1 - (d_0 + \tilde{\delta} \cos t_N)(c_0 + \tilde{\gamma} \cos t_N)} \Phi(t_N, t_N) + N^2 O\left(\max(\delta, \gamma)^N\right) \end{aligned}$$

où les différentes expressions de $\Phi(t_N, t'_N)$ sont données par les équations (25) et (26).

(c) Cas où $\delta = \gamma = 1$ et $c_0 = d_0 = 1$. On a déjà vu que pour $t_N \neq t'_N$, on a $S_{1,N} - S_{2,N} = 0$. Il suffit donc de calculer $A(t_N, t_N)$. Par un calcul immédiat, on obtient

$$A(t_N, t_N) = \frac{\sin^2 t_N}{4(1 - \cos t_N)^2} (1 + (-1)^x)^2,$$

d'où

$$(31) \quad E = 2(N+2) \sum_{\substack{x=0 \\ x \text{ pair}}}^N \left(\frac{\sin t_N}{1 - \cos t_N} \right)^2 \frac{1}{1 - (d_0 + 2d_1 \cos t_N)(c_0 + 2c_1 \cos t_N)}.$$

Remarquons que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ est décroissante sur $(0, \pi)$. Ceci donne une majoration de E de la forme

$$\begin{aligned} E &\leq 2(N+2) \left(\frac{\sin \frac{\pi}{N+2}}{1 - \cos \frac{\pi}{N+2}} \right)^2 \sum_{\substack{x=0 \\ x \text{ pair}}}^N \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{x+1}{N+2} \pi \right)} \\ &= O(N^3) \sum_{\substack{x=0 \\ x \text{ pair}}}^N \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{x+1}{N+2} \pi \right)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{x=0 \\ x \text{ pair}}}^N \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x+1}{N+2}\pi\right)} &= \sum_{p=0}^{[N/2]} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2p+1}{N+2}\pi\right)} \\
&= 2 \sum_{p=0}^{[N/4]} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2p+1}{N+2}\pi\right)} \\
&= \frac{2}{\sin^2\left(\frac{1}{N+2}\pi\right)} + 2 \sum_{p=1}^{[N/4]} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2p+1}{N+2}\pi\right)} \\
&\leq \frac{2}{\sin^2\left(\frac{1}{N+2}\pi\right)} + (N+2) \sum_{p=1}^{[N/4]} \int_{\frac{2p-1}{N+2}}^{\frac{2p+1}{N+2}} \frac{1}{\sin^2 t} dt \\
&= \frac{2}{\sin^2\left(\frac{1}{N+2}\pi\right)} + (N+2) \int_{\frac{\pi}{N+2}}^{\frac{[N/2]+1}{N+2}\pi} \frac{1}{\sin^2 t} dt \\
&= \frac{2}{\sin^2\left(\frac{1}{N+2}\pi\right)} + (N+2) \left(\cot\left(\frac{\pi}{N+2}\right) - \cot\left(\frac{[N/2]+1}{N+2}\pi\right) \right) \\
&= O(N^2).
\end{aligned}$$

On en déduit que $E = O(N^5)$.

(d) Cas où $\delta > 1$ et $0 < \gamma < 1$. Deux sous-cas sont à envisager.

(i) Premier sous-cas: $\delta > 1$, $\gamma < 1$ et $\delta\gamma > 1$. On a alors

$$A(t_N, t'_N) = \nu(t_N, t'_N)(-1)^x \delta^{N+2} \sin t_N \sin(t'_N) + O((\delta\gamma)^N).$$

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}
E &= 2 \sum_{\substack{0 \leq x, y \leq N \\ x \neq y}} \frac{\nu(t_N, t'_N)(-1)^x \delta^{N+2} \sin t_N \sin(t'_N)}{1 - (d_0 + \tilde{\delta} \cos t'_N)(c_0 + \tilde{\gamma} \cos t_N)} \Phi(t_N, t'_N) + O(N^2(\delta\gamma)^N) \\
&\quad + \sum_{0 \leq x \leq N} \left((-1)^x \delta^{N+2} \frac{\sin^2(t_N) \nu(t_N, t_N)}{1 - (d_0 + \tilde{\delta} \cos t_N)(c_0 + \tilde{\gamma} \cos t_N)} + O((\delta\gamma)^N) \right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{1 - (\delta\gamma)^{-1}} - S_2(t_N, t_N) + O((\delta\gamma)^{-N}) \right).
\end{aligned}$$

Pour résumer, la quantité E est de la forme

$$E = \delta^N \Sigma_{1,N} + \gamma^{-N} \Sigma_{2,N}.$$

Ceci permet de conclure puisque $\delta > \gamma^{-1}$ et $E = O(\delta^N)$.

(ii) Deuxième sous-cas: $\delta > 1$, $0 < \gamma < 1$ et $\delta\gamma < 1$. Ce cas est le dual du précédent. Il se traite de la même manière.

5. Démonstration du théorème 2.3.1

La démonstration est une simple généralisation du cas précédent. La matrice de transition est, cette fois, de la forme

$$\mathcal{Q} = T_{X_1} \otimes T_{X_2} \otimes \cdots \otimes T_{X_p}$$

avec, pour tout entier i entre 1 et p et pour tout k entre 1 et $N - 1$,

$$\begin{cases} T_{X_i}(k, k) = c_{i,0}, \\ T_{X_i}(k, k+1) = c_{i,1}, \\ T_{X_i}(k+1, k) = c_{i,-1}, \\ T_{X_i}(u, v) = 0 & \text{si } |u - v| > 1. \end{cases}$$

Nous définissons toujours par Λ_{X_i} les matrices diagonales telles que $(\Lambda_{X_i})_{kk} = \lambda_{X_i}(k)$ avec

$$\lambda_{X_i}(k) = 2\sqrt{c_{i,1}c_{i,-1}} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right).$$

On définit ensuite $\mathcal{P}_{X_i} = \Gamma_{X_i, N+1} \tilde{Q}_i$ avec

$$\left(\tilde{Q}_i\right)_{jk} = v_k(j) = \sqrt{\frac{2}{N+2}} \frac{\sin((k+1)(j+1)\pi)}{N+2}, \quad i = 0, \dots, N, k = 0, \dots, N$$

et où les matrices $\Gamma_{X_i, N+1}$ sont les matrices diagonales de termes diagonaux γ_i^j avec $\gamma_i = \sqrt{\frac{c_{i,-1}}{c_{i,1}}}$. Pour tout entier i compris entre 0 et p , nous pouvons alors définir les matrices $J_i(c_{i,-1}, c_{i,1})$ par

$$J_i(c_{i,-1}, c_{i,1}) = \mathcal{P}_{X_i} \Lambda_{X_i} \mathcal{P}_{X_i}^{-1}.$$

On a alors, pour tout entier i entre 0 et p ,

$$T_{X_i} = c_{i,0}I + J(c_{i,-1}, c_{i,1}) = \mathcal{P}_{X_i}(c_{0,i}I_N + \Lambda_{X_i})\mathcal{P}_{X_i}^{-1}.$$

En posant, comme précédemment, $T'_{X_i} = c_{i,0}I_N + \Lambda_{X_i}$ on a

$$T_{X_1} \otimes \cdots \otimes T_{X_p} = (\mathcal{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_{X_p}) \otimes (T'_{X_1} \otimes \cdots \otimes T'_{X_p}) \otimes (\mathcal{P}_{X_1}^{-1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_{X_p}^{-1}).$$

Puisque l'on a toujours

$$(\mathcal{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_{X_p}) \otimes (\mathcal{P}_{X_1}^{-1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_{X_p}^{-1}) = I_{(N+1)^p},$$

on peut écrire

$$(I_{(N+1)^p} - \mathcal{Q})^{-1} = (\mathcal{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_{X_p}) \left(I_{(N+1)^2} - T'_{X_1} \otimes T'_{X_p} \right)^{-1} (\mathcal{P}_{X_1}^{-1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_{X_p}^{-1}).$$

Finalement, si

$$I_{(N+1)^2} - T'_{X_1} \otimes \cdots \otimes T'_{X_p} = \mathcal{T}'_N,$$

on obtient

$$\mathcal{T}'_N = I_{(N+1)^p} - (c_{1,0}I_{N+1} + \Lambda_{X_1}) \otimes \cdots \otimes (c_{p,0}I_{N+1} + \Lambda_{X_p}).$$

En développant, nous obtenons vient que T'_N est la différence de la matrice $I_{(N+1)^p}$ et de la matrice diagonale par blocs dont la diagonale est constituée des $N + 1$ blocs

$$(c_{0,1} + \lambda_{X_1}) \left(T'_{X_2} \otimes \cdots \otimes T'_{X_p} \right).$$

Ceci revient à dire que T'_N est une matrice diagonale $(N + 1)^p \times (N + 1)^p$ telle que

$$(T'_N)_{hh} = 1 - \prod_{i=1}^p (c_{i,0} + \lambda_{X_i}(k_i))$$

avec

$$h = (N + 1)^{p-1}k_1 + (N + 1)^{p-2}k_2 + \cdots + (N + 1)k_{p-1} + k_p.$$

Les mêmes calculs que dans le cas de deux particules donnent alors le résultat analogue énoncé.

6. Démonstration des résultats de la section 2.1

Exposons brièvement le plan de la démonstration.

6.1. Plan de la démonstration

Les notations sont celles du théorème 2.1.3. La démonstration se fait en cinq points.

(i) On utilise les deux lemmes techniques suivants: le lemme 2.1.1 et le lemme 6.1.1, énoncé ci-après. Nous introduisons maintenant une notation. Si $\{a_k\}_{k \in \{1, \dots, N+1\}}$ est une suite de $N + 1$ nombres réels, on note $\text{diag}(a_k)$ la matrice diagonale dans laquelle a_k est le terme situé sur la ligne k et la colonne k , pour $1 \leq k \leq N + 1$.

Lemme 6.1.1. Soient a, b deux réels tels que $ab > 0$. On pose $\varepsilon = \text{signe}(a + b)$. On considère la matrice réelle $J(a, b)$ d'ordre $(N + 1) \times (N + 1)$ introduite dans la définition 2.4.1. Alors $J(a, b)$ est semblable à $J(\varepsilon\alpha, \varepsilon\alpha)$ où $\alpha = \sqrt{ab}$. La matrice $J(a, b)$ est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$(32) \quad J(a, b) = \mathcal{P}_{a,b} \text{diag} \left(2\varepsilon\alpha \cos \left(\frac{k+1}{N+2} \pi \right) \right) \mathcal{P}_{a,b}^{-1}, \quad k \in \{0, \dots, N\},$$

où $\mathcal{P}_{a,b} = D_{a,b} \tilde{Q}^T$ avec

$$D_{a,b} = \text{diag} \left((\sqrt{b/a})^{k+1} \right), \quad k \in \{0, \dots, N\}$$

et

$$\tilde{Q}_{ij} = \sqrt{\frac{2}{N+2}} \sin \left(\frac{(j+1)(i+1)\pi}{N+2} \right), \quad (i, j) \in [0, N]^2.$$

La matrice $\tilde{Q}$ est orthogonale, de sorte que $\mathcal{P}_{a,b}^{-1} = \tilde{Q} D_{a,b}^{-1}$.

Les points (ii), (iii) et (iv) ne concernent que le cas $\mathcal{V} \neq \{(0, 0)\}$.

(ii) On détermine le symbole de la matrice de Toeplitz $I - \mathcal{Q}$ (voir l'équation (4)) associée à la marche aléatoire déterminée par la figure 1 et les hypothèses du théorème 2.1.3 et on le décompose conformément à la définition 3.1.1.

(iii) On montre comment le théorème 3.1.5 permet le calcul des potentiels.

- (iv) On calcule effectivement les potentiels.
- (v) On traite les deux cas du point $\mathcal{V} = \{(0, 0)\}$ du théorème 2.1.3.

6.2. Premier point

Démonstration du lemme 6.1.1. Notons $\{e_0, \dots, e_N\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{N+1}$ dans laquelle $J(a, b)$ représente f , un endomorphisme. Alors f est représenté par la matrice $J(\varepsilon\alpha, \varepsilon\alpha)$ dans la base $\{\lambda e_0, \lambda^2 e_1, \dots, \lambda^{N+1} e_N\}$ où $\lambda = \sqrt{b/a}$. On en déduit que $J(a, b)$ est diagonalisable et que l'on a

$$J(\varepsilon\alpha, \varepsilon\alpha) = P^{-1}J(a, b)P.$$

Diagonalisons $J(a, b)$. On peut écrire $J(\varepsilon\alpha, \varepsilon\alpha) = 2\varepsilon\alpha J(1/2, 1/2)$, ce qui permet d'écrire (voir [18], p. 239):

$$J(\varepsilon\alpha, \varepsilon\alpha) = \tilde{Q}^T \text{diag}(\lambda^k) \tilde{Q}, \quad k \in \{0, \dots, N\}$$

où

$$\tilde{Q}_{ij} = \sqrt{\frac{2}{N+2}} \sin\left(\frac{j+1}{N+2}\pi(i+1)\right).$$

On doit remarquer, en effet, que les vecteurs colonnes v_j de $\tilde{Q}$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^{N+1}$ avec la métrique standard, de sorte que la matrice $\tilde{Q}$ est orthogonale. On en déduit l'équation (32). $\square$

Démonstration du lemme 2.1.1. Supposons l'hypothèse (9) vérifiée et notons x_1 et x_2 les deux racines de $q_k(X)$: elles sont nécessairement réelles. En effet, posons z la quantité

$$\left(1 - c_0 - 2\sqrt{c_1 c_5} \cos \frac{k+1}{N+2}\pi\right)^2 - 4\left(c_3 + 2\sqrt{c_2 c_4} \cos \frac{k+1}{N+2}\pi\right)\left(c_7 + 2\sqrt{c_6 c_8} \cos \frac{k+1}{N+2}\pi\right).$$

Alors on a

$$\begin{aligned} z &\geq (1 - c_0 - 2\sqrt{c_1 c_5})^2 - 4(c_3 + 2\sqrt{c_2 c_4})(c_7 + 2\sqrt{c_6 c_8}) \\ &\geq (1 - c_0 - c_1 - c_5)^2 - 4(c_2 + c_3 + c_4)(c_7 + c_6 + c_8) \\ &= \left((c_2 + c_3 + c_4) - (c_7 + c_6 + c_8)\right)^2 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

l'avant-dernière inégalité provenant de l'inégalité arithmético-géométrique. Supposons maintenant que l'hypothèse (10) est vérifiée. Un calcul direct montre que si l'on pose

$$D = c_3 + 2\sqrt{c_2 c_4} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right),$$

alors

$$\begin{aligned} (1 - x_1)(1 - x_2) &= \frac{1}{D} \left(\left(c_3 + 2\sqrt{c_2 c_4} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right) \right) + \left(c_7 + 2\sqrt{c_6 c_8} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - c_0 - 2\sqrt{c_1 c_5} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{D} \left((c_0 + c_3 + c_7 - 1) + 2(\sqrt{c_2 c_4} + \sqrt{c_6 c_8} + \sqrt{c_1 c_5}) \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right) \right) \\ &= \frac{N}{D}. \end{aligned}$$

Compte tenu de (10) et de (9), on a $D > 0$ et

$$N < -\left((\sqrt{c_2} + \sqrt{c_4})^2 + (\sqrt{c_1} + \sqrt{c_5})^2 + (\sqrt{c_6} + \sqrt{c_8})^2\right) < 0.$$

Inversement, si pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, \dots, N\}$, 1 sépare les racines, alors en utilisant les notations précédentes, N et D sont de signes opposés, suivant la remarque 2.1.2. Comme $N < 0$, alors $D > 0$ et on a $c_3 + 2\sqrt{c_2 c_4}x > 0$ pour tout $x \in (-1, 1)$. On en déduit que $c_3 \geq 2\sqrt{c_2 c_4}$. $\square$

6.3. Deuxième point

Avec l'ordre défini sur R_N et les notations de l'équation (3), la matrice de transition qui correspond aux probabilités explicitées dans la figure 1 est définie par

$$\begin{cases} Q_{i,i} = Q_{0,0} = c_0 I + J(c_1, c_5), & i = 0, \dots, N, \\ Q_{i,i+1} = Q_{0,1} = c_3 I + J(c_2, c_4), & i = 0, \dots, N-1, \\ Q_{i,i-1} = Q_{1,0} = c_7 I + J(c_8, c_6), & i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Le symbole associé à la matrice de Toeplitz $I - \mathcal{Q}$ (voir l'équation (4)) est donné par

$$(33) \quad F = -Q_{1,0}\bar{\chi} + (I - Q_{0,0}) - Q_{0,1}\chi.$$

Notons I_{N+1} la matrice identité d'ordre $N+1$. On pose

$$\mathcal{P} = \begin{cases} \text{diag}(\gamma^{k+1})\tilde{Q} \text{ s'il existe } (\alpha, \beta) \neq (0, 0) \in \mathcal{V}, \\ I_{N+1} \text{ si } \mathcal{V} = \{(0, 0)\}, \end{cases}$$

où $\tilde{Q}$ est la matrice donnée dans le lemme 6.1.1 et γ est défini par la condition (2) des hypothèses du théorème 2.1.3. Le lemme 6.1.1 permet d'écrire directement la factorisation

$$F = \mathcal{P} \text{diag}(p_k(\chi, \bar{\chi})) \mathcal{P}^{-1}$$

où

$$\begin{aligned} p_k(\chi, \bar{\chi}) &= -\left(c_7 + 2\sqrt{c_6 c_8} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right)\right) \bar{\chi} + (1 - c_0) \\ &\quad - 2\sqrt{c_1 c_5} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right) - \left(c_3 + 2\sqrt{c_2 c_4} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right)\right) \chi. \end{aligned}$$

On a $p_k(\chi, \bar{\chi}) = -\bar{\chi} q_k(\chi)$ où q_k est le polynôme défini dans le lemme 2.1.1. Ce lemme (avec ses notations) nous fournit la factorisation suivante de $p_k(\chi, \bar{\chi})$:

$$(34) \quad p_k(\chi, \bar{\chi}) = \left(\frac{c_3 + 2\sqrt{c_2 c_4} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right)}{\alpha_k} \right) (1 - \beta_k \bar{\chi})(1 - \alpha_k \chi).$$

Posons $A_k^{-1}(N)$ pour le premier facteur du produit ci-haut. Ceci conduit à la factorisation du symbole F . On a $F = G_1 G_2$ en posant

$$(35) \quad \begin{cases} G_1 = \mathcal{P} \text{diag}(1 - \alpha_s \chi) \mathcal{P}^{-1}, \\ G_2 = \mathcal{P} \text{diag}\left(A_s^{-1}(N)(1 - \beta_s \bar{\chi})\right) \mathcal{P}^{-1}, \quad s \in \{0, \dots, N\}. \end{cases}$$

On pose, pour la suite du calcul:

$$(36) \quad \begin{cases} G_1 = I - W_1 \chi \text{ avec } W_1 = \mathcal{P} \text{diag}(\alpha_s) \mathcal{P}^{-1}, \\ G_2 = (I - W_2 \bar{\chi}) B \text{ avec } W_2 = \mathcal{P} \text{diag}(\beta_s) \mathcal{P}^{-1}, \\ B = \mathcal{P} \text{diag}(A_s^{-1}(N)) \mathcal{P}^{-1}. \end{cases}$$

6.4. Troisième point

On considère l'application bilinéaire Λ définie par

$$\Lambda : \begin{array}{ccc} L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T}) \times L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \\ (M, M') & \longmapsto & \int_{\mathbb{T}} M M'^* d\sigma. \end{array}$$

L'application Λ vérifie les trois propriétés suivantes:

- (a) $\Lambda(M^+, M^-) = 0$ lorsque $M^+ \in H^+$ et $M^- \in H^-$,
- (b) $\Lambda(M, M') = \Lambda(M', M)^*$ lorsque $M \in \mathcal{M}_N$ et $M' \in \mathcal{M}_N$,
- (c) $\Lambda(MA, M') = \Lambda(M, M'A^*)$ lorsque $M \in \mathcal{M}_N$, $M' \in \mathcal{M}_N$ et $A \in \mathcal{M}_N$.

Si I est la matrice identité d'ordre $N + 1$, nous posons alors

$$(37) \quad \Lambda\left(T_N(F)^{-1} \chi^k, I \chi^l\right) = (T_1)_{kl} - (T_2)_{kl}$$

où, compte tenu du théorème 3.1.5, on a

$$(T_1)_{kl} = \Lambda\left(\pi_+(\chi^k G_2^{-1}) G_1^{-1}, \chi^l I\right)$$

et

$$(T_2)_{kl} = \Lambda\left(\pi_+[(\mathcal{H}_N^{-1} M_k) \Phi_N] G_1^{-1}, \chi^l I\right)$$

où

$$\mathcal{H}_N = I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N} \text{ et } M_k = \pi_+\left(\pi_+(\chi^k G_2^{-1}) \tilde{\Phi}_N\right).$$

Posons, de plus,

$$N_l = \pi_+\left(\pi_+(\chi^l G_1^{*-1}) \Phi_N^*\right).$$

Les propriétés de Λ énoncées ci-dessus permettent d'obtenir directement le lemme suivant.

Lemme 6.4.1. *On a les deux équations suivantes:*

$$(38) \quad (T_1)_{kl} = \Lambda\left(\pi_+\left(\chi^k G_2^{-1}\right), \pi_+\left(\chi^l G_1^{*-1}\right)\right),$$

$$(39) \quad (T_2)_{kl} = \Lambda\left(\mathcal{H}_N^{-1} M_k, N_l\right).$$

Les équations (38) et (39) définissent respectivement *le premier terme* et *le deuxième terme* de la formule d'inversion du théorème 3.1.5. $(T_1)_{kl} - (T_2)_{kl}$ est le bloc (k, l) de la matrice des potentiels.

6.5. Quatrième point

6.5.1. Évaluation du premier terme de la formule d'inversion

Conformément à l'équation (38) du lemme 6.4.1, évaluons la projection

$$\pi_+(\chi^k G_2^{-1}).$$

Avec les notations (36), on a

$$\chi^k G_2^{-1} = B^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} W_2^s \chi^{k-s}.$$

D'où

$$\pi_+(\chi^k G_2^{-1}) = B^{-1} \sum_{s=0}^k W_2^s \chi^{k-s} = B^{-1} \sum_{s=0}^k W_2^{k-s} \chi^s.$$

De même,

$$\pi_+(\chi^l G_1^{*-1}) = \sum_{s=0}^l W_1^{*l-s} \chi^s.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (T_1)_{kl} &= \Lambda \left(B^{-1} \sum_{s=0}^k W_2^{k-s} \chi^s, \sum_{s=0}^l W_1^{*l-s} \chi^s \right) \\ &= B^{-1} \int_{\mathbb{T}} \sum_{s=0}^k W_2^{k-s} \chi^s \sum_{s=0}^l W_1^{*l-s} \bar{\chi}^s \\ &= B^{-1} W_2^k W_1^l \sum_{s=0}^{\min(k,l)} (W_1 W_2)^{-s}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(T_1)_{kl} = B^{-1} W_1^l W_2^k \left(I - (W_1 W_2)^{-(1+\min(k,l))} \right) \left(I - (W_1 W_2)^{-1} \right)^{-1},$$

ce que l'on peut écrire, pour $s = 0, 1, \dots, N$,

$$(40) \quad (T_1)_{kl} = \mathcal{P} \text{diag} \left\{ A_s(N)^{-1} \alpha_l^l \beta_s^k (\alpha_s \beta_s)^{-\min(k,l)} \left(\frac{1 - (\alpha_s \beta_s)^{1+\min(k,l)}}{1 - \alpha_s \beta_s} \right) \right\} \mathcal{P}^{-1}.$$

6.5.2. Évaluation du deuxième terme de la formule d'inversion

Effectuons le calcul de

$$\pi_+ \left(\pi_+ \left(\chi^k G_2^{-1} \right) \tilde{\Phi}_N \right) = M_k.$$

On a

$$\begin{aligned}
\pi_+ \left(\chi^k G_2^{-1} \right) &= \pi_+ \left(\chi^k B^{-1} (I - W_2 \bar{\chi})^{-1} \right) \\
&= \pi_+ \left(\chi^k B^{-1} \sum_{q=0}^k W_2^q \bar{\chi}^q \right) \\
&= B^{-1} \sum_{q=0}^k W_2^q \chi^{k-q} \\
&= B^{-1} \sum_{s=0}^k W_2^{k-s} \chi^s.
\end{aligned}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
\pi_+ \left(\chi^k G_2^{-1} \right) \tilde{\Phi}_N &= \left(B^{-1} \sum_{s=0}^k W_2^{k-s} \chi^s \right) \bar{\chi}^{N+1} (I - \bar{\chi} W_2) B (I - W_1 \chi)^{-1} \\
&= \left(\sum_{s=0}^k W_2^{k-s} \chi^s - \sum_{s=0}^k W_2^{k+1-s} \chi^{s-1} \right) (I - W_1 \chi)^{-1} \bar{\chi}^{N+1} \\
&= \left(\chi^k - W_2^{k+1} \bar{\chi} \right) \bar{\chi}^{N+1} (I - W_1 \chi)^{-1} \\
&= \left(\chi^k - W_2^{k+1} \bar{\chi} \right) \sum_{s=0}^{\infty} W_1^s \chi^{s-(N+1)} \\
&= \left(\chi^{k-N-1} - W_2^{k+1} \bar{\chi}^{(N+2)} \right) \sum_{s=0}^{\infty} W_1^s \chi^s \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} W_1^s \chi^{(k+s)-(N+1)} - W_2^{k+1} \sum_{s=0}^{\infty} W_1^s \chi^{s-(N+2)}.
\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
M_k &= \sum_{s=(N+1)-k}^{\infty} W_1^s \chi^{k+s-(N+1)} - W_2^{k+1} \sum_{s=N+2}^{\infty} W_1^s \chi^{s-(N+2)} \\
&= \sum_{s'=0}^{\infty} W_1^{s'+N+1-k} \chi^{s'} - W_2^{k+1} \left(\sum_{s'=0}^{\infty} W_1^{s'+N+2} \chi^{s'} \right) \\
&= W_1^{N+2} \left(W_1^{-(k+1)} - W_2^{k+1} \right) G_1^{-1}.
\end{aligned}$$

Posons, à partir de maintenant, $M_k = \mathcal{M}_k G_1^{-1}$ avec

$$\mathcal{M}_k = W_1^{N+2} \left(W_1^{-(k+1)} - W_2^{k+1} \right).$$

Continuons les calculs correspondant à la formule d'inversion.

$$\begin{aligned}
H_{\Phi_N}(G_1^{-1}) &= \pi_- (G_1^{-1} \chi^{N+1} G_1 G_2^{-1}) \\
&= \pi_- (\chi^{N+1} G_2^{-1}) \\
&= \pi_- \left(\chi^{N+1} B^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} W_2^s \bar{\chi}^s \right) \\
&= B^{-1} \sum_{s=N+2}^{\infty} W_2^s \bar{\chi}^{s-(N+1)} \\
&= B^{-1} \sum_{s'=1}^{\infty} W_2^{s'+(N+1)} \bar{\chi}^{s'} \\
&= W_2^{N+2} \bar{\chi} G_2^{-1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}(G_1^{-1}) &= W_2^{N+2} \pi_+ (\bar{\chi} G_2^{-1} \bar{\chi}^{N+1} G_2 G_1^{-1}) \\
&= W_2^{N+2} \pi_+ (\bar{\chi}^{N+2} G_1^{-1}) \\
&= W_2^{N+2} \pi_+ \left(\sum_{s=0}^{\infty} W_1^s \chi^{s-(N+2)} \right) \\
&= W_2^{N+2} \sum_{s=N+2}^{\infty} W_1^s \chi^{s-(N+2)} \\
&= W_2^{N+2} \sum_{s'=0}^{\infty} W_1^{s'+N+2} \chi^{s'} \\
&= W_2^{N+2} W_1^{N+2} G_1^{-1}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$(I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N})^{-1} M_k = (I - W_2^{N+2} W_1^{N+2})^{-1} W_1^{N+2} (W_1^{-(k+1)} - W_2^{k+1}) G_1^{-1}.$$

Calculons maintenant

$$N_l = \pi_+ \left(\pi_+ \left(\chi^l G_1^{*-1} \right) \Phi_N^* \right).$$

On a

$$\begin{aligned}
\pi_+ \left(\chi^l G_1^{*-1} \right) &= \pi_+ \left(\chi^l \sum_{s=0}^{\infty} W_1^{*s} \bar{\chi}^s \right) \\
&= \sum_{s=0}^l W_1^{*s} \chi^{l-s} \\
&= \sum_{s'=0}^l W_1^{*l-s'} \chi^{s'}.
\end{aligned}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
\pi_+ \left(\chi^l G_1^{*-1} \right) \Phi_N^* &= \sum_{s=0}^l W_1^{*l-s} \chi^s \bar{\chi}^{N+1} G_2^{*-1} G_1^* \\
&= \sum_{s=0}^l W_1^{*l-s} \chi^{s-(N+1)} (I - W_1^* \bar{\chi}) (G_2^*)^{-1} \\
&= \left(\sum_{s=0}^l W_1^{*l-s} \chi^{s-(N+1)} - \sum_{s=0}^l W_1^{*l-s+1} \chi^{s-(N+2)} \right) (G_2^*)^{-1} \\
&= \left(\chi^{l-N-1} - (W_1^*)^{l+1} \chi^{-(N+2)} \right) (G_2^*)^{-1}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer N_l . On a

$$\begin{aligned}
N_l &= \pi_+ \left(\chi^{l-(N+1)} G_2^{*-1} \right) - W_1^{*l+1} \pi_+ \left(\chi^{-(N+2)} G_2^{*-1} \right) \\
&= (B^*)^{-1} \pi_+ \left(\chi^{l-(N+1)} \sum_{s=0}^{\infty} \chi^s W_2^{*s} \right) - W_1^{*l+1} B^{*-1} \pi_+ \left(\chi^{-(N+2)} \sum_{s=0}^{\infty} \chi^s W_2^{*s} \right) \\
&= (B^*)^{-1} \left(\pi_+ \left(\sum_{s=0}^{\infty} \chi^{s+l-(N+1)} W_2^{*s} \right) - W_1^{*l+1} \pi_+ \left(\sum_{s=0}^{\infty} \chi^{s-N-2} W_2^{*s} \right) \right) \\
&= (B^*)^{-1} \left(\sum_{s=N+1-l}^{\infty} \chi^{s+l-(N+1)} W_2^{*s} - W_1^{*l+1} \sum_{s=N+2}^{\infty} \chi^{s-(N+2)} W_2^{*s} \right) \\
&= (B^*)^{-1} \left(\sum_{s'=0}^{\infty} \chi^{s'} W_2^{*(N+1-l)+s'} - W_1^{*l+1} \sum_{s'=0}^{\infty} \chi^{s'} W_2^{*N+2+s'} \right).
\end{aligned}$$

On a finalement

$$N_l = \left(W_2^{*N+1-l} G_2^{*-1} - W_1^{*l+1} W_2^{*N+2} G_2^{*-1} \right)$$

ou encore

$$N_l = W_2^{*N+2} G_2^{*-1} \left(W_2^{*-(l+1)} - W_1^{*(l+1)} \right).$$

Il reste alors à calculer le produit $\Lambda (G_1^{-1}, G_2^{*-1})$. On a

$$\begin{aligned}
\Lambda (G_1^{-1}, G_2^{*-1}) &= \int_{\mathbb{T}} G_1^{-1} G_2^{-1} d\sigma \\
&= \int_{\mathbb{T}} B^{-1} (1 - \chi W_1)^{-1} (1 - \bar{\chi} W_2)^{-1} d\sigma \\
&= B^{-1} \int_{\mathbb{T}} \sum_{p,q} \chi^{p-q} W_1^p W_2^q d\sigma \\
&= B^{-1} \sum_{p \geq 0} (W_1 W_2)^p \\
&= B^{-1} (1 - W_1 W_2)^{-1}.
\end{aligned}$$

En conclusion, il vient, en posant $C = W_1 W_2$,

$$(T_2)_{kl} = B^{-1} ((I - C^{N+2})(I - C))^{-1} C^{N+2} W_1^{-(k+1)} W_2^{-(l+1)} \cdot (I - C^{k+1})(I - C^{l+1}).$$

En remarquant que $C = \mathcal{P} \text{diag}(\alpha_s \beta_s) \mathcal{P}^{-1}$ et que $B^{-1} = \mathcal{P} \text{diag}(A_s(N)) \mathcal{P}^{-1}$, on peut écrire

$$(T_2)_{kl} = \mathcal{P} \text{diag} \left\{ A_s(N) \left(1 - (\alpha_s \beta_s)^{N+2} \right)^{-1} (1 - \alpha_s \beta_s)^{-1} (\alpha_s \beta_s)^{N+2} \cdot \alpha_s^{-(k+1)} \beta_s^{-(l+1)} \left(1 - (\alpha_s \beta_s)^{k+1} \right) \left(1 - (\alpha_s \beta_s)^{l+1} \right) \right\} \mathcal{P}^{-1}$$

et

$$(41) \quad (T_2)_{kl} = \mathcal{P} \text{diag} \left\{ A_s(N) \frac{(1 - (\alpha_s \beta_s)^{k+1})(1 - (\alpha_s \beta_s)^{l+1})}{(1 - (\alpha_s \beta_s)^{N+2})(1 - \alpha_s \beta_s)} \alpha_s^{N+1-k} \beta_s^{N+1-l} \right\} \mathcal{P}^{-1}.$$

6.5.3. Expression des potentiels

Supposons que $k \leq l$. On évalue la différence $(T_1)_{kl} - (T_2)_{kl}$ en utilisant les équations (40) et (41). On obtient

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}^{-1} ((T_1)_{kl} - (T_2)_{kl}) \mathcal{P} \\ &= \text{diag} \left\{ A_s(N) \alpha_s^{-k} \beta_s^{-l} \left(\frac{1 - (\alpha_s \beta_s)^{k+1}}{1 - \alpha_s \beta_s} \right) \left((\alpha_s \beta_s)^l - \frac{(\alpha_s \beta_s)^{N+1} (1 - (\alpha_s \beta_s)^{l+1})}{1 - (\alpha_s \beta_s)^{N+2}} \right) \right\} \\ &= \text{diag} \left\{ A_s(N) \alpha_s^{-k} \beta_s^{-l} \left(\frac{1 - (\alpha_s \beta_s)^{k+1}}{1 - \alpha_s \beta_s} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{(\alpha_s \beta_s)^l - (\alpha_s \beta_s)^{N+2+l} - (\alpha_s \beta_s)^{N+1} + (\alpha_s \beta_s)^{N+l+2}}{1 - (\alpha_s \beta_s)^{N+2}} \right\} \\ &= \text{diag} \left\{ A_s(N) \frac{\alpha_s^{-k} \beta_s^{-l} (\alpha_s \beta_s)^l}{(1 - \alpha_s \beta_s)(1 - (\alpha_s \beta_s)^{N+2})} (1 - (\alpha_s \beta_s)^{k+1}) (1 - (\alpha_s \beta_s)^{N+1-l}) \right\}, \end{aligned}$$

et on conclut.

6.6. Cinquième point

Les deux cas où $\mathcal{V} = \{(0, 0)\}$ correspondent à une marche sur une droite dans le plan qui, compte tenu du choix de l'ordre des points nécessaire pour l'expression des matrices de transition, est une droite « verticale ». Dans ce cas, le polynôme $q_s(X)$ du lemme 2.1.1 ne dépend pas de s et est égal à

$$q(X) = c_7 - (c_3 + c_7)X + c_3 X^2.$$

Lorsque $c_3 \neq c_7$, les deux racines sont distinctes et 1 en est une racine. Mais le symbole $F = G_1 G_2$ est singulier car un des deux facteurs G_1 ou G_2 s'annule sur $\mathbb{T}$. Ce résultat est conforme à tout ce que l'on sait sur les marches aléatoires en dimension 1 où le symbole est singulier.

Examinons le cas $c_3 > c_7$. Avec les notations du lemme 2.1.1,

$$\alpha_s = \alpha = 1, \quad \beta_s = \beta = c_7/c_3 < 1 \quad \text{et} \quad A_s(N) = 1/c_3.$$

On définit alors un symbole régularisé $F_r(\theta) = G_{1,r}G_2$ avec $0 < r < 1$ et

$$G_{1,r} = \mathcal{P} \operatorname{diag}(1 - r\chi) \mathcal{P}^{-1},$$

voir l'équation (35). Avec ce symbole régulier, on a l'égalité obtenue à la section 6.5.3 qui s'écrit

$$(42) \quad \mathcal{P}^{-1} ((T_1)_{k,l} - (T_2)_{kl}) \mathcal{P} = \operatorname{diag} \theta_r(k, l)$$

avec

$$(43) \quad \theta_r(k, l) = \frac{1}{c_3} \left(\frac{r^{-k} \beta^{-l} (r\beta)^{\max(k,l)}}{(1 - r\beta)(1 - (r\beta)^{N+2})} \right) \left(1 - (r\beta)^{1+\min(k,l)} \right).$$

Ceci aboutit à l'égalité (11), dans laquelle $\theta_s(k, l)$ ne dépend pas de s et est remplacé par $\theta_r(k, l)$; celle-ci s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} g_{N,r}((i, k), (j, l)) &= \frac{2}{N+2} \gamma^{i-j} \sum_{s=0}^N \theta_r(k, l) \sin\left(\frac{s+1}{N+2}(i+1)\pi\right) \sin\left(\frac{s+1}{N+2}(j+1)\pi\right) \\ &= \theta_r(k, l) \delta_{i,j} \end{aligned}$$

puisque la somme est un produit scalaire de vecteurs d'une base orthonormée. On conclut en utilisant le résultat suivant:

$$\lim_{r \rightarrow 1} g_{N,r}((i, k), (j, l)) = g_N((i, k), (j, l))$$

dont on trouve la démonstration dans [5], par exemple. Posons μ pour $\min(k, l)$ et ν pour $\max(k, l)$. On obtient l'égalité (12) avec

$$\theta(k, l) = c_7^{\nu-l} c_3^{l-\mu} \frac{(c_7^{1+\mu} - c_3^{1+\mu})(c_7^{N+1-\nu} - c_3^{N+1-\nu})}{(c_7 - c_3)(c_7^{N+2} - c_3^{N+2})}.$$

Le cas $c_3 < c_7$ se traite de la même manière. L'équation (13) résume les cas $c_3 < c_7$ et $c_7 < c_3$.

Le cas $\mathcal{V} = \{(0, 0)\}$ et $c_3 = c_7$ donne lieu à un symbole singulier dont chaque facteur G_1 et G_2 s'annule sur le tore car $\alpha = \beta = 1$. La différence avec le cas précédent est que l'on régularise avec deux paramètres r et r' . On obtient de façon analogue à l'équation (43) l'égalité suivante:

$$(44) \quad \theta_{r,r'}(k, l) = \frac{1}{c_3} \left(\frac{r^{-k} r'^{-l} (rr')^{\max(k,l)}}{(1 - rr')(1 - (rr')^{N+2})} \right) \left(1 - (rr')^{1+\min(k,l)} \right).$$

Cela nous donne l'expression $\theta(k, l)$ de l'équation (14) par passage à la limite.

$$\theta_{r,r'}(k, l) \xrightarrow[r \rightarrow 1]{r' \rightarrow 1} \theta(k, l) = \frac{1}{c_3} \frac{1}{N+2} (1 + \min(k, l)) (N + 1 - \max(k, l)).$$

Par exemple, si $c_0 = 0$ et $c_3 = c_7 = 1/2$, on obtient la remarque 2.1.4 et ceci achève la démonstration du dernier point.

7. Démonstration du théorème d'inversion

7.1. Démonstration du théorème 3.1.5

Notons $\|H_{\Phi_N}\|_2$ la norme dans $L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})$ de l'opérateur de Hankel H_{Φ_N} , c'est-à-dire

$$\|H_{\Phi_N}\|_2 = \sup \left\{ \left| \langle \psi \chi^{N+1} G_1 G_2^{-1}, \varphi \rangle_{L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})} \right| \mid \begin{array}{l} \psi \in H^+, \varphi \in H^-, \\ \|\varphi\|_{L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})} < 1, \|\psi\|_{L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})} < 1 \end{array} \right\}.$$

Notons d_∞ la distance définie par la norme $\|\cdot\|_{L^\infty_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})}$ et $\mathcal{P}_{[-N,N]}$ le module sur l'anneau des matrices carrées complexes d'ordre $N+1$ engendré par $\{\chi^k I\}_{-N \leq k \leq N}$. La démonstration du théorème 3.1.5 résulte des lemmes 7.1.1, 7.1.3 et 7.1.5 que voici.

Lemme 7.1.1. *On a*

$$\|H_{\Phi_N}\|_2 \leq N \|G_1 G_2^*\|_{L^\infty_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})} d_\infty(G_2^{*-1} G_2^{-1}, \mathcal{P}_{[-N,N]}).$$

La démonstration du lemme 7.1.1 s'inspire d'une idée d'Ibrahimov et Rozanov (voir [8]) pour l'estimation de la norme d'un opérateur de Hankel dans le cas scalaire. Avant d'en donner la preuve, voici un lemme technique que nous utiliserons.

Lemme 7.1.2. *Soit $N \in \mathbb{N}$. Nous avons les inégalités de normes suivantes:*

$$(45) \quad |\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle|_{L^2_{\mathcal{M}}(\mathbb{T})} \leq \|\mathcal{A}\|_{L^1_{\mathcal{M}}(\mathbb{T})} \|\mathcal{B}\|_{L^\infty_{\mathcal{M}}(\mathbb{T})}, \quad \mathcal{A} \in L^1_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}), \mathcal{B} \in L^\infty_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}),$$

$$(46) \quad \|AB\|_1 \leq N \|A\|_1 \|B\|_\infty, \quad A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}),$$

$$(47) \quad \|\mathcal{A}\mathcal{B}\|_{L^1_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})} \leq N \|\mathcal{A}\|_{L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})} \|\mathcal{B}\|_{L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})}, \quad \mathcal{A} \in L^2_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}), \mathcal{B} \in L^2_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}),$$

$$(48) \quad \|\mathcal{A}\mathcal{B}\|_{L^1_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})} \leq N \|\mathcal{A}\|_{L^1_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})} \|\mathcal{B}\|_{L^\infty_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})}, \quad \mathcal{A} \in L^1_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}), \mathcal{B} \in L^\infty_{\mathcal{M}}(\mathbb{T}).$$

La preuve de ces inégalités classiques est laissée en exercice.

Démonstration du lemme 7.1.1. On a, par définition,

$$\|H_{\Phi_N}\|_2 = \sup_{\substack{\|\varphi\|_{L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})}=1 \\ \|\psi\|_{L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})}=1}} \left\{ \left| \langle \psi \chi^{N+1} G_1 G_2^{-1}, \varphi \rangle_{L^2_{\mathcal{M}}(\mathbb{T})} \right| \mid \varphi \in H^-, \psi \in H^+ \right\}.$$

Par ailleurs, pour tout $\varphi \in H^-$, $\psi \in H^+$ et pour tout polynôme $Q \in \mathcal{P}_N$,

$$\begin{aligned} \langle \psi \chi^{N+1} G_1 G_2^{-1}, \varphi \rangle_{L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})} &= \langle \chi^{N+1} (\varphi^* \psi G_1 G_2^*), G_2^{*-1} G_2^{-1} \rangle_{L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})} \\ (49) \quad &= \langle \chi^{N+1} (\varphi^* \psi G_1 G_2^*), G_2^{*-1} G_2^{-1} - |Q|^2 \rangle_{L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

car $\varphi^* \psi G_1 G_2^* \in H^+$ et $|Q|^2 \in \mathcal{P}_{[-N, N]}$. L'équation (49) et l'équation (45) du lemme 7.1.2 permettent d'écrire

$$\|H_{\Phi_N}\|_2 \leq \inf_Q \|G_2^{*-1} G_2^{-1} - |Q|^2\|_\infty \sup_{\substack{\|\varphi\|_{L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})}=1 \\ \|\psi\|_{L^2_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})}=1}} \int_{\mathbb{T}} \|\varphi^* \psi G_1 G_2^*\|_1 d\sigma.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|\varphi^* \psi G_1 G_2^*\|_1 \leq N \|G_1 G_2^*\|_\infty \|\varphi^* \psi\|_1 \leq N \|G_1 G_2^*\|_\infty.$$

On peut donc écrire

$$\|H_{\Phi_N}\|_2 \leq N^2 \|G_1 G_2^*\|_{L^\infty_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})} d_\infty(G_2^{*-1} G_2^{-1}, \mathcal{P}_{[-N, N]})$$

et on conclut. $\square$

Avec des notations analogues, on obtient le lemme suivant.

Lemme 7.1.3. *On a*

$$\|H_{\tilde{\Phi}_N}\|_2 \leq N \|G_1 G_2^*\|_{L^\infty_{\mathcal{M}_N}(\mathbb{T})} d_\infty(G_1^{*-1} G_1^{-1}, \mathcal{P}_{[-N, N]}).$$

La preuve du lemme 7.1.3 est identique à celle du lemme 7.1.1.

Corollaire 7.1.4. *Supposons que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée:*

$$(50) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} d_\infty(G_2^{*-1} G_2^{-1}, \mathcal{P}_{[-N, N]}) = 0 \quad \text{et} \quad N^2 d_\infty(G_1^{*-1} G_1^{-1}, \mathcal{P}_{[-N, N]}) \text{ est bornée,}$$

$$(51) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} d_\infty(G_1^{*-1} G_1^{-1}, \mathcal{P}_{[-N, N]}) = 0 \quad \text{et} \quad N^2 d_\infty(G_2^{*-1} G_2^{-1}, \mathcal{P}_{[-N, N]}) \text{ est bornée.}$$

Alors $\|H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\|_2 < 1$ pour N assez grand. Dans ce cas, l'opérateur $I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}$ est inversible.

Les conditions de régularité données par le corollaire pour la majoration de la norme de $H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}$ par 1 ne sont pas très restrictives et sont vérifiées dans l'application donnée dans cet article. Le corollaire précédent permet d'établir le lemme suivant.

Lemme 7.1.5. *Supposons vérifiées l'une des deux hypothèses (50) ou (51) du corollaire 7.1.4. Posons, pour tout polynôme $Q \in \mathcal{P}_N$,*

$$\begin{cases} G_{N,F}(Q) = \pi_+(Q G_2^{-1}) G_1^{-1} - \pi_+((\mathcal{H}_N^{-1} \cdot X(Q)) \Phi_N) G_1^{-1}, \\ X(Q) = \pi_+(\pi_+(Q G_2^{-1}) \tilde{\Phi}_N), \\ \mathcal{H}_N = I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}. \end{cases}$$

Alors

$$G_{N,F}(\mathcal{P}_N) \subset \mathcal{P}_N.$$

Corollaire 7.1.6. *Si l'une des hypothèses (50) ou (51) est vérifiée, alors pour tout polynôme $Q \in \mathcal{P}_N$, on a*

$$(52) \quad T_N(F)(G_{N,F})(Q) = Q.$$

La preuve du corollaire 7.1.6 se fait à partir du lemme 7.1.5. Admettant pour le moment ce dernier, établissons la preuve du corollaire 7.1.6.

Démonstration du corollaire 7.1.6. Tout d'abord, le lemme 7.1.5 nous indique que l'égalité (52) a un sens. Montrons maintenant qu'elle est vraie. Pour tout polynôme Q de $\mathcal{P}_N$, posons $G_{N,F}(Q) = A - B$ avec

$$A(Q) = \pi_+(QG_2^{-1})G_1^{-1} \text{ et } B(Q) = \pi_+((\mathcal{H}_N^{-1} \cdot X(Q))\Phi_N)G_1^{-1}.$$

Avec ces notations, on a d'une part $T_N(F)(A(Q)) = Q$. En effet, pour tout $P \in \mathcal{P}_N$, on a

$$\begin{aligned} \langle T_N(F)(A(Q)), P \rangle &= \left\langle \pi_N \left((\pi_+(QG_2^{-1})G_1^{-1})G_1G_2 \right), P \right\rangle \quad (\text{car } F = G_1G_2) \\ &= \langle \pi_+(QG_2^{-1})G_2, P \rangle \\ &= \langle QG_2^{-1}, \pi_+(PG_2^*) \rangle \\ &= \langle QG_2^{-1}, PG_2^* \rangle \quad (\text{car } G_2^* \in H^+) \\ &= \langle Q, P \rangle. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout polynôme $Q \in \mathcal{P}_N$, on a $T_N(F)(B(Q)) = 0$. En effet, pour tout $P \in \mathcal{P}_N$,

$$\begin{aligned} \langle T_N(F)(B(Q)), P \rangle &= \langle \pi_+((\mathcal{H}_N^{-1} \cdot X(Q))\Phi_N)G_1^{-1}, P \rangle \\ &= \langle \mathcal{H}_N^{-1} \cdot X(Q)\Phi_N, PG_2^* \rangle \\ &= \langle \mathcal{H}_N^{-1} \cdot X(Q), P\bar{\chi}^{N+1}G_1^* \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

car

$$\mathcal{H}_N^{-1} \cdot X(Q) \in H^+ \text{ et } P\bar{\chi}^{N+1}G_1^* \in H^-$$

puisque $P\bar{\chi}^{N+1} \in H^-$ ($P \in \mathcal{P}_N$) et $G_1^* \in H^-$ ($G_1 \in H^+$ par hypothèse de régularité). Ceci achève la démonstration du corollaire 7.1.6. $\square$

Démontrons maintenant le lemme 7.1.5.

Démonstration du lemme 7.1.5. Désignons par $\mathcal{P}_N^{\perp H^+}$ l'orthogonal de $\mathcal{P}_N$ dans H^+ . Pour tout $Q \in \mathcal{P}_N$, $G_{N,F}(Q)$ appartient à H^+ . Il suffit donc de montrer que pour tout $Q_1 \in \mathcal{P}_N^{\perp H^+}$ et pour tout $Q \in \mathcal{P}_N$,

$$(53) \quad \langle G_{N,F}(Q), Q_1 \rangle_{L_{\mathcal{M}_N^2(\mathbb{T})}} = 0.$$

Ceci est équivalent à demander que pour tout $Q_1 \in \mathcal{P}_N^{\perp H^+}$ et pour tout $Q \in \mathcal{P}_N$,

$$(54) \quad \langle \pi_+(\mathcal{H}_N^{-1} \cdot X(Q)\Phi_N)G_1^{-1}, Q_1 \rangle = \langle \pi_+(QG_2^{-1})G_1^{-1}, Q_1 \rangle.$$

Nous allons maintenant établir cette dernière égalité. Évaluons le terme de gauche de l'égalité (54). En se souvenant que π_+ est autoadjoint et en remarquant que l'on a $\mathcal{H}_N^{-1}(\phi) \in H^+$, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \pi_+(\mathcal{H}_N^{-1} \cdot X(Q)\Phi_N)G_1^{-1}, Q_1 \rangle &= \langle \mathcal{H}_N^{-1} \cdot X(Q)\Phi_N, \pi_+(Q_1G_1^{-1*}) \rangle \\ &= \left\langle \mathcal{H}_N^{-1} \cdot X(Q), \pi_+ \left(\pi_+(Q_1G_1^{-1*})\Phi_N^* \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Notons $\tilde{H}_{\tilde{\Phi}_N}$ le transposé de l'opérateur $H_{\tilde{\Phi}_N}$ et $\tilde{H}_{\Phi_N}$ le transposé de l'opérateur H_{Φ_N} .
 Exprimons $\pi_+ \left(\pi_+ (Q_1 G_1^{-1*}) \Phi_N^* \right)$ à l'aide de ces opérateurs. On a

$$\begin{aligned} \pi_+ \left(\pi_+ (Q_1 G_1^{-1*}) \Phi_N^* \right) &= \pi_+ \left(Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^* - \pi_- (Q_1 G_1^{*-1}) \Phi_N^* \right) \\ &= \pi_+ \left(Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^* \right) - \pi_+ \left(\pi_- (Q_1 G_1^{*-1} (\Phi_N^* \tilde{\Phi}_N^*)) \Phi_N^* \right) \end{aligned}$$

puisque $\Phi_N^* \tilde{\Phi}_N^* = 1$. Finalement,

$$(55) \quad \pi_+ \left(\pi_+ (Q_1 G_1^{-1*}) \Phi_N^* \right) = \pi_+ (Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^*) - \tilde{H}_{\Phi_N} \tilde{H}_{\tilde{\Phi}_N} (Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^*).$$

Posons maintenant, pour tout $\varphi \in H^+$ et tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{A}_m(\varphi) = \left\langle \sum_{s=0}^m (H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N})^s \varphi, \pi_+ (Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^*) - \tilde{H}_{\Phi_N} \tilde{H}_{\tilde{\Phi}_N} (Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^*) \right\rangle.$$

Dans la suite de la démonstration, nous posons $\mathcal{A}_\infty(\varphi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}_m(\varphi)$. Nous allons calculer de deux façons différentes $\mathcal{A}_\infty(X(Q))$, ce qui nous donnera l'égalité (54). Montrons tout d'abord l'égalité

$$(56) \quad \mathcal{A}_\infty(X(Q)) = \langle \pi_+ (\mathcal{H}_N^{-1} \cdot X(Q) \Phi_N) G_1^{-1}, Q_1 \rangle.$$

Écrivons

$$\begin{aligned} &\langle \pi_+ (\mathcal{H}_N^{-1} \cdot X(Q) \Phi_N) G_1^{-1}, Q_1 \rangle \\ &= \langle (\mathcal{H}_N^{-1} \cdot X(Q), \pi_+ (Q_1 G_1^{*-1}) \Phi_N^* \rangle \\ &= \langle \mathcal{H}_N^{-1} \cdot X(Q), \pi_+ \left(\pi_+ (Q_1 G_1^{*-1}) \Phi_N^* \right) \rangle \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{s=0}^m (H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N})^s X(Q), \pi_+ \left(\pi_+ (Q_1 G_1^{*-1}) \Phi_N^* \right) \right\rangle \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{s=0}^m (H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N})^s X(Q), \pi_+ (Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^*) - \tilde{H}_{\Phi_N} \tilde{H}_{\tilde{\Phi}_N} (Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^*) \right\rangle \end{aligned}$$

d'après l'égalité (55). Ceci nous donne donc l'égalité (56). Nous allons maintenant obtenir une deuxième expression de $\mathcal{A}_\infty(X(Q))$. Avant tout, remarquons que

$$\sum_{s=0}^m (H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N})^s \varphi \in H^+.$$

Considérons les égalités

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m(\varphi) &= \left\langle \sum_{s=0}^m (H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N})^s \varphi, Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^* - \tilde{H}_{\Phi_N} \tilde{H}_{\tilde{\Phi}_N} (Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^*) \right\rangle \\ &= \left\langle \varphi, \sum_{s=0}^m \left(\tilde{H}_{\tilde{\Phi}_N} \tilde{H}_{\Phi_N} \right)^s (Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^*) - \sum_{s=1}^{m+1} \left(\tilde{H}_{\tilde{\Phi}_N} \tilde{H}_{\Phi_N} \right)^s (Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^*) \right\rangle \\ &= \left\langle \varphi, Q_1 G_1^{-1} \Phi_N^* - \left(\tilde{H}_{\tilde{\Phi}_N} \tilde{H}_{\Phi_N} \right)^{m+1} (Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^*) \right\rangle. \end{aligned}$$

Compte tenu des lemmes 7.1.1 et 7.1.3 ainsi que des hypothèses (50) et (51) on a, pour N assez grand, $\|\tilde{H}_{\Phi_N}\tilde{H}_{\tilde{\Phi}_N}\|_2 < 1$ de sorte que l'on a finalement

$$(57) \quad \mathcal{A}_\infty(\varphi) = \langle \varphi, Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^* \rangle.$$

Ceci s'écrit, en remplaçant φ par $X(Q)$,

$$(58) \quad \mathcal{A}_\infty(X(Q)) = \langle X(Q), Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^* \rangle.$$

Aussi, en remplaçant $X(Q)$ par sa valeur, nous obtenons

$$\mathcal{A}_\infty(X(Q)) = \left\langle \pi_+(\pi_+(Q_1 G_2^{-1})\tilde{\Phi}_N), Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^* \right\rangle.$$

Puisque G_1 et G_2 commutent, on a aussi

$$Q_1 G_1^* \Phi_N^* = Q_1 G_2^{*-1} \bar{\chi}^{N+1}.$$

Enfin, l'hypothèse $Q_1 \in \mathcal{P}_N^{\perp H^+}$ permet d'écrire que $Q_1 \bar{\chi}^{N+1} \in H^+$. Donc, on a aussi que $Q_1 G_2^{*-1} \bar{\chi}^{N+1}$ et $Q_1 G_1^* \Phi_N^*$ appartiennent à H^+ . Tout ceci implique

$$(59) \quad \mathcal{A}_\infty(X(Q)) = \left\langle \pi_+(Q_1 G_2^{-1})\tilde{\Phi}_N, Q_1 G_1^{*-1} \Phi_N^* \right\rangle = \left\langle \pi_+(Q_1 G_2^{-1})G_1^{-1}, Q_1 \right\rangle.$$

Les égalités (56) et (59) permettent de conclure. $\square$

8. Cas des transitions non bornées

Démontrons la proposition 3.2.1. Conformément à la section 1.3, la matrice de transition associée à cette marche aléatoire est une matrice carrée par blocs d'ordre $(N+1)^2$ et de terme général la matrice carrée $P_{i,j}$ d'ordre $N+1$ telle que

$$\begin{cases} P_{ij} = P_{i'j'} & \text{si } i - j = i' - j', \\ P_i = 0 & \text{si } i \leq -p, \\ P_i = \text{diag}(d_i) & \text{pour } i \geq -p \text{ et } i \neq 0, \\ P_0 = d_0 I_N + J(c_{-1}, c_1). \end{cases}$$

On notera donc P_{i-j} le bloc P_{ij} . Le symbole correspondant est

$$F(\theta) = I_N - \sum_{i=-p}^N P_i \chi^i.$$

On a donc, par une démarche analogue à celle de la section 6.2,

$$(60) \quad F(\theta) = \mathcal{P} \text{diag}(p_k(\chi))_k \mathcal{P}^{-1}$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{P} = D^T \tilde{Q}, \quad \text{où } D = \text{diag}\left(\sqrt{c_{-1}c_1}^{k+1}\right)_k \text{ et } \tilde{Q} \text{ est donné dans le lemme 6.1.1,} \\ p_k(z) = 1 - 2\sqrt{c_{-1}c_1} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right) - \sum_{i=-p}^N d_i z^i. \end{cases}$$

Les polynômes $p_k(z)$ admettent exactement p zéros à l'intérieur du disque unité. En effet, si $|z| = 1$, on a

$$\begin{aligned} \left| 2\sqrt{c_{-1}c_1} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right) + \sum_{-p}^N d_i z^i \right| &\leq 2\sqrt{c_{-1}c_1} + \sum_{-p}^N d_i \\ &\leq c_{-1} + c_1 + \sum_{-p}^N d_i \\ &< 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le théorème de Rouché [1], le nombre de zéros à l'intérieur du disque unité est égal au nombre de pôles à l'intérieur de ce même disque et ce nombre est p puisque 0 est pôle d'ordre p . Ainsi, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, N\}$, il existe une famille de complexes de module inférieur à 1, $\{x_{k,i}\}_{i \in \{1, \dots, p\}}$ tels que

$$z^p p_k(z) = \prod_{i=1}^p (z - x_{k,i}) h_k(z).$$

On déduit les factorisations successives

$$p_k(\chi) = \prod_{i=1}^p (1 - x_{k,i} \bar{\chi}) h_k(\chi)$$

et finalement $F(\theta) = G_1 G_2$ avec

$$G_1 = \mathcal{P} \text{diag}(h_k(\chi)) \mathcal{P}^{-1} \in H^+$$

et

$$G_2 = \mathcal{P} \text{diag}\left(\prod_{i=1}^p (1 - x_{k,i} \bar{\chi})\right) \mathcal{P}^{-1} \in H^-.$$

Les calculs de l'exemple 3.2.2 étant directs, nous donnons sans détail les résultats suivants. Notons x_k la racine du polynôme

$$\left(1 - 2\sqrt{c_{-1}c_1} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right)\right) pX^2 - \left(1 - 2\sqrt{c_{-1}c_1} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right)\right) X + q$$

comprise strictement entre 0 et 1. On obtient ainsi

$$G_1 = I - W_1(\chi) \text{ et } G_2 = (I - W_2 \bar{\chi})B$$

où

$$\begin{cases} W_2 \text{ est la matrice constante } \mathcal{P} \text{diag}(x_k)_k \mathcal{P}^{-1}, \\ B \text{ est la matrice constante } \mathcal{P} \text{diag}(p/qx_k)_k \mathcal{P}^{-1}, \\ W_1 = \mathcal{P} \text{diag}\left(qx_k \left(1 - 2\sqrt{c_{-1}c_1} \cos\left(\frac{k+1}{N+2}\pi\right)\right)\right)_k \mathcal{P}^{-1} \frac{\chi}{1-p\chi}. \end{cases}$$

Ceci montre que la propriété $\mathcal{D}_\infty$ est également vérifiée.

Remerciements. Nous tenons à remercier l'arbitre de cet article pour l'intérêt qu'il a porté à notre travail et pour ses remarques constructives.

RÉFÉRENCES

- [1] A.F. Beardon, *A primer on Riemann surfaces*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **78**, Cambridge University Press, 1984, x+188 pp.
- [2] A. Böttcher and B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 512 pp.
- [3] J. Chanzy, *Inverse du Laplacien discret dans le problème de Poisson-Dirichlet à deux dimensions sur un rectangle*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **15**, 2006, no. 3, 485–552.
- [4] J. Chanzy, *Inversion d'un opérateur de Toeplitz tronqué à symbole matriciel et théorèmes-limite de Szegő*, Ann. Math. Blaise Pascal **13**, 2006, no. 1, 111–205.
- [5] C. Delorme and J.-M. Rinkel, *About the generating function of a left bounded discret random variable*, prépublications de l'Université Paris-sud, 2006.
- [6] G. Fayolle, R. Iasnogorodski and V. A. Malyshev, *Random walks in the quarter-plane*, in Algebraic methods, boundary value problems and applications, Applications of Mathematics (New York), **40**, Springer-Verlag, Berlin, 1999, xvi+156 pp.
- [7] G. Fayolle, V. A. Malyshev and M.V. Men'shikov, *Topics in the constructive theory of countable Markov chains*, Cambridge University Press, 1995, iv+169 pp.
- [8] I. Ibrahimov et Y. Rozanov, *Processus aléatoires gaussiens*, Éditions Mir de Moscou, 1^{re} édition, 1974.
- [9] H. Kesten, *Random walks with absorbing barriers and Toeplitz forms*, Illinois J. Math. **5**, 1961, 267–290.
- [10] A. Kmet and M. Petkovšek, *Gambler's ruin problem in several dimensions*, Adv. in Appl. Math. **28**, 2002, no. 2, 107–118.
- [11] G. Pólya, *Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz*, Math. Ann. **84**, 1921, no. 1-2, 149–160.
- [12] P. Rambour and J.-M. Rinkel, *Application of the exact inverse of the Toeplitz matrix with singular rational symbol to random walks*, Probab. Math. Statist. **25**, 2005, no. 1, Acta Univ. Wratislav. No. 2784, 183–195.
- [13] P. Rambour, J.-M. Rinkel et A. Seghier, *Inverse asymptotique de la matrice de Toeplitz et noyau de Green*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331**, 2000, no. 11, 857–860.
- [14] P. Rambour et A. Seghier, *Une extension d'un résultat de Szegő sur les valeurs propres des matrices de Toeplitz*, Bull. Sci. Math. **131**, 2007, no. 3, 258–275.
- [15] J.-M. Rinkel, *Inverses et propriétés spectrales des matrices de Toeplitz à symbole singulier*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **11**, 2002, no. 1, 71–103.
- [16] A. Seghier, *Inversion de la matrice de Toeplitz en d dimensions et développement asymptotique de la trace de l'inverse à l'ordre d* , J. Funct. Anal. **67**, 1986, no. 3, 380–412.
- [17] F. Spitzer and C.J. Stone, *A class of Toeplitz forms and their application to probability theory*, Illinois J. Math. **4**, 1960, 253–277.
- [18] F. Spitzer, *Principles of random walks*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 34, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976, xiii+408 pp.

P. RAMBOUR, U. DE PARIS SUD, DÉP. DE MATH., BÂT. 425, 91405, ORSAY CEDEX, FRANCE.
 philippe.rambour@math.u-psud.fr

J.-M. RINKEL, U. DE PARIS SUD, DÉP. DE MATH., BÂT. 425, 91405, ORSAY CEDEX, FRANCE.
 jean-marc.rinkel@math.u-psud.fr