

TOPOLOGIE SUR L'ENSEMBLE DES PARTIES POSITIVES D'UN RÉSEAU

CÉDRIC BONNAFÉ

RÉSUMÉ. Nous définissons une notion de partie positive d'un réseau Λ et munissons l'ensemble de ces parties positives d'une topologie. Nous étudions ensuite quelques propriétés de cette topologie, en la comparant à celle de $V^*/\mathbb{R}_{>0}$, où V^* est l'espace vectoriel dual de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$.

ABSTRACT. We define a notion of positive part of a lattice Λ and we endow the set of such positive parts with a topology. We then study some properties of this topology, by comparing it with the one of $V^*/\mathbb{R}_{>0}$, where V^* is the dual vector space of $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$.

Introduction

Fixons dans cet article un réseau Λ et posons $V = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$. Une partie X de Λ est dite *positive* si $\Lambda = X \cup (-X)$; $X + X \subset X$; et $X \cap (-X)$ est un sous-groupe de Λ . Le but de cet article est d'étudier l'ensemble $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ des parties positives de Λ , et notamment de le munir d'une topologie, ceci de façon fonctorielle.

Nous définissons notamment deux applications continues $\pi : \mathcal{Pos}(\Lambda) \rightarrow V^*/\mathbb{R}_{>0}$ et $\overline{\text{Pos}} : V^*/\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{Pos}(\Lambda)$ et nous montrons que $\pi \circ \overline{\text{Pos}} = \text{Id}_{V^*/\mathbb{R}_{>0}}$. De plus, $\overline{\text{Pos}}$ induit un homéomorphisme sur son image, et celle-ci est dense dans $\mathcal{Pos}(\Lambda)$. Ces propriétés sont résumées dans le théorème 2.12.

Nous terminons cet article par une étude des arrangements d'hyperplans dans l'ensemble $\mathcal{Pos}(\Lambda)$, en montrant notamment que l'intuition classique sur les arrangements d'hyperplans réels reste valide.

Ces résultats seront utilisés ultérieurement par l'auteur pour étudier le comportement des cellules de Kazhdan-Lusztig lorsque les paramètres varient [1]; voir la section 4 pour une explication légèrement détaillée.

1. Parties positives d'un réseau

Le but de cette section est d'étudier l'ensemble des parties positives de Λ . Nous munirons cet ensemble d'une topologie dans la section suivante.

1.1. Définitions et préliminaires

Une partie X de Λ est dite *positive* si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (P1) $\Lambda = X \cup (-X)$;
- (P2) $X + X \subset X$;
- (P3) $X \cap (-X)$ est un sous-groupe de Λ .

Nous noterons $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ l'ensemble des parties positives de Λ . Donnons quelques exemples. Pour commencer, notons que $\Lambda \in \mathcal{Pos}(\Lambda)$. Soit Γ un groupe totalement ordonné et soit $\varphi : \Lambda \rightarrow \Gamma$ un morphisme de groupes. Posons

$$\text{Pos}(\varphi) = \{\lambda \in \Lambda \mid \varphi(\lambda) \geq 0\} \quad \text{et} \quad \text{Pos}^+(\varphi) = \{\lambda \in \Lambda \mid \varphi(\lambda) > 0\}.$$

Alors il est clair que

$$\text{Ker } \varphi = \text{Pos}(\varphi) \cap \text{Pos}(-\varphi) = \text{Pos}(\varphi) \cap -\text{Pos}(\varphi)$$

et que

- (1) $\text{Pos}(\varphi)$ est une partie positive de Λ .

Lemme 1.1. Soit X une partie positive de Λ . Alors,

- (a) $-X \in \mathcal{Pos}(\Lambda)$;
- (b) $0 \in X$;
- (c) Si $\lambda \in \Lambda$ et $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ sont tels que $r\lambda \in X$, alors $\lambda \in X$;
- (d) $\Lambda/(X \cap (-X))$ est sans torsion.

Démonstration. L'énoncé (a) est immédiat. D'autre part, (b) découle de la propriété (P1) des parties positives, alors que (d) découle de (c). Il nous reste à montrer (c). Soient $\lambda \in \Lambda$ et $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $r\lambda \in X$. Si $\lambda \notin X$, alors $-\lambda \in X$ d'après la propriété (P1). D'où $\lambda = r\lambda + (r-1)(-\lambda) \in X$ d'après (P2), ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $\lambda \in X$. $\square$

Nous allons montrer une forme de réciproque à la propriété (1). Soit $X \in \mathcal{Pos}(\Lambda)$. Notons $\text{can}_X : \Lambda \rightarrow \Lambda/(X \cap (-X))$ le morphisme canonique. Si γ et γ' appartiennent à $\Lambda/(X \cap (-X))$, nous écrirons $\gamma \leq_X \gamma'$ s'il existe un représentant de $\gamma' - \gamma$ appartenant à X . Il est facile de vérifier que $\gamma \leq_X \gamma'$ si et seulement si tout représentant de $\gamma' - \gamma$ appartient à X . On déduit alors facilement des propriétés (P1), (P2) et (P3) des parties positives que $(\Lambda/(X \cap (-X)), \leq_X)$ est un groupe abélien totalement ordonné et que

$$X = \text{Pos}(\text{can}_X).$$

1.2. Fonctorialité

Soit $\sigma : \Lambda' \rightarrow \Lambda$ un morphisme de groupes abéliens. Le résultat suivant est facile à démontrer.

Lemme 1.2. Si X est une partie positive de Λ , alors $\sigma^{-1}(X)$ est une partie positive de Λ' .

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{Pos}(\Lambda)$. Posons $X' = \sigma^{-1}(X)$. Nous allons montrer que $X' \in \mathcal{Pos}(\Lambda')$. Premièrement, on a

$$X' \cup (-X') = \sigma^{-1}(X \cup (-X)) = \sigma^{-1}(\Lambda) = \Lambda'.$$

Deuxièmement, si λ' et μ' sont deux éléments de X' , alors $\sigma(\lambda')$ et $\sigma(\mu')$ appartiennent à X . Ainsi $\sigma(\lambda') + \sigma(\mu') \in X$. En d'autres termes, $\lambda' + \mu' \in X'$, et donc $X' + X' \subseteq X'$. Enfin, on a $X' \cap (-X') = \sigma^{-1}(X \cap (-X))$, et par conséquent l'ensemble $X' \cap (-X')$ est un sous-groupe de Λ' . $\square$

Corollaire 1.3. *Soient Λ' un sous-groupe de Λ et X une partie positive de Λ . Alors $X \cap \Lambda'$ est une partie positive de Λ' .*

Si $\sigma : \Lambda' \rightarrow \Lambda$ est un morphisme de groupes abéliens, nous noterons

$$\begin{aligned} \sigma^* : \text{Pos}(\Lambda) &\longrightarrow \text{Pos}(\Lambda'), \\ X &\longmapsto \sigma^{-1}(X) \end{aligned}$$

l'application induite par le lemme 1.2. Si $\tau : \Lambda'' \rightarrow \Lambda'$ est un morphisme de groupes abéliens, il est alors facile de vérifier que

$$(\tau \circ \sigma)^* = \sigma^* \circ \tau^*.$$

1.3. Conséquences du théorème de Hahn-Banach

Soit X est une partie positive de Λ . On pose $X^+ = X \setminus (-X)$. On a alors

$$(2) \quad \Lambda = X \dot{\cup} (-X^+) = X^+ \dot{\cup} (-X) = X^+ \dot{\cup} (X \cap (-X)) \dot{\cup} (-X^+),$$

où $\dot{\cup}$ désigne l'union disjointe. De plus, si $\varphi : \Lambda \rightarrow \Gamma$ est un morphisme de groupes abéliens et si Γ est un groupe totalement ordonné, alors

$$\text{Pos}^+(\varphi) = \text{Pos}(\varphi)^+.$$

Si φ est une forme linéaire sur V , nous noterons abusivement $\text{Pos}(\varphi)$ et $\text{Pos}^+(\varphi)$ les parties $\text{Pos}(\varphi|_{\Lambda})$ et $\text{Pos}^+(\varphi|_{\Lambda})$ de Λ .

Lemme 1.4. *Soient X une partie positive propre de Λ , Γ un groupe abélien totalement ordonné archimédien et $\varphi : \Lambda \rightarrow \Gamma$ un morphisme de groupes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $X \subseteq \text{Pos}(\varphi)$;
- (b) $X^+ \subseteq \text{Pos}(\varphi)$;
- (c) $\text{Pos}^+(\varphi) \subseteq X^+$;
- (d) $\text{Pos}^+(\varphi) \subseteq X$.

Démonstration. Il est clair que (a) implique (b) et que (c) implique (d). Montrons que (b) implique (c). Supposons que (b) est vérifiée. Soit $\lambda \in \Lambda$ tel que $\varphi(\lambda) > 0$ et supposons que $\lambda \notin X^+$. Alors, d'après (2), $\lambda \in -X$. Or, si $\mu \in \Lambda$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $\varphi(\mu - k\lambda) = \varphi(\mu) - k\varphi(\lambda) < 0$ (car Γ est archimédien). Donc $\mu - k\lambda \notin X^+$ d'après (b). Ainsi $\mu - k\lambda \in -X$ d'après (2), et par conséquent $\mu = (\mu - k\lambda) + k\lambda \in (-X)$. Donc $\Lambda \subseteq -X$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Montrons que (d) implique (a). Supposons que $\text{Pos}^+(\varphi) \subseteq X$. En prenant le complémentaire dans Λ , on obtient $(-X^+) = (-X)^+ \subseteq \text{Pos}(-\varphi)$ et donc, puisque (b) implique (c), on a $\text{Pos}^+(-\varphi) \subseteq -X^+$. En reprenant le complémentaire dans Λ , on obtient $X \subseteq \text{Pos}(\varphi)$. $\square$

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant.

Lemme 1.5. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de Λ et supposons que $(t_1, \dots, t_n)$ est un n -uplet de nombres réels strictement positifs tels que $t_1\lambda_1 + \dots + t_n\lambda_n = 0$. Alors il existe des entiers naturels non nuls $r_1, \dots, r_n$ tels que $r_1\lambda_1 + \dots + r_n\lambda_n = 0$.

Démonstration. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des n -uplets $(u_1, \dots, u_n)$ de nombres réels qui satisfont

$$u_1\lambda_1 + \dots + u_n\lambda_n = 0.$$

Écrit dans une base de Λ , ceci est un système linéaire d'équations à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Le procédé d'élimination de Gauss implique l'existence de vecteurs $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{Q}^n$ tels que

$$\mathcal{S} = \{x_1v_1 + \dots + x_rv_r \mid (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r\}.$$

En particulier, il existe $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$ tels que

$$(t_1, \dots, t_n) = x_1v_1 + \dots + x_rv_r.$$

Puisque $t_1, \dots, t_n$ sont strictement positifs, il existe $x'_1, \dots, x'_r$ dans $\mathbb{Q}$ tels que les coordonnées de $x'_1v_1 + \dots + x'_rv_r$ soient strictement positives. Posons alors $(u_1, \dots, u_n) = x'_1v_1 + \dots + x'_rv_r$. On a donc $u_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ pour tout i et

$$u_1\lambda_1 + \dots + u_n\lambda_n = 0.$$

Quitte à multiplier par le produits des dénominateurs des u_i , où $1 \leq i \leq n$, on a trouvé $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que

$$r_1\lambda_1 + \dots + r_n\lambda_n = 0,$$

comme attendu. $\square$

Théorème 1.6. Soit X une partie positive de Λ différente de Λ . Alors,

- (a) Il existe une forme linéaire φ sur V telle que $X \subseteq \text{Pos}(\varphi)$;
- (b) Si φ et φ' sont deux formes linéaires sur V telles que $X \subseteq \text{Pos}(\varphi) \cap \text{Pos}(\varphi')$, alors il existe $\kappa \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\varphi' = \kappa\varphi$.

Démonstration. Notons $\mathcal{C}^+$ l'enveloppe convexe de X^+ . Notons que X^+ (et donc $\mathcal{C}^+$) est non vide car $X \neq \Lambda$. Nous montrons d'abord que $0 \notin \mathcal{C}^+$. Supposons que $0 \in \mathcal{C}^+$. Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans X^+ et $t_1, \dots, t_n$ dans $\mathbb{R}_{>0}$ tels que

$$\begin{cases} t_1 + \dots + t_n = 1, \\ t_1\lambda_1 + \dots + t_n\lambda_n = 0. \end{cases}$$

D'après le lemme 1.5, il existe $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $r_1\lambda_1 = -(r_2\lambda_2 + \dots + r_n\lambda_n)$. Donc $r_1\lambda_1 \in X \cap -X$; voir la propriété (P2). D'après le lemme 1.1 (a) et (c), on a $\lambda_1 \in X \cap -X$, ce qui est impossible car $\lambda_1 \in X^+ = X \setminus (-X)$. Cela montre que $0 \notin \mathcal{C}^+$.

L'ensemble $\mathcal{C}^+$ étant convexe, il découle du théorème de Hahn-Banach qu'il existe une forme linéaire non nulle φ sur V telle que

$$\mathcal{C}^+ \subseteq \{\lambda \in V \mid \varphi(\lambda) \geq 0\}.$$

En particulier,

$$X^+ \subseteq \mathcal{C}^+ \cap \Lambda \subseteq \text{Pos}(\varphi).$$

D'après le lemme 1.4, et puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, on a bien $X \subseteq \text{Pos}(\varphi)$. Cela montre (a).

Soit φ' une forme linéaire telle que $X \subseteq \text{Pos}(\varphi')$. Posons

$$U = \{\lambda \in V \mid \varphi(\lambda) > 0 \text{ et } \varphi'(\lambda) < 0\}.$$

Alors U est un ouvert de V . Fixons une $\mathbb{Z}$ -base $(e_1, \dots, e_d)$ de Λ . Si $U \neq \emptyset$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ et $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ tels que λ et $\lambda + \varepsilon e_1, \dots, \lambda + \varepsilon e_d$ appartiennent tous deux à U . Quitte à multiplier par le produit des dénominateurs de ε et des coordonnées de λ dans la base $(e_1, \dots, e_d)$, on peut supposer que $\lambda \in \Lambda$ et $\varepsilon \in \mathbb{Z}_{>0}$. Mais il est clair que $U \cap X^+ = \emptyset$ et $U \cap (-X^+) = \emptyset$. Donc $U \cap \Lambda$ est contenu dans $X \cap (-X)$. Ce dernier étant un sous-groupe, on en déduit que $\varepsilon e_i \in X \cap (-X)$ pour tout i . D'où, d'après le lemme 1.1 (c), $e_i \in X \cap (-X)$ pour tout i . Donc $X = \Lambda$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On en déduit que U est vide, c'est-à-dire qu'il existe $\kappa \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\varphi' = \kappa\varphi$. Ceci démontre (b). $\square$

Si φ est une forme linéaire sur V , nous noterons $\bar{\varphi}$ sa classe dans $V^*/\mathbb{R}_{>0}$ et $p : V^* \rightarrow V^*/\mathbb{R}_{>0}$ la projection canonique. L'application $\text{Pos} : V^* \rightarrow \text{Pos}(\Lambda)$ se factorise à travers p en une application $\bar{\text{Pos}} : V^*/\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \text{Pos}(\Lambda)$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V^* & & \\ p \downarrow & \searrow \text{Pos} & \\ V^*/\mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow{\bar{\text{Pos}}} & \text{Pos}(\Lambda) \end{array}$$

commutatif. D'autre part, si $X \in \text{Pos}(\Lambda)$, nous noterons $\pi(X)$ l'unique élément $\bar{\varphi}$ de $V^*/\mathbb{R}_{>0}$ tel que $X \subseteq \bar{\text{Pos}}(\bar{\varphi})$; voir le théorème 1.6. On a défini deux applications

$$V^*/\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\bar{\text{Pos}}} \text{Pos}(\Lambda) \xrightarrow{\pi} V^*/\mathbb{R}_{>0}$$

et le théorème 1.6 (b) montre que

$$\pi \circ \bar{\text{Pos}} = \text{Id}_{V^*/\mathbb{R}_{>0}}.$$

Donc π est surjective et $\bar{\text{Pos}}$ est injective. En revanche, ni π , ni $\bar{\text{Pos}}$ ne sont des bijections (sauf si Λ est de rang 1). Nous allons décrire les fibres de π .

Proposition 1.7. *Soit φ une forme linéaire non nulle sur V . Alors l'application*

$$\begin{aligned} i_{\bar{\varphi}} : \text{Pos}(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda}) &\longrightarrow \pi^{-1}(\bar{\varphi}), \\ X &\longmapsto X \cup \text{Pos}^+(\varphi) \end{aligned}$$

est bien définie et bijective. Sa réciproque est l'application

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\bar{\varphi}) &\longrightarrow \text{Pos}(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda}), \\ Y &\longmapsto Y \cap \text{Ker } \varphi|_{\Lambda}. \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que l'application $i_{\bar{\varphi}}$ est bien définie. Soit $X \in \text{Pos}(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda})$. Posons $Y = X \cup \text{Pos}^+(\varphi)$. Montrons que Y est une partie positive de Λ . Avant cela, notons que

$$(3) \quad Y \subseteq \text{Pos}(\varphi).$$

(1) Dans l'alternative où $\lambda \in \Lambda$, deux cas se présentent. D'une part, si $\varphi(\lambda) \neq 0$, alors $\lambda \in \text{Pos}^+(\varphi) \cup -\text{Pos}^+(\varphi) \subseteq Y \cup (-Y)$. D'autre part, si $\varphi(\lambda) = 0$, alors $\lambda \in \text{Ker } \varphi|_{\Lambda}$, donc $\lambda \in X \cup (-X) \subseteq Y \cup (-Y)$ car X est une partie positive de $\text{Ker } \varphi|_{\Lambda}$. Par conséquent $\Lambda = Y \cup (-Y)$.

(2) Soient $\lambda, \mu \in Y$. Montrons que $\lambda + \mu \in Y$. D'une part, si $\varphi(\lambda + \mu) > 0$, alors $\lambda + \mu \in \text{Pos}^+(\varphi) \subseteq Y$. D'autre part, si $\varphi(\lambda + \mu) = 0$, alors il résulte de (3) que $\varphi(\lambda) = \varphi(\mu) = 0$, donc $\lambda, \mu \in \text{Ker } \varphi|_\Lambda$. En particulier, on a $\lambda, \mu \in X$ et par conséquent $\lambda + \mu \in X + X \subseteq X \subseteq Y$. Ainsi $Y + Y \subseteq Y$.

(3) Enfin, on a $Y \cap (-Y) = X \cap (-X)$, donc $Y \cap (-Y)$ est un sous-groupe de Λ .

Les points (1), (2) et (3) ci-dessus montrent que Y est une partie positive de Λ . L'inclusion (3) montre que $\pi(Y) = \bar{\varphi}$, c'est-à-dire que $Y \in \pi^{-1}(\bar{\varphi})$. Donc l'application $i_{\bar{\varphi}}$ est bien définie.

Elle est injective car si $X \in \text{Pos}(\text{Ker } \varphi|_\Lambda)$ alors $X \cap \text{Pos}^+(\varphi) = \emptyset$. Montrons maintenant qu'elle est surjective. Soit $Y \in \pi^{-1}(\bar{\varphi})$. Posons $X = Y \cap \text{Ker } \varphi|_\Lambda$. Alors X est une partie positive de $\text{Ker } \varphi|_\Lambda$ d'après le corollaire 1.3. Posons $Y' = X \cup \text{Pos}^+(\varphi)$. Il nous reste à montrer que $Y = Y'$.

Tout d'abord, $\text{Pos}^+(\varphi) \subseteq Y$ car $\pi(Y) = \bar{\varphi}$ par hypothèse et $X \subseteq Y$. Donc $Y' \subseteq Y$. Réciproquement, si $\lambda \in Y$, alors deux cas se présentent. Si $\varphi(\lambda) > 0$, alors $\lambda \in \text{Pos}^+(\varphi) \subseteq Y'$. Si $\varphi(\lambda) = 0$, alors $\lambda \in Y \cap \text{Ker } \varphi|_\Lambda = X \subseteq Y'$. Dans tous les cas, $\lambda \in Y'$. $\square$

Remarque 1.8. Il est facile de voir que $\pi^{-1}(\bar{0}) = \{\Lambda\}$. Nous pouvons aussi définir une application $i_{\bar{0}} : \text{Pos}(\Lambda) \rightarrow \text{Pos}(\Lambda)$ par la même formule que dans la proposition 1.7 : alors $i_{\bar{0}}$ est tout simplement l'application identité mais on a dans ce cas-là $\pi^{-1}(\bar{0}) \neq i_{\bar{0}}(\text{Pos}(\Lambda))$.

Exemple 1.9. Si $\varphi \neq 0$ est une forme linéaire sur V , alors $\text{Pos}(\varphi) = i_{\bar{\varphi}}(\text{Ker } \varphi|_\Lambda)$.

Nous pouvons maintenant classier les parties positives de Λ en termes de formes linéaires. Notons $\mathcal{F}(\Lambda)$ l'ensemble des suites finies $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ telles que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, φ_i est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\Lambda \cap \text{Ker } \varphi_{i-1})$, où nous avons posé $\varphi_0 = 0$. Par convention, nous supposons que la suite vide, notée $\emptyset$, appartient à $\mathcal{F}(\Lambda)$.

Posons $d = \dim V$. Notons que, si $(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in \mathcal{F}(\Lambda)$, alors $r \leq d$. Nous définissons donc l'action suivante de $(\mathbb{R}_{>0})^d$ sur $\mathcal{F}(\Lambda)$: si $(\kappa_1, \dots, \kappa_d) \in (\mathbb{R}_{>0})^d$ et si $(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in \mathcal{F}(\Lambda)$, on pose

$$(\kappa_1, \dots, \kappa_d) \cdot (\varphi_1, \dots, \varphi_r) = (\kappa_1 \varphi_1, \dots, \kappa_r \varphi_r).$$

Munissons $\mathbb{R}^r$ de l'ordre lexicographique : c'est un groupe abélien totalement ordonné et $(\varphi_1, \dots, \varphi_r) : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^r$ est un morphisme de groupes. Donc $\text{Pos}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ est bien défini et appartient à $\text{Pos}(\Lambda)$. En fait, toute partie positive de Λ peut être retrouvée ainsi, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.10. *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Lambda) &\longrightarrow \text{Pos}(\Lambda), \\ \varphi &\longmapsto \text{Pos}(\varphi) \end{aligned}$$

est bien définie et induit une bijection $\mathcal{F}(\Lambda)/(\mathbb{R}_{>0})^d \xrightarrow{\sim} \text{Pos}(\Lambda)$ (où, par convention, $\text{Pos}(\emptyset) = \Lambda$).

Démonstration. Cela résulte immédiatement d'un raisonnement par récurrence sur le rang de Λ en utilisant le théorème 1.6 et la proposition 1.7. $\square$

Si $\varphi \in \mathcal{F}(\Lambda)$, nous noterons $\bar{\varphi}$ sa classe dans $\mathcal{F}(\Lambda)/(\mathbb{R}_{>0})^d$ et nous poserons $\overline{\text{Pos}}(\bar{\varphi}) = \text{Pos}(\varphi)$. Comme corollaire de la proposition 1.10, nous obtenons une classification des ordres totaux sur Λ (compatibles avec la structure de groupe), ce qui est un résultat classique [4]. En fait, se donner un ordre total sur Λ est équivalent à se donner une partie positive X de Λ telle que $X \cap (-X) = 0$. Notons $\mathcal{F}_0(\Lambda)$ l'ensemble des éléments $(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in \mathcal{F}(\Lambda)$ tels que $\Lambda \cap \text{Ker } \varphi_r = 0$.

Corollaire 1.11. *L'application décrite dans la proposition 1.10 induit une bijection entre l'ensemble $\mathcal{F}_0(\Lambda)/(\mathbb{R}_{>0})^d$ et l'ensemble des ordres totaux sur Λ compatibles avec la structure de groupe.*

Si $\sigma : \Lambda' \rightarrow \Lambda$ est un morphisme de groupes abéliens, les constructions de cette sous-section sont fonctorielles. Plus précisément, si on note $V' = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda'$, alors σ induit une application $\mathbb{R}$ -linéaire $\sigma_{\mathbb{R}} : V' \rightarrow V$. Nous noterons ${}^t\sigma_{\mathbb{R}} : V^* \rightarrow V'^*$ l'application duale et ${}^t\bar{\sigma}_{\mathbb{R}} : V^*/\mathbb{R}_{>0} \rightarrow V'^*/\mathbb{R}_{>0}$ l'application (continue) induite. Il est alors facile de vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} V^*/\mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow{\overline{\text{Pos}}} & \mathcal{Pos}(\Lambda) & \xrightarrow{\pi} & V^*/\mathbb{R}_{>0} \\ \downarrow {}^t\bar{\sigma}_{\mathbb{R}} & & \downarrow \sigma^* & & \downarrow {}^t\bar{\sigma}_{\mathbb{R}} \\ V'^*/\mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow{\overline{\text{Pos}'}} & \mathcal{Pos}(\Lambda') & \xrightarrow{\pi'} & V'^*/\mathbb{R}_{>0} \end{array}$$

est commutatif (où $\overline{\text{Pos}'}$ et π' sont les analogues de $\overline{\text{Pos}}$ et π pour le réseau Λ').

2. Topologie sur $\mathcal{Pos}(\Lambda)$

Dans cette section, nous allons définir une topologie sur $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ et en étudier les propriétés. Nous allons notamment montrer que la plupart des applications introduites dans la section précédente ($\overline{\text{Pos}}$, π , $i_{\bar{\varphi}}, \dots$) sont continues.

2.1. Résultats préliminaires

Si E est une partie de Λ , nous poserons

$$\mathcal{U}(E) = \{X \in \mathcal{Pos}(\Lambda) \mid X \cap E = \emptyset\}.$$

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des éléments de Λ , nous noterons pour simplifier $\mathcal{U}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ l'ensemble $\mathcal{U}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\})$. Si cela est nécessaire, nous utiliserons la notation $\mathcal{U}_{\Lambda}(E)$ ou $\mathcal{U}_{\Lambda}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On a alors

$$\mathcal{U}(E) = \bigcap_{\lambda \in E} \mathcal{U}(\lambda).$$

D'une part, notons que

$$(4) \quad \mathcal{U}(\emptyset) = \mathcal{Pos}(\Lambda) \quad \text{et} \quad \mathcal{U}(\Lambda) = \{\emptyset\}.$$

D'autre part, si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de Λ , alors

$$(5) \quad \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}(E_i) = \mathcal{U}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right).$$

Une partie $\mathcal{U}$ de $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ sera dite *ouverte* si, pour tout $X \in \mathcal{U}$, il existe une partie finie E de Λ telle que $X \in \mathcal{U}(E)$ et $\mathcal{U}(E) \subset \mathcal{U}$. L'égalité (5) montre que cela définit bien une topologie sur $\mathcal{Pos}(\Lambda)$.

Proposition 2.1. *Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ contenant Λ , alors $\mathcal{U} = \mathcal{Pos}(\Lambda)$. En particulier, $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ est connexe. Si $\Lambda \neq 0$, alors $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ n'est pas séparé.*

Démonstration. Par définition, il existe une partie finie E de Λ telle que $\mathcal{U}(E)$ soit contenue dans $\mathcal{U}$. Mais on a forcément $E = \emptyset$, donc $\mathcal{U} = \mathcal{Pos}(\Lambda)$ d'après (4). D'où le résultat. Le fait que $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ n'est pas séparé (lorsque $\Lambda \neq 0$) en découle : le point Λ de $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ ne peut être séparé d'aucun autre. $\square$

Exemple 2.2. L'espace topologique $\mathcal{Pos}(\mathbb{Z})$ n'a que trois points : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $\mathbb{Z}_{\leq 0}$. Sur ces trois points, seul $\mathbb{Z}$ est un point fermé, alors que $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ sont des points ouverts (en effet, $\{\mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \mathcal{U}(-1)$ et $\{\mathbb{Z}_{\leq 0}\} = \mathcal{U}(1)$).

Il est clair que la topologie sur $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ définie ci-dessus est la topologie induite par une topologie sur l'ensemble des parties de Λ (définie de façon analogue) : cette dernière est très grossière mais sa restriction à $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ est plus intéressante. Nous aurons besoin de la propriété suivante des ensembles $\mathcal{U}(E)$.

Lemme 2.3. *Soit E une partie finie de Λ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $\mathcal{U}(E) = \emptyset$;
- (b) Il existe $n \geq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E$ et $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $\sum_{i=1}^n r_i \lambda_i = 0$;
- (c) Il n'existe pas de forme linéaire φ sur V^* telle que $\varphi(E) \subset \mathbb{R}_{>0}$.

Démonstration. S'il existe une forme linéaire φ sur V^* telle que $\varphi(E) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$, alors $\mathcal{Pos}(-\varphi) \in \mathcal{U}(E)$, et donc $\mathcal{U}(E) \neq \emptyset$. Par conséquent (a) implique (c). Supposons trouvés $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E$ et $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $r_1 \lambda_1 + \dots + r_n \lambda_n = 0$. Alors, si $X \in \mathcal{U}(E)$, on a $-\lambda_2, \dots, -\lambda_n \in X$. Mais $r_1 \lambda_1 = -r_2 \lambda_2 - \dots - r_n \lambda_n \in X$, donc $\lambda_1 \in X$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi (b) implique (a).

Il nous reste à montrer que (c) implique (b). Supposons que (b) n'est pas vraie. Nous allons montrer qu'alors (c) n'est pas vraie en raisonnant par récurrence sur la dimension de V (c'est-à-dire le rang de Λ). Posons

$$\mathcal{C} = \{t_1 \lambda_1 + \dots + t_n \lambda_n \mid n \geq 1; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda; t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_{>0}\}.$$

Alors $\mathcal{C}$ est une partie convexe de V contenant E et, d'après le lemme 1.5 et le fait que (b) ne soit pas vraie, on a $0 \notin \mathcal{C}$. Par conséquent, il résulte du théorème de Hahn-Banach qu'il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $\varphi(\mathcal{C}) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Posons $\Lambda' = (\text{Ker } \varphi) \cap \Lambda$ et $E' = E \cap \Lambda$. Alors l'assertion (b) pour E' n'est pas vraie elle aussi. Donc, par hypothèse de récurrence, il existe une forme linéaire ψ sur $V' = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda' \subseteq V$ telle que $\psi(E') \subset \mathbb{R}_{>0}$. Soit $\tilde{\psi}$ une extension de ψ à V . Puisque $\varphi(E \setminus E') \subset \mathbb{R}_{>0}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(\lambda) + \varepsilon \tilde{\psi}(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda \in E \setminus E'$. Or, si $\lambda \in E'$, alors $\varphi(\lambda) + \varepsilon \tilde{\psi}(\lambda) = \varepsilon \tilde{\psi}(\lambda) > 0$. Donc $(\varphi + \varepsilon \tilde{\psi})(E) \subset \mathbb{R}_{>0}$. $\square$

Si $\mathcal{E}$ est une partie de $\mathcal{Pos}(\Lambda)$, nous noterons $\bar{\mathcal{E}}$ son adhérence dans $\mathcal{Pos}(\Lambda)$.

Corollaire 2.4. Soit E une partie finie de Λ telle que $\mathcal{U}(E) \neq \emptyset$. Alors

$$\overline{\mathcal{U}(E)} = \mathcal{Pos}(\Lambda) \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in E} \mathcal{U}(-\lambda) \right).$$

Démonstration. Posons

$$\mathcal{O} = \bigcup_{\lambda \in E} \mathcal{U}(-\lambda) \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = \mathcal{Pos}(\Lambda) \setminus \mathcal{O}.$$

Alors $\mathcal{F}$ est fermé dans $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ et contient $\mathcal{U}(E)$. Donc $\overline{\mathcal{U}(E)} \subseteq \mathcal{F}$.

Réciproquement, soit $X \in \mathcal{Pos}(\Lambda) \setminus \overline{\mathcal{U}(E)}$. Nous devons montrer que

$$X \in \mathcal{O}.$$

Or, puisque $\mathcal{Pos}(\Lambda) \setminus \overline{\mathcal{U}(E)}$ est un ouvert, il existe une partie finie F de Λ telle que $X \in \mathcal{U}(F)$ et $\mathcal{U}(F) \subseteq \mathcal{O}$. En particulier, $\mathcal{U}(F) \cap \mathcal{U}(E) = \emptyset$. En d'autres termes, d'après (5), on a $\mathcal{U}(E \cup F) = \emptyset$. Donc, d'après le lemme 2.3, il existe $m \geq 0$; $n \geq 0$; $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in E$; $\mu_1, \dots, \mu_n \in F$ et $r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que

$$r_1 \lambda_1 + \dots + r_m \lambda_m + s_1 \mu_1 + \dots + s_n \mu_n = 0$$

et $m + n \geq 1$. En fait, comme $\mathcal{U}(E)$ et $\mathcal{U}(F)$ sont toutes deux non vides, il découle du lemme 2.3 que $m, n \geq 1$.

Si $X \notin \mathcal{O}$, alors $-\lambda_i \in X$ pour tout i , ce qui implique que $s_1 \mu_1 + \dots + s_n \mu_n \in X$. Cela ne peut se produire que si au moins l'un des μ_j appartient à X , mais ceci est impossible car $F \cap X = \emptyset$. D'où $X \in \mathcal{O}$. $\square$

Exemple 2.5. Le corollaire 2.4 n'est pas forcément vrai si $\mathcal{U}(E) = \emptyset$. En effet, si $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$, alors $\mathcal{U}(\lambda, -\lambda) = \emptyset$ mais, du moins lorsque $\dim V \geq 2$, nous avons $\mathcal{U}(\lambda) \cup \mathcal{U}(-\lambda) \neq \mathcal{Pos}(\Lambda)$.

2.2. Fonctorialité

Soient Λ' un réseau, $\sigma : \Lambda' \rightarrow \Lambda$ un morphisme de groupes et E' une partie de Λ' . Alors

$$(\sigma^*)^{-1}(\mathcal{U}_{\Lambda'}(E')) = \mathcal{U}_{\Lambda}(\sigma(E')).$$

En effet, soit X une partie positive de Λ . Alors nous avons $X \in (\sigma^*)^{-1}(\mathcal{U}_{\Lambda'}(E'))$ (resp. $X \in \mathcal{U}_{\Lambda}(\sigma(E'))$) si et seulement si $\sigma^{-1}(X) \cap E' = \emptyset$ (resp. $X \cap \sigma(E') = \emptyset$). Il est alors facile de vérifier que ces deux dernières conditions sont équivalentes. Cela implique le résultat suivant.

Proposition 2.6. L'application $\sigma^* : \mathcal{Pos}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{Pos}(\Lambda')$ est continue.

2.3. Continuité

À la section 1, nous avons équipé l'espace topologique $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ de deux applications, à savoir $\overline{\text{Pos}} : V^*/\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{Pos}(\Lambda)$ et $\pi : \mathcal{Pos}(\Lambda) \rightarrow V^*/\mathbb{R}_{>0}$, telles que $\pi \circ \overline{\text{Pos}} = \text{Id}_{V^*/\mathbb{R}_{>0}}$. Nous montrerons dans le théorème 2.7 que ces applications sont continues (lorsque $V^*/\mathbb{R}_{>0}$ est muni de la topologie quotient) et nous en déduirons quelques autres propriétés topologiques de ces applications. Avant cela, introduisons la notation suivante : si E est une partie finie de Λ , on pose

$$\mathcal{V}(E) = \{\bar{\varphi} \in V^*/\mathbb{R}_{>0} \mid \forall \lambda \in E, \varphi(\lambda) < 0\}.$$

Si cela est nécessaire, nous noterons $\mathcal{V}_\Lambda(E)$ l'ensemble $\mathcal{V}(E)$. Alors

$$p^{-1}(\mathcal{V}(E)) = \{\varphi \in V^* \mid \forall \lambda \in E, \varphi(\lambda) < 0\}.$$

Donc $p^{-1}(\mathcal{V}(E))$ est ouvert, et $\mathcal{V}(E)$ est ouvert dans $V^*/\mathbb{R}_{>0}$ par définition de la topologie quotient.

Proposition 2.7. *Les applications $\overline{\text{Pos}}$ et π sont continues. De plus,*

- (a) $\overline{\text{Pos}}$ induit un homéomorphisme sur son image;
- (b) L'image de $\overline{\text{Pos}}$ est dense dans $\mathcal{Pos}(\Lambda)$.

Démonstration. Soit E une partie finie de Λ . Alors

$$(6) \quad \overline{\text{Pos}}^{-1}(\mathcal{U}(E)) = \mathcal{V}(E).$$

Donc $\overline{\text{Pos}}^{-1}(\mathcal{U}(E))$ est un ouvert de $V^*/\mathbb{R}_{>0}$ et $\overline{\text{Pos}}$ est continue.

Montrons maintenant que π est continue. Nous procèderons par étapes :

(A) On commence par le lemme suivant.

Lemme 2.8. *Les $\mathcal{V}(E)$, où E parcourt l'ensemble des parties finies de Λ , forment une base d'ouverts de $V^*/\mathbb{R}_{>0}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $V^*/\mathbb{R}_{>0}$ et soit φ une forme linéaire sur V telle que $\bar{\varphi} \in \mathcal{U}$. Nous devons montrer qu'il existe une partie finie E de V telle que $\bar{\varphi} \in \mathcal{V}(E)$ et $\mathcal{V}(E) \subset \mathcal{U}$.

Si $\varphi = 0$, alors $\mathcal{U} = V^*/\mathbb{R}_{>0}$ et le résultat est clair. Nous supposons donc que $\varphi \neq 0$. Il existe alors $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $\varphi(\lambda_0) > 0$. Quitte à remplacer φ par un multiple positif, on peut supposer que $\varphi(\lambda_0) = 1$. Notons $\mathcal{H}_0$ l'hyperplan affine $\{\psi \in V^* \mid \psi(\lambda_0) = 1\}$. Alors l'application naturelle $\mathcal{H}_0 \rightarrow V^*/\mathbb{R}_{>0}$ induit un homéomorphisme $\nu : \mathcal{H}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(-\lambda_0)$. De plus, $\varphi = \nu^{-1}(\bar{\varphi}) \in \mathcal{H}_0$, et par conséquent $\bar{\varphi} \in \nu^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}(-\lambda_0))$. Il suffit donc de vérifier que les intersections finies de demi-espaces ouverts rationnels (i.e. de la forme $\{\psi \in \mathcal{H}_0 \mid \psi(\lambda) > n\}$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \Lambda \setminus \mathbb{Z}\lambda_0$) forment une base de voisinages de l'espace affine $\mathcal{H}_0$, ce qui est immédiat. $\square$

(B) Compte tenu du lemme 2.8, il suffit de montrer que, si E est une partie finie de Λ , alors $\pi^{-1}(\mathcal{V}(E))$ est un ouvert de $\mathcal{Pos}(\Lambda)$. De plus,

$$\mathcal{V}(E) = \bigcap_{\lambda \in E} \mathcal{V}(\lambda).$$

Par conséquent, la continuité de π découlera du lemme suivant.

Lemme 2.9. *Si $\lambda \in \Lambda$, alors $\pi^{-1}(\mathcal{V}(\lambda))$ est un ouvert de $\mathcal{Pos}(\Lambda)$.*

Démonstration. Soit $X \in \pi^{-1}(\mathcal{V}(\lambda))$ et soit $\varphi = \pi(X)$. Par définition, $\varphi(\lambda) < 0$ et donc $\lambda \notin X$. Soit $e_1, \dots, e_n$ une $\mathbb{Z}$ -base de Λ . Il existe un entier naturel non nul N tel que $\varphi(\lambda \pm \frac{1}{N}e_i) < 0$ pour tout i . Quitte à remplacer λ par $N\lambda$, on peut supposer que $\varphi(\lambda \pm e_i) < 0$ pour tout i . On pose

$$E = \{\lambda + e_1, \lambda - e_1, \dots, \lambda + e_n, \lambda - e_n\}.$$

Alors $X \in \mathcal{U}(E)$ par construction. Il reste à montrer que $\mathcal{U}(E) \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{V}(\lambda))$. Soit $Y \in \mathcal{U}(E)$ et posons $\psi = \pi(Y)$. Supposons de plus que $\psi \notin \mathcal{V}(\lambda)$. On a alors $\psi(\lambda) \geq 0$. D'autre part, $\psi(\lambda \pm e_i) \leq 0$ pour tout i . Cela montre que

$$2\psi(\lambda) = \psi(\lambda + e_1) + \psi(\lambda - e_1) \leq 0.$$

Donc $\psi(\lambda) = \psi(\lambda + e_i) = 0$ et $\psi(e_i) = 0$ pour tout i . Par conséquent ψ est nulle et $Y = \Lambda$, ce qui contredit le fait que $Y \in \mathcal{U}(E)$. Cela montre que $\psi \in \mathcal{V}(\lambda)$, comme attendu. $\square$

Puisque π et $\overline{\text{Pos}}$ sont continues et vérifient $\pi \circ \overline{\text{Pos}} = \text{Id}_{V^*/\mathbb{R}_{>0}}$, $\overline{\text{Pos}}$ induit un homéomorphisme sur son image. Ainsi l'assertion (a) de la proposition est vérifiée.

(C) L'assertion (b) découle du lemme suivant (qui est une reformulation de l'équivalence entre (a) et (c) dans le lemme 2.3) et de (6).

Lemme 2.10. *Soit E une partie finie de Λ . Alors $\mathcal{U}(E) \neq \emptyset$ si et seulement si $\mathcal{V}(E) \neq \emptyset$.*

La preuve de la proposition 2.7 est terminée. $\square$

Nous allons maintenant étudier les propriétés topologiques des applications $i_{\bar{\varphi}}$.

Proposition 2.11. *Soit $\varphi \in V^*$ et supposons que $\varphi \neq 0$. Alors,*

$$(a) \quad \bigcap_{\substack{\mathcal{U} \text{ ouvert de } \mathcal{Pos}(\Lambda) \\ \text{Pos}(\varphi) \in \mathcal{U}}} \mathcal{U} = i_{\bar{\varphi}}(\mathcal{Pos}(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda})) = \pi^{-1}(\bar{\varphi});$$

(b) $i_{\bar{\varphi}}$ est continue et induit un homéomorphisme sur son image.

Démonstration. (a) Notons I_{φ} l'image de $i_{\bar{\varphi}}$. On a alors, d'après le lemme 1.4,

$$(7) \quad I_{\varphi} = \{X \in \mathcal{Pos}(\Lambda) \mid \text{Pos}^+(\varphi) \subseteq X\}.$$

Si $\mathcal{U}$ est un ouvert contenant $\text{Pos}(\varphi)$, alors il existe une partie finie E de $\Lambda \setminus \text{Pos}(\varphi)$ telle que $\mathcal{U}(E) \subseteq \mathcal{U}$. Or, si X est dans l'image de $i_{\bar{\varphi}}$, alors $X \subseteq \text{Pos}(\varphi)$, donc $X \cap E = \emptyset$. Ainsi $X \in \mathcal{U}$, ce qui montre que

$$I_{\varphi} \subseteq \bigcap_{\substack{\mathcal{U} \text{ ouvert de } \mathcal{Pos}(\Lambda) \\ \text{Pos}(\varphi) \in \mathcal{U}}} \mathcal{U}.$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $X \in \mathcal{Pos}(\Lambda)$ tel que $X \notin I_{\varphi}$. Posons $\psi = \pi(X)$. On a $\bar{\psi} \neq \bar{\varphi}$. Donc, d'après la preuve du théorème 1.6, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $\varphi(\lambda) < 0$ et $\psi(\lambda) > 0$. On a donc, d'après le lemme 1.4, $X \notin \mathcal{U}(\lambda)$. D'autre part, $\text{Pos}(\varphi) \in \mathcal{U}(\lambda)$, d'où (a).

Montrons maintenant que l'assertion (b) est vérifiée. On considère l'application

$$\begin{aligned} \pi_{\bar{\varphi}} : I_{\varphi} &\longrightarrow \mathcal{Pos}(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda}), \\ X &\longmapsto X \cap \text{Ker } \varphi|_{\Lambda}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 1.7, $\pi_{\bar{\varphi}}$ est la bijection réciproque de $i_{\bar{\varphi}} : \mathcal{Pos}(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda}) \rightarrow I_{\varphi}$. Il nous faut donc montrer que $i_{\bar{\varphi}}$ et $\pi_{\bar{\varphi}}$ sont continues. Si F est une partie finie de $\text{Ker } \varphi|_{\Lambda}$, nous noterons $\mathcal{U}_{\bar{\varphi}}(F)$ l'analogue de l'ensemble $\mathcal{U}(F)$ défini à l'intérieur de $\mathcal{Pos}(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda})$.

Soit E une partie finie de Λ . Nous voulons montrer que $i_{\bar{\varphi}}^{-1}(\mathcal{U}(E))$ est un ouvert de $\mathcal{Pos}(\text{Ker } \varphi|_{\Lambda})$. S'il existe $\lambda \in E$ tel que $\varphi(\lambda) > 0$, alors $\mathcal{U}(E) \cap I_{\varphi} = \emptyset$; voir (7). On peut donc supposer que $\varphi(\lambda) \leq 0$ pour tout $\lambda \in E$. Il est alors facile de vérifier que

$$i_{\bar{\varphi}}^{-1}(\mathcal{U}(E)) = \mathcal{U}_{\bar{\varphi}}(E \cap \text{Ker } \varphi|_{\Lambda}).$$

Donc $i_{\bar{\varphi}}$ est continue. Si F une partie finie de $\text{Ker } \varphi|_{\Lambda}$, alors $\pi_{\bar{\varphi}}^{-1}(\mathcal{U}_{\bar{\varphi}}(F)) = \mathcal{U}(F) \cap I_{\varphi}$. Donc $\pi_{\bar{\varphi}}$ est continue. $\square$

Nous résumons dans le théorème suivant la plupart des résultats obtenus dans cette sous-section.

Théorème 2.12. *Supposons que $\Lambda \neq 0$ et soit $\varphi \in V^*$, avec $\varphi \neq 0$.*

- (a) *$\mathcal{Pos}(\Lambda)$ est connexe. De plus, $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ n'est pas séparé si $\Lambda \neq 0$.*
- (b) *Les applications $\pi : \mathcal{Pos}(\Lambda) \rightarrow V^*/\mathbb{R}_{>0}$ et $\overline{\text{Pos}} : V^*/\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{Pos}(\Lambda)$ sont continues et vérifient $\pi \circ \overline{\text{Pos}} = \text{Id}_{V^*/\mathbb{R}_{>0}}$.*
- (c) *$\overline{\text{Pos}}$ induit un homéomorphisme sur son image ; cette image est dense dans $\mathcal{Pos}(\Lambda)$.*
- (d) *$\pi^{-1}(\bar{\varphi})$ est l'intersection des voisinages de $\text{Pos}(\varphi)$ dans $\mathcal{Pos}(\Lambda)$.*
- (e) *$i_{\bar{\varphi}}$ est un homéomorphisme.*

3. Arrangements d'hyperplans

L'application continue $\text{Pos} : V^* \rightarrow \mathcal{Pos}(\Lambda)$ a une image dense. Nous allons étudier ici comment se transpose la notion d'arrangement d'hyperplans (et les objets attachés : facettes, chambres, support...) à l'espace topologique $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ à travers Pos . Cela nous permettra d'énoncer les conjectures sur les cellules de Kazhdan-Lusztig sous la forme la plus générale possible [1, Conjectures A et B].

3.1. Sous-espaces rationnels

Si E est une partie de Λ , on pose

$$\mathcal{L}(E) = \{X \in \mathcal{Pos}(\Lambda) \mid E \subset X \cap (-X)\}.$$

Si cela est nécessaire, nous le noterons $\mathcal{L}_{\Lambda}(E)$. On appelle *sous-espace rationnel* de $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ toute partie de $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ de la forme $\mathcal{L}(E)$, où E est une partie de Λ . D'autre part, si $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$, on notera $\mathcal{H}_{\lambda}$ le sous-espace rationnel $\mathcal{L}(\{\lambda\})$: un tel sous-espace rationnel sera appelé un *hyperplan rationnel*. On note que

$$(8) \quad \mathcal{Pos}(\Lambda) = \mathcal{U}(\lambda) \dot{\cup} \mathcal{H}_{\lambda} \dot{\cup} \mathcal{U}(-\lambda).$$

La proposition suivante justifie quelque peu la terminologie.

Proposition 3.1. *Soient E une partie de Λ , $\Lambda(E)$ le sous-réseau $\Lambda \cap \sum_{\lambda \in E} \mathbb{Q}E$ de Λ et $\sigma_E : \Lambda \rightarrow \Lambda/\Lambda(E)$ l'application canonique. Alors,*

- (a) $\mathcal{L}(E) = \bigcap_{\lambda \in E \setminus \{0\}} \mathcal{H}_{\lambda} = \{X \in \mathcal{Pos}(\Lambda) \mid \Lambda(E) \subseteq X\};$
- (b) $\mathcal{L}(E)$ est fermé dans $\mathcal{Pos}(\Lambda)$;

- (c) $\text{Pos}^{-1}(\mathcal{L}(E)) = \{\varphi \in V^* \mid \forall \lambda \in E, \varphi(\lambda) = 0\} = E^\perp$;
- (d) $\overline{\text{Pos}}(\pi(\mathcal{L}(E))) \subseteq \mathcal{L}(E)$;
- (e) $\overline{\text{Pos}}^{-1}(\mathcal{L}(E)) = \pi(\mathcal{L}(E))$;
- (f) $\mathcal{L}(E) = \overline{\text{Pos}(\text{Pos}^{-1}(\mathcal{L}(E)))}$;
- (g) L'application $\sigma_E^* : \mathcal{P}os(\Lambda/\Lambda(E)) \rightarrow \mathcal{P}os(\Lambda)$ a pour image $\mathcal{L}(E)$ et induit un homéomorphisme $\mathcal{P}os(\Lambda/\Lambda(E)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(E)$.

Démonstration. La première égalité de (a) est immédiate. La deuxième découle de la proposition 1.1 (c). L'énoncé (b) découle de (a) et de (8), alors que (c) est évident.

(d) Si $X \in \overline{\text{Pos}}(\pi(\mathcal{L}(E)))$, alors il existe $Y \in \mathcal{L}(E)$ tel que $X = \overline{\text{Pos}}(\pi(Y))$. Posons $\bar{\varphi} = \pi(Y)$, où $\varphi \in V^*$. Alors $E \subseteq Y \cap (-Y)$ et $Y \subseteq \text{Pos}(\varphi)$. Or, $\varphi(\lambda) = 0$ si $\lambda \in Y \cap (-Y)$, donc $X = \text{Pos}(\varphi) \in \mathcal{L}(E)$.

(e) D'après (d), on a $\pi(\Lambda(E)) \subseteq \overline{\text{Pos}}^{-1}(\mathcal{L}(E))$. Réciproquement, soit φ un élément de $\text{Pos}^{-1}(\mathcal{L}(E))$. Alors $\bar{\varphi} = \pi(\overline{\text{Pos}}(\bar{\varphi})) \in \pi(\mathcal{L}(E))$, d'où (e).

(f) Notons $\mathcal{F}_E = \text{Pos}(\text{Pos}^{-1}(\mathcal{L}(E)))$. On a $\mathcal{F}_E \subseteq \mathcal{L}(E)$, donc il découle de (a) que $\overline{\mathcal{F}_E} \subseteq \mathcal{L}(E)$. Réciproquement, soit F une partie finie de Λ telle que $\mathcal{U}(F) \cap \mathcal{F}_E = \emptyset$. Nous devons montrer que $\mathcal{U}(F) \cap \mathcal{L}(E) = \emptyset$.

Or, le fait que $\mathcal{U}(F) \cap \mathcal{F}_E = \emptyset$ est équivalent à l'assertion suivante (voir (c)) : pour tout $\varphi \in E^\perp$ et pour tout $\lambda \in F$, on a $\varphi(\lambda) \geq 0$.

Or, si $\varphi \in E^\perp$, alors $-\varphi \in E^\perp$, ce qui implique que pour tout $\varphi \in E^\perp$ et pour tout $\lambda \in F$, on a $\varphi(\lambda) = 0$. En d'autres termes, $F \subseteq (E^\perp)^\perp \cap \Lambda = \Lambda(E)$. Mais, si $X \in \mathcal{L}(E)$, alors $\Lambda(E) \subseteq X$ d'après (a). Donc $X \notin \mathcal{U}(F)$.

(g) Le fait que l'image de σ_E^* soit $\mathcal{L}(E)$ découle de (a). D'autre part, σ_E^* est continue d'après la proposition 2.6. Notons

$$\begin{aligned} \gamma_E : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}os(\Lambda/\Lambda(E)), \\ X &\longmapsto X/\Lambda(E). \end{aligned}$$

Alors γ_E est la réciproque de σ_E^* . Il ne nous reste qu'à montrer que γ_E est continue. Soit F une partie finie de $\Lambda/\Lambda(E)$ et notons $\tilde{F}$ un ensemble de représentants des éléments de F dans Λ . On a

$$\begin{aligned} \gamma_E^{-1}(\mathcal{U}_{\Lambda/\Lambda(E)}(F)) &= \{X \in \mathcal{L}(E) \mid \forall \lambda \in F, \lambda \notin X/\Lambda(E)\} \\ &= \{X \in \mathcal{P}os(\Lambda) \mid \Lambda(E) \subseteq X \text{ et } \forall \lambda \in F, \lambda \notin X/\Lambda(E)\} \\ &= \{X \in \mathcal{P}os(\Lambda) \mid \Lambda(E) \subseteq X \text{ et } \forall \lambda \in \tilde{F}, \lambda \notin X\} \\ &= \{X \in \mathcal{L}(E) \mid \forall \lambda \in \tilde{F}, \lambda \notin X\} \\ &= \mathcal{L}(E) \cap \mathcal{U}_\Lambda(\tilde{F}). \end{aligned}$$

Donc $\gamma_E^{-1}(\mathcal{U}_{\Lambda/\Lambda(E)})$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$. Cela montre la continuité de γ_E . $\square$

3.2. Demi-espaces

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan rationnel de $\mathcal{P}os(\Lambda)$ et soit $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\lambda$. D'après (8), l'hyperplan $\mathcal{H}$ définit une unique relation d'équivalence $\sim_{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{P}os(\Lambda)$

pour laquelle les classes d'équivalence sont $\mathcal{U}(\lambda)$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{U}(-\lambda)$: notons que cette relation ne dépend pas du choix de λ .

Proposition 3.2. Soient $\lambda \in \Lambda$ et $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\lambda$. Alors,

- (a) $\mathcal{H}$ est un fermé de $\mathcal{Pos}(\Lambda)$;
- (b) $\mathcal{U}(\lambda)$ et $\mathcal{U}(-\lambda)$ sont les composantes connexes de $\mathcal{Pos}(\Lambda) \setminus \mathcal{H}$;
- (c) $\overline{\mathcal{U}(\lambda)} = \mathcal{U}(\lambda) \cup \mathcal{H}_\lambda$.

Démonstration. L'assertion (c) est un cas particulier du corollaire 2.4. Montrons que $\mathcal{U}(\lambda)$ est connexe. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathcal{U}(\lambda)$ tels que

$$\mathcal{U}(\lambda) = \mathcal{U} \coprod \mathcal{V}.$$

Alors

$$\text{Pos}^{-1}(\mathcal{U}(\lambda)) = \text{Pos}^{-1}(\mathcal{U}) \coprod \text{Pos}^{-1}(\mathcal{V}).$$

Mais

$$\text{Pos}^{-1}(\mathcal{U}(\lambda)) = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(\lambda) < 0\}.$$

Donc $\text{Pos}^{-1}(\mathcal{U}(\lambda))$ est connexe. Puisque Pos est continue, nous avons $\text{Pos}^{-1}(\mathcal{U}) = \emptyset$ ou $\text{Pos}^{-1}(\mathcal{V}) = \emptyset$. Le lemme 2.10 implique que $\mathcal{U} = \emptyset$ ou $\mathcal{V} = \emptyset$. $\square$

Si $X \in \mathcal{Pos}(\Lambda)$, nous noterons $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}(X)$ la classe d'équivalence de X sous la relation $\sim_{\mathcal{H}}$. Il résulte de la proposition 3.2 que $\overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}(X)}$ est une réunion de classes d'équivalences pour $\sim_{\mathcal{H}}$.

3.3. Arrangements

Nous travaillerons désormais sous l'hypothèse suivante : $\mathfrak{A}$ est un ensemble fini d'hyperplans rationnels de $\mathcal{Pos}(\Lambda)$.

Nous allons redéfinir, dans notre espace $\mathcal{Pos}(\Lambda)$, les notions de facettes, chambres et faces associées à $\mathfrak{A}$, de façon similaire à ce qui se fait pour les arrangements d'hyperplans dans un espace réel [2, Chapitre V, §1]. Les propriétés des applications π et Pos établies précédemment permettent facilement de démontrer les résultats analogues.

Nous définissons la relation $\sim_{\mathfrak{A}}$ sur $\mathcal{Pos}(\Lambda)$ de la façon suivante : si X et Y sont deux éléments de $\mathcal{Pos}(\Lambda)$, nous écrirons $X \sim_{\mathfrak{A}} Y$ si $X \sim_{\mathcal{H}} Y$ pour tout $\mathcal{H} \in \mathfrak{A}$. Nous appellerons *facettes* (ou *$\mathfrak{A}$ -facettes*) les classes d'équivalence pour la relation $\sim_{\mathfrak{A}}$. Nous appellerons *chambres* (ou *$\mathfrak{A}$ -chambres*) les facettes qui ne rencontrent aucun hyperplan de $\mathfrak{A}$. Si $\mathcal{F}$ est une facette, nous noterons

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{H} \in \mathfrak{A} \\ \mathcal{F} \subset \mathcal{H}}} \mathcal{H},$$

avec la convention habituelle que $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}) = \mathcal{Pos}(\Lambda)$ si $\mathcal{F}$ est une chambre. Nous l'appellerons le *support* de $\mathcal{F}$ et nous appellerons *dimension* de $\mathcal{F}$ l'entier

$$\dim \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{R}} \text{Pos}^{-1}(\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F})).$$

De même nous appellerons *codimension* de $\mathcal{F}$ l'entier

$$\text{codim } \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim \mathcal{F}.$$

Avec ces définitions, une chambre est une facette de codimension 0.

Proposition 3.3. *Soit $\mathcal{F}$ une facette et soit $X \in \mathcal{F}$. Alors,*

- (a) $\mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{H} \in \mathfrak{A}} \mathcal{D}_{\mathcal{H}}(X);$
- (b) $\overline{\mathcal{F}} = \bigcap_{\mathcal{H} \in \mathfrak{A}} \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}(X)};$
- (c) $\overline{\mathcal{F}}$ est la réunion de $\mathcal{F}$ et de facettes de dimension strictement inférieures;
- (d) Si $\mathcal{F}'$ est une facette telle que $\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}'}$, alors $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Démonstration. L'énoncé (a) est une conséquence des définitions. Montrons (b). Posons

$$\mathfrak{A}_1 = \{\mathcal{H} \in \mathfrak{A} \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_1.$$

Pour tout $\mathcal{H} \in \mathfrak{A}$, on fixe un élément $\lambda(\mathcal{H}) \in \Lambda$ tel que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\lambda(\mathcal{H})}$; si de plus $\mathcal{H} \in \mathfrak{A}_2$, on choisit $\lambda(\mathcal{H})$ de sorte que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}(\lambda(\mathcal{H}))$. On pose

$$E_i = \{\lambda(\mathcal{H}) \mid \mathcal{H} \in \mathfrak{A}_i\}.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{F} = \mathcal{L} \cap \mathcal{U}(E_i).$$

Puisque $\mathcal{L}$ est fermé, $\overline{\mathcal{F}}$ est aussi l'adhérence de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{L}$. En utilisant alors l'homéomorphisme $\sigma_{E_1}^* : \text{Pos}(\Lambda/\Lambda(E_1)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$ de la proposition 3.1 (g), on se ramène à calculer l'adhérence de $\sigma_{E_1}^{*-1}(\mathcal{F})$ dans $\text{Pos}(\Lambda/\Lambda(E_1))$. Mais

$$\sigma_{E_1}^{*-1}(\mathcal{F}) = \sigma_{E_1}^{*-1}(\mathcal{U}_{\Lambda/\Lambda(E_1)}(E_2)) = \mathcal{U}_{\Lambda/\Lambda(E_1)}(\sigma_{E_1}(E_2)).$$

Or, d'après le corollaire 2.4, on a

$$\overline{\mathcal{U}_{\Lambda/\Lambda(E_1)}(\sigma_{E_1}(E_2))} = \text{Pos}(\Lambda/\Lambda(E_1)) \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in E_2} \mathcal{U}_{\Lambda/\Lambda(E_1)}(\sigma_{E_1}(-\lambda)) \right).$$

Par conséquent,

$$\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{L} \cap \sigma_{E_1}^* \left(\text{Pos}(\Lambda/\Lambda(E_1)) \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in E_2} \mathcal{U}_{\Lambda/\Lambda(E_1)}(\sigma_{E_1}(-\lambda)) \right) \right),$$

et donc

$$\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{L} \cap \left(\bigcap_{\lambda \in E_2} (\text{Pos}(\Lambda) \setminus \mathcal{U}_{\Lambda}(-\lambda)) \right) = \bigcap_{\lambda \in E_1 \cup E_2} \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}_{\lambda}}(X)},$$

comme attendu.

Montrons maintenant (c). D'après (b), $\overline{\mathcal{F}}$ est une réunion de facettes. Si de plus $\mathcal{F}'$ est une facette différente de $\mathcal{F}$ et contenue dans $\overline{\mathcal{F}}$, l'assertion (b) montre qu'il existe $\mathcal{H} \in \mathfrak{A}_2$ tel que $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{H}$. Donc $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{H}$, et

$$\dim \text{Pos}^{-1}(\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{H}) = \dim \text{Pos}^{-1}(\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}(\mathcal{F})) - 1,$$

d'où (c). Enfin, l'assertion (d) découle immédiatement de (c). $\square$

On définit une relation $\preceq$ (ou $\preceq_{\mathfrak{A}}$ s'il est nécessaire de préciser) entre les facettes : on écrit $\mathcal{F} \preceq \mathcal{F}'$ si $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \overline{\mathcal{F}'}$ (c'est-à-dire si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$). La proposition 3.3 (d) implique le résultat suivant.

Corollaire 3.4. *La relation $\preceq$ entre les facettes est une relation d'ordre.*

4. Semi-continuité et cellules de Kazhdan-Lusztig

Cette section vise à expliquer l'origine de notre motivation pour l'étude des parties positives d'un réseau. Cela concerne la théorie de Kazhdan-Lusztig dans sa version la plus générale (à l'heure actuelle), c'est-à-dire celle à paramètres inégaux. Nous nous contenterons d'un (très) court résumé des résultats et conjectures de [1].

Fixons quelques notations. Soit (W, S) un système de Coxeter (dans lequel S est fini, mais W n'est pas nécessairement fini). À toute fonction $\varphi : S \rightarrow \Gamma$, où Γ est un groupe abélien totalement ordonné, telle que $\varphi(s) = \varphi(t)$ si s et t sont conjugués dans W , Lusztig [3] associe une partition de W en cellules (à gauche, à droite, ou bilatères). Pour fixer les idées, notons $\mathcal{G}_{\varphi}$ la partition de W en cellules à gauche : les phénomènes que nous allons décrire se produisent aussi avec les cellules à droite ou avec les cellules bilatères. Il est à noter que, lorsque W est un groupe de Weyl fini ou affine, cette partition en cellules permet d'étudier les représentations des algèbres de Hecke à paramètres inégaux (paramètres donnés par la fonction φ) en lien avec les représentations des groupes réductifs finis ou p -adiques.

Notons $\equiv$ la relation d'équivalence sur S obtenue par restriction de la relation de conjugaison dans W et notons $\Lambda(W, S)$ le groupe abélien libre engendré par $S/\equiv$ (i.e. $\Lambda(W, S) = \mathbb{Z}[S/\equiv]$). Toute fonction $\varphi : S \rightarrow \Gamma$ comme ci-dessus peut se prolonger par linéarité en un morphisme de groupes abéliens $\tilde{\varphi} : \Lambda(W, S) \rightarrow \Gamma$. Le résultat suivant [1] est facile à démontrer.

Lemme 4.1. *Soient $\varphi : S \rightarrow \Gamma$ et $\varphi' : S \rightarrow \Gamma'$ deux applications comme ci-dessus telles que $\text{Pos}(\tilde{\varphi}) = \text{Pos}(\tilde{\varphi}')$. Alors $\mathcal{G}_{\varphi} = \mathcal{G}_{\varphi'}$.*

Ainsi, si X est une partie positive de $\Lambda(W, S)$, on peut définir $\mathcal{G}(X)$ par

$$\mathcal{G}(X) = \mathcal{G}_{\text{can}_X},$$

et le lemme précédent montre qu'en étudiant toutes les partitions $\mathcal{G}(X)$, cela détermine les partitions $\mathcal{G}_{\varphi}$ pour toute application φ . L'objet de l'article [1] est d'essayer de comprendre (au moins conjecturalement) le comportement de l'application

$$\mathcal{G} : \text{Pos}(\Lambda(W, S)) \longrightarrow \text{Part}(W),$$

où $\text{Part}(W)$ désigne l'ensemble des partitions de W . Il se trouve que ce comportement fait naturellement apparaître les notions d'arrangements d'hyperplans rationnels et de facettes qui ont été étudiées dans le présent article.

Notons $(\bar{s}^*)_{\bar{s} \in S/\equiv}$ la base duale de la base $(\bar{s})_{\bar{s} \in S/\equiv}$ de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda(W, S)$. Si $\bar{s} \in S/\equiv$, on notera pour simplifier $\mathcal{H}_{\bar{s}}$ l'hyperplan rationnel $\mathcal{H}_{\bar{s}^*}$. La conjecture principale de [1], basée sur de nombreux exemples et compatible avec tous les résultats théoriques généraux sur les cellules, est la suivante.

Conjecture 4.2. Avec les notations ci-dessus, il existe un arrangement fini d'hyperplans rationnels $\mathfrak{A}$ de $\text{Pos}(\Lambda(W, S))$ tel que les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (a) $\mathcal{H}_{\bar{s}} \in \mathfrak{A}$ pour tout $\bar{s} \in S/\equiv$;
- (b) La fonction $\mathcal{G}$ est constante sur les $\mathfrak{A}$ -facettes;
- (c) Soit $\mathcal{F}$ une $\mathfrak{A}$ -facette et soit $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ la partition $\mathcal{G}(X)$, où $X \in \mathcal{F}$. Alors $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ est la partition la plus fine de W qui soit moins fine que toutes les partitions $\mathcal{G}(\mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ parcourt l'ensemble des $\mathfrak{A}$ -chambres telles que $\mathcal{F} \preceq \mathcal{C}$.

Remerciements. L'auteur est en partie financé par l'ANR (Projet No JC07-192339).

RÉFÉRENCES

- [1] C. Bonnafé, *Semi-continuity properties of Kazhdan-Lusztig cells*, prépublication 2008, arXiv:0808.3522.
- [2] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: systèmes de racines. Actualités Scientifiques et Industrielles, **1337**, Hermann, Paris, 1968, 288 pp.
- [3] G. Lusztig, *Left cells in Weyl groups*, Lie group representations, I (College Park, Md., 1982/1983), 99–111, Lecture Notes in Math., **1024**, Springer, Berlin, 1983.
- [4] L. Robbiano, *Term orderings on the polynomial ring*, EUROCAL'85, Vol. 2 (Linz, 1985), 513–517, Lecture Notes in Comput. Sci., **204**, Springer, Berlin, 1985.

C. BONNAFÉ, LABO. DE MATH. DE BESANÇON (CNRS: UMR 6623), U. DE FRANCHE-COMTÉ, 16 ROUTE DE GRAY, 25030 BESANÇON CEDEX, FRANCE.
cedric.bonnafe@univ-fcomte.fr