

LE PRODUIT TENSORIEL INJECTIF DES $b\mathcal{L}_\infty$ -ESPACES

BELMESNAOUI AQZZOUZ, HASSAN M. ELALJ ET HOUSINE SNOUSSI

RÉSUMÉ. Nous introduisons la classe des $b\mathcal{L}_\infty$ -espaces, et nous donnons quelques exemples. Ensuite, nous montrons quelques propriétés.

ABSTRACT. We introduce the class of $b\mathcal{L}_\infty$ -spaces and we give some examples. Beside this, we prove some properties.

1. Introduction et notations

L. Schwartz a défini le ε -produit de deux espaces localement convexes comme outil pour définir les distributions à valeurs vectorielles. Plus tard, L. Waelbroeck [11] a donné une nouvelle définition du ε -produit de deux espaces de Banach. Comme le ε -produit est un foncteur exact à gauche sur la catégorie des espaces de Banach, mais non exact en général, W. Kabbalo [8] a donné une condition nécessaire et suffisante pour que ce foncteur soit exact en introduisant la classe des ε -espaces dans la catégorie des espaces localement convexes. Il a aussi montré que cette classe d'espaces coïncide avec celle des $\mathcal{L}_\infty$ -espaces dans la catégorie des espaces de Banach.

Dans [1], nous avons établi qu'un espace de Banach G est un $\mathcal{L}_\infty$ -espace si, et seulement si, le foncteur exact à gauche

$$G\varepsilon : \mathbf{qBan} \longrightarrow \mathbf{qBan},$$

défini par $G\varepsilon(E \mid F) = (G\varepsilon E) \mid (G\varepsilon F)$ est exact, où $\mathbf{qBan}$ est la catégorie des quotients banachiques. Ce résultat nous a permis de définir le ε -produit d'un $\mathcal{L}_\infty$ -espace par un quotient banachique. Or il existe des espaces de Banach importants qui ne sont pas des $\mathcal{L}_\infty$ -espaces. Par exemple, Henkin [3] a montré que si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 2$ et $r \in \mathbb{N}^*$, alors l'espace de Banach $C^r(\overline{U})$ n'est pas un $\mathcal{L}_\infty$ -espace.

Dans [1], nous avons introduit les $C(K)$ -résolutions et nous avons défini le ε_c -produit d'un b -espace de Schwartz par un quotient banachique. Comme la limite inductive est un foncteur exact sur la catégorie des b -espaces [6], il résulte du Théorème 1.4 de [13], que ce foncteur admet une extension exacte à la catégorie des quotients bornologiques [13]. Par conséquent, tous les résultats que nous avons établis dans [1] pour les quotients banachiques sont aussi valables pour les quotients bornologiques par un simple passage à la limite inductive.

L'objectif de cet article est d'introduire la classe des $b\mathcal{L}_\infty$ -espaces et de montrer ses avantages pour le ε -produit dans la catégorie des quotients bornologiques. Un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace est une limite inductive bornologique de $\mathcal{L}_\infty$ -espaces. C'est une classe qui contient celle des $\mathcal{L}_\infty$ -espaces ainsi que la classe des b -espaces nucléaires. Nous montrerons que si G est un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace, alors le foncteur $G\varepsilon$ est exact sur la catégorie $\mathbf{q}$, définie par L. Waelbroeck dans [13]. Ceci nous permettra de définir le ε -produit d'un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace G et d'un quotient bornologique $E \mid F$ comme étant l'objet $G\varepsilon(E \mid F) = (G\varepsilon E) \mid (G\varepsilon F)$. Ensuite, si G est un b -espace de Schwartz et $E \mid F$ est un quotient bornologique, nous établirons qu'il existe un morphisme strict injectif $(G\varepsilon E) \mid (G\varepsilon F) \rightarrow G\varepsilon_c(E \mid F)$ et si le b -espace de Schwartz G est un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace, alors ce morphisme strict $(G\varepsilon E) \mid (G\varepsilon F) \rightarrow G\varepsilon_c(E \mid F)$ est un isomorphisme, où $G\varepsilon_c(E \mid F)$ est le ε_c -produit du b -espace de Schwartz G et du quotient bornologique $E \mid F$, défini dans [1] comme étant $G\varepsilon_c(E \mid F) = \cup_B (G_{B\varepsilon_{Res}}(E \mid F))$. Enfin, nous montrerons que si G est un b -espace nucléaire, alors les deux quotients bornologiques $(G \otimes_{\pi_b} E) \mid (G \otimes_{\pi_b} F)$ et $G\varepsilon_c(E \mid F)$ sont isomorphes.

Avant d'établir nos résultats, nous rappelons ci-dessous quelques définitions dont nous aurons besoin dans la suite. Notons par **Ban** la catégorie des espaces de Banach et des applications linéaires continues.

(1) Si E est un espace vectoriel et B est un disque (*i.e.* un ensemble convexe équilibré) de E , on note E_B l'espace vectoriel engendré par B muni de la semi-norme

$$\|x\|_B = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+ \mid x \in \alpha B\}.$$

On dit que B est *complétant* si $(E_B, \|\cdot\|_B)$ est un espace de Banach.

Une *bornologie de b -espace* sur E est une famille β de parties de E telle que:

- (a) Toute partie finie de E appartient à β ;
- (b) Si $A \in \beta$ et $B \subset A$, alors $B \in \beta$;
- (c) β est stable pour la réunion finie;
- (d) L'homothétisme de tout élément de β est un élément de β ;
- (e) Si $A \in \beta$, alors il existe un disque borné complétant B de β tel que $A \subset B$.

Le couple (E, β) est appelé un *b -espace*. Un sous-espace vectoriel F d'un b -espace E est dit *bornologiquement fermé* si pour tout disque borné complétant B de E , le sous-espace vectoriel $F \cap E_B$ est fermé dans E_B .

Si (E_1, β_1) et (E_2, β_2) sont deux b -espaces, une application linéaire $u : E_1 \rightarrow E_2$ est dite *bornée* si pour tout $A \in \beta_1$, on a $u(A) \in \beta_2$. L'application $u : E \rightarrow F$ est dite *bornologiquement surjective* si pour tout $B' \in \beta_F$, il existe $B \in \beta_E$ tels que $u(B) = B'$.

On désigne par **b** la catégorie des b -espaces et des applications linéaires bornées. Pour plus de détails sur ce sujet nous renvoyons le lecteur à [4] et [12].

(2) Soit (E, β_E) un b -espace. Un sous-espace vectoriel F de E est dit un *sous- b -espace* de E s'il est muni d'une bornologie de b -espace β_F telle que l'inclusion $(F, \beta_F) \rightarrow (E, \beta_E)$ est bornée. Un *quotient bornologique* $E \mid F$ est un couple (E, F) , où E est un b -espace et F un sous- b -espace de E . On dit qu'un morphisme

$u : E \mid F \longrightarrow E_1 \mid F_1$ est *strict* s'il est induit par une application linéaire bornée $u_1 : E \longrightarrow E_1$ dont la restriction $u_{1|_F} : F \longrightarrow F_1$ est bornée. Si $E \mid F$ et $E_1 \mid F_1$ sont deux quotients bornologiques, un morphisme strict $u : E \mid F \longrightarrow E_1 \mid F_1$ est induit par une application linéaire continue $u_1 : E \longrightarrow E_1$ dont la restriction $u_{1|_F} : F \longrightarrow F_1$ est bornée. Le morphisme strict u est dit un *pseudo-isomorphisme* s'il est induit par une application linéaire bornée et bornologiquement surjective $u_1 : E \longrightarrow E_1$ telle que $u_1^{-1}(F_1) = F$.

Notons par $\tilde{\mathbf{q}}$ la catégorie des quotients bornologiques et des morphismes stricts. Dans cette catégorie, il existe des pseudo-isomorphismes qui ne sont pas inversibles. Par exemple, si E est un espace de Banach et F est un sous-espace vectoriel fermé de E , alors l'application quotient $\pi : E \longrightarrow E/F$ induit le pseudo-isomorphisme $E \mid F \longrightarrow (E/F) \mid \{0\}$ qui n'est pas nécessairement un isomorphisme dans $\tilde{\mathbf{q}}$. Dans [13], L. Waelbroeck a introduit une catégorie abélienne $\mathbf{q}$ qui a les mêmes objets que $\tilde{\mathbf{q}}$ et dans laquelle tous les pseudo-isomorphismes sont inversibles. Pour plus de détails sur ce sujet nous renvoyons le lecteur à [13].

(3) Rappelons que le ε -produit de deux espaces de Banach E et F est l'espace de Banach

$$E\varepsilon F = \{f : E' \longrightarrow F \mid f \text{ est linéaire et } f|_{B_{E'}} \text{ est } \sigma(E', E)\text{-continue}\},$$

où $B_{E'}$ est la boule unité fermée du dual topologique E' de E et $\sigma(E', E)$ est la topologie faible de E' . Si $u_i : E_i \longrightarrow F_i$, avec $i = 1, 2$, sont des applications linéaires continues, le ε -produit de u_1 et u_2 est l'application linéaire continue

$$u_1\varepsilon u_2 : E_1\varepsilon E_2 \longrightarrow F_1\varepsilon F_2,$$

définie par $u_2(f) = u_2 \circ f \circ u_1'$, où u_1' est l'application duale de u_1 .

Par exemple, si X est un compact et E un espace de Banach, alors les espaces de Banach $C(X)\varepsilon E$ et $C(X, E)$ sont isométriquement isomorphes, où $C(X)$ est l'espace de Banach des fonctions continues sur X . Pour plus de détails sur le ε -produit on renvoie le lecteur à [7] et [11].

(4) Enfin, un espace de Banach E est dit un $\mathcal{L}_{\infty, \lambda}$ -espace, pour $\lambda \geq 1$, si pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie A de E , il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie B de E tel que $A \subset B$ et $d(B, l_{\infty}^{\dim B}) \leq \lambda$, où

$$d(X, Y) = \inf \left\{ \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T : X \longrightarrow Y \text{ un isomorphisme} \right\}$$

est la distance de Banach-Mazur des deux espaces de Banach X et Y . Si E est un $\mathcal{L}_{\infty, \lambda}$ -espace pour un certain $\lambda < \infty$, alors E est un $\mathcal{L}_{\infty}$ -espace. Pour plus d'informations sur les $\mathcal{L}_{\infty}$ -espaces, on peut consulter par exemple [9].

2. Les résultats principaux

Le ε -produit d'un b -espace G et d'un espace de Banach E est le b -espace

$$G\varepsilon E = \bigcup_B G_B\varepsilon E,$$

où $\cup_B$ désigne la limite inductive dans la catégorie des b -espaces et B décrit les disques bornés complétants de G . Il est clair que si F est un sous- b -espace de G , alors $F_\varepsilon E$ est un sous- b -espace de $G_\varepsilon E$.

Lorsque G et E sont des b -espaces, leur ε -produit est le b -espace

$$G_\varepsilon E = \bigcup_{B,C} G_{B_\varepsilon E_C},$$

où $\cup_{B,C}$ désigne la limite inductive dans la catégorie des b -espaces et B (resp. C) décrit les disques bornés complétants de G (resp. de E).

Définition 2.1. Un b -espace est dit un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace s'il s'écrit comme une limite inductive bornologique de $\mathcal{L}_\infty$ -espaces.

Il est clair que tout $\mathcal{L}_\infty$ -espace est un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace, et que tout sous-espace vectoriel qui admet un complémentaire bornologique dans un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace est aussi un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace.

Comme le ε -produit de deux $\mathcal{L}_\infty$ -espaces est un $\mathcal{L}_\infty$ -espace [5], il s'ensuit que le ε -produit de deux $b\mathcal{L}_\infty$ -espaces est un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace.

Remarque 2.2. Comme la limite inductive bornologique est un foncteur exact sur la catégorie des b -espaces [6], si G est un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace, alors l'application linéaire bornée

$$Id_{G_\varepsilon} u : G_\varepsilon X \longrightarrow G_\varepsilon Y,$$

définie par $Id_{G_\varepsilon} u(f) = u \circ f$ est bornologiquement surjective lorsque $u : X \longrightarrow Y$ est une application linéaire bornée et surjective entre des espaces de Banach.

Rappelons qu'un b -espace nucléaire G est une limite inductive d'espaces de Banach G_B , avec la condition que tout disque borné complétant B de G est inclus dans un disque borné complétant B' de G tel que l'application inclusion $i_{B'B} : G_B \rightarrow G_{B'}$ est nucléaire, i.e. il existe des suites $(x'_n)_n \subset (G_B)'$, $(y_n)_n \subset G_{B'}$ et $(\lambda_n)_n \subset l^1$ telles que

$$i_{B'B}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x'_n(x) y_n$$

pour tout $x \in G_B$ [4].

Proposition 2.3. Tout b -espace nucléaire est un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace.

Démonstration. En effet, si G est un b -espace nucléaire, alors $G = \cup_{i \in I} G_{B_{0,i}}$ en tant que b -espaces, où $(B_{0,i})_{i \in I}$ est une base de la bornologie de G telle que chaque $G_{B_{0,i}}$ est isométriquement isomorphe à l'espace de Banach c_0 [4]. Comme c_0 est un $\mathcal{L}_\infty$ -espace [9], nous obtenons le résultat. $\square$

Donnons maintenant un exemple non trivial de $b\mathcal{L}_\infty$ -espace.

Exemple 2.4. Soit X une variété compacte de dimension au moins 2. D'après [3], l'espace de Banach $C^r(X)$ n'est pas un $\mathcal{L}_\infty$ -espace lorsque $r \in \mathbb{N}^*$. Or, considérons l'espace $C^{r+0}(X) = \cup_{\varepsilon} C^{r+\varepsilon}(X)$, où $0 < \varepsilon < 1$ et $C^{r+\varepsilon}(X)$ est l'espace de toutes les fonctions de classe C^r sur X telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^n$, avec $|k| \leq r$, $D^k f$ est

continûment α -Hölderienne d'exposant ε . On munit $C^{r+0}(X)$ de la bornologie de b -espace suivante: une partie B de $C^{r+0}(X)$ est bornée s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que B est bornée dans $C^{r+\varepsilon}(X)$. Le b -espace $C^{r+0}(X)$ est une limite inductive bornologique du système inductif $(C^{r+\varepsilon}(X))_{\varepsilon>0}$, où chaque $C^{r+\varepsilon}(X)$ est isométriquement isomorphe à c_0 ; voir [2]. Par conséquent, $C^{r+0}(X)$ est un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace.

Problème 2.5. Il suit de la remarque 2.2 que si G est un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace, alors l'application linéaire bornée $Id_{G\varepsilon}u : G\varepsilon X \longrightarrow G\varepsilon Y$ est bornologiquement surjective lorsque $u : X \longrightarrow Y$ est une application linéaire bornée et surjective entre des b -espaces. La réciproque est-elle vraie?

Il résulte du Théorème 1.4 de [13] que si G est un b -espace, alors le foncteur

$$G\tilde{\varepsilon} : \tilde{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{q}$$

défini par $G\tilde{\varepsilon}(E \mid F) = (G\varepsilon F) \mid (G\varepsilon E)$ se prolonge naturellement en un foncteur $G\varepsilon : \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}$ si, et seulement si, l'image de tout pseudo-isomorphisme de $\tilde{\mathbf{q}}$ par $G\tilde{\varepsilon}$ est un isomorphisme de $\mathbf{q}$. Or, d'après le contre-exemple 1.1 de [1], le foncteur

$$l^2\tilde{\varepsilon} : \tilde{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{q}$$

défini par $l^2\tilde{\varepsilon}(E \mid F) = (l^2\varepsilon F) \mid (l^2\varepsilon E)$ ne se prolonge pas naturellement en un foncteur $l^2\varepsilon : \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}$.

Ensuite, nous avons établi dans [1, Théorème 1.2] que le foncteur $G\tilde{\varepsilon}$ ci-dessus admet une extension unique $G\varepsilon : \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}$ si, et seulement si, l'espace de Banach G est un $\mathcal{L}_\infty$ -espace.

Comme pour le cas banachique, nous allons caractériser la classe des b -espaces G dont le ε -produit se définit comme $G\varepsilon(E \mid F) = (G\varepsilon E) \mid (G\varepsilon F)$ pour tout quotient bornologique $E \mid F$.

Proposition 2.6. Soit G un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace. Alors le foncteur $G\tilde{\varepsilon} : \tilde{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{q}$ défini par $G\tilde{\varepsilon}(E \mid F) = (G\varepsilon E) \mid (G\varepsilon F)$ est exact et admet une extension exacte $G\varepsilon : \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}$.

Démonstration. En effet, si G est un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace, alors le foncteur $G\tilde{\varepsilon} : \tilde{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{q}$ s'écrit comme une limite inductive des foncteurs $G_B\tilde{\varepsilon} : \tilde{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{q}$, où B décrit une base de disques bornés complétants de G et chacun des espace de Banach G_B est un $\mathcal{L}_\infty$ -espace. Il résulte de [1, Théorème 1.2] que chacun des foncteurs $G_B\tilde{\varepsilon}$ admet une extension unique exacte $G_B\varepsilon : \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}$. Enfin, comme la limite inductive bornologique est un foncteur exact sur la catégorie des b -espaces [6], il s'ensuit que son extension à $\mathbf{q}$ est un foncteur exact [13, Théorème 1.4]. Par conséquent, le foncteur $G\tilde{\varepsilon} : \tilde{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{q}$ est exact, et admet donc une extension exacte $G\varepsilon : \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}$. $\square$

Ceci motive la définition suivante.

Définition 2.7. Soient G un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace et $E \mid F$ un quotient bornologique. On appelle ε -produit de G et $E \mid F$ le quotient bornologique

$$G\varepsilon(E \mid F) = (G\varepsilon E) \mid (G\varepsilon F).$$

D'après [1], une suite

$$(0, u, v) : 0 \longrightarrow G \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2$$

est dite *fortement exacte à gauche* dans la catégorie **Ban** si $\text{Ker}(v) = \text{Im}(u)$ et l'image de v est fermée dans G_2 . On appelle $C(K)$ -résolution d'un espace de Banach G toute suite fortement exacte à gauche dans **Ban** de la forme

$$(0, \Phi, \Psi) : 0 \rightarrow G \rightarrow C(X) \rightarrow C(Y),$$

où X et Y sont des espaces compacts.

Il résulte du théorème de Banach qu'à tout espace de Banach G , nous pouvons associer une et même plusieurs $C(K)$ -résolutions.

Comme $C(Z)$ est un $\mathcal{L}_\infty$ -espace, alors pour tout quotient bornologique $E \mid F$, on a

$$C(Z)\varepsilon(E \mid F) = (C(Z)\varepsilon E) \mid (C(Z)\varepsilon F),$$

pour $Z \in \{X, Y\}$. D'autre part, l'application linéaire bornée

$$\Psi\varepsilon Id_E : C(X, E) \longrightarrow C(Y, E)$$

induit le morphisme strict

$$\Psi\varepsilon Id_{E \mid F} : (C(X)\varepsilon E) \mid (C(X)\varepsilon F) \longrightarrow (C(Y)\varepsilon E) \mid (C(Y)\varepsilon F).$$

Et comme la catégorie **q** est abélienne, le noyau $\text{Ker}(\Psi\varepsilon Id_{E \mid F})$ existe. Nous définissons ainsi la suite exacte à gauche suivante:

$$(0, \Phi\varepsilon Id_{E \mid F}, \Psi\varepsilon Id_{E \mid F}) : 0 \rightarrow \text{Ker}(\Psi\varepsilon Id_{E \mid F}) \rightarrow C(X)\varepsilon(E \mid F) \rightarrow C(Y)\varepsilon(E \mid F)$$

où

$$\text{Ker}(\Psi\varepsilon Id_{E \mid F}) = (\Psi\varepsilon Id_E)^{-1} (C(Y)\varepsilon F) \mid (C(X)\varepsilon F)$$

et $(\Psi\varepsilon Id_E)^{-1} (C(Y)\varepsilon F)$ est un sous- b -espace de $C(X)\varepsilon E$.

Posons

$$G\varepsilon_{Res}(E \mid F) = (\Psi\varepsilon Id_E)^{-1} (C(Y)\varepsilon F) \mid (C(X)\varepsilon F).$$

Ceci définit un foncteur

$$G\varepsilon_{Res} : \mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{q}.$$

Comme G admet plusieurs $C(K)$ -résolutions et que chacune d'elle définit un quotient bornologique $G\varepsilon_{Res}(E \mid F)$, en général l'objet $G\varepsilon_{Res}(E \mid F)$ n'est pas indépendant de toutes les $C(K)$ -résolutions de G .

Enfin, rappelons qu'un b -espace de Schwartz G est une limite inductive d'espaces de Banach G_B , avec la condition que tout disque borné complétant B de G est inclus dans un disque borné complétant B' de G tel que l'inclusion $i_{B'B} : G_B \rightarrow G_{B'}$ est compacte [4].

Soit

$$(0, \Phi_A, \Psi_A) : 0 \rightarrow G_A \rightarrow C(X_A) \rightarrow C(Y_A),$$

avec $A \in \{B, B'\}$, une $C(K_A)$ -résolution de G_A . Comme l'inclusion $i_{B'B}$ est compacte et les espaces $C(X_{B'})$ et $C(Y_{B'})$ sont des $\mathcal{L}_\infty$ -espaces, il résulte de [1, paragraphe 5] qu'il existe des applications linéaires compactes $v_{B'B} : C(X_B) \rightarrow C(X_{B'})$

et $w_{B'B} : C(Y_B) \rightarrow C(Y_{B'})$ telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} (0, \Phi_B, \Psi_B) : & 0 & \longrightarrow & G_B & \longrightarrow & C(X_B) & \longrightarrow & C(Y_B) \\ & & & \downarrow i_{B'B} & & \downarrow v_{B'B} & & \downarrow w_{B'B} \\ (0, \Phi_{B'}, \Psi_{B'}) : & 0 & \longrightarrow & G_{B'} & \longrightarrow & C(X_{B'}) & \longrightarrow & C(Y_{B'}) \end{array}$$

est commutatif.

En appliquant le foncteur $\varepsilon(E | F) : \mathbf{Ban} \rightarrow \mathbf{q}$ au carré de droite du diagramme ci-dessus, on obtient le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} C(X_B, E | F) & \longrightarrow & C(Y_B, E | F) \\ \downarrow v_{B'B} \varepsilon Id_{E|F} & & \downarrow w_{B'B} \varepsilon Id_{E|F} \\ C(X_{B'}, E | F) & \longrightarrow & C(Y_{B'}, E | F) \end{array}$$

En prenant les noyaux des morphismes $\Psi_B \varepsilon Id_{E|F}$ et $\Psi_{B'} \varepsilon Id_{E|F}$ on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G_B \varepsilon_{Res}(E | F) & \longrightarrow & C(X_B, E | F) & \longrightarrow & C(Y_B, E | F) \\ & & \downarrow i_{B'B} \varepsilon Id_{E|F} & & \downarrow v_{B'B} \varepsilon Id_{E|F} & & \downarrow w_{B'B} \varepsilon Id_{E|F} \\ 0 & \longrightarrow & G_{B'} \varepsilon_{Res}(E | F) & \longrightarrow & C(X_{B'}, E | F) & \longrightarrow & C(Y_{B'}, E | F) \end{array}$$

où le morphisme strict $i_{B'B} \varepsilon Id_{E|F}$ est induit par la restriction de l'application linéaire bornée $v_{B'B} \varepsilon Id_E$ au b -espace $(\Psi_B \varepsilon Id_E)^{-1}(C(Y_B, F))$.

Le système $(G_B \varepsilon_{Res}(E | F), i_{B'B} \varepsilon Id_{E|F})_B$ est inductif dans la catégorie $\mathbf{q}$, et donc admet une limite inductive, d'où la définition suivante:

Définition 2.8. On appelle ε_c -produit d'un b -espace de Schwartz G et d'un quotient bornologique $E | F$ l'objet $G \varepsilon_c(E | F) = \cup_B (G_B \varepsilon_{Res}(E | F))$, où $\cup_B$ désigne la limite inductive dans la catégorie des quotients bornologiques.

Proposition 2.9. Soient G un b -espace de Schwartz et $E | F$ un quotient bornologique. Alors il existe un morphisme strict injectif $(G \varepsilon E) | (G \varepsilon F) \rightarrow G \varepsilon_c(E | F)$.

Démonstration. Le b -espace G s'écrit comme $G = \cup_B G_B$, où $\cup_B$ désigne la limite inductive dans la catégorie des b -espaces. Si on montre qu'il existe un morphisme strict injectif

$$u_B : (G_B \varepsilon E) | (G_B \varepsilon F) \rightarrow G_B \varepsilon_{Res}(E | F),$$

en appliquant le foncteur limite inductive qui est exact, nous obtenons le résultat.

Soit

$$(0, \Phi_B, \Psi_B) : 0 \rightarrow G_B \rightarrow C(X) \rightarrow C(Y)$$

une $C(K)$ -résolution de G_B . L'application linéaire $\Phi_B \varepsilon Id_E : G_B \varepsilon E \rightarrow C(X) \varepsilon E$ est bornée, injective et à image fermée. Il résulte donc de la Proposition 2.2 de [1] qu'elle induit un morphisme strict injectif

$$\Phi_B \varepsilon Id_{E|F} : (G_B \varepsilon E) | (G_B \varepsilon F) \rightarrow C(X) \varepsilon(E | F).$$

D'autre part, comme la suite

$$(0, \Phi_B \varepsilon Id_E, \Psi_B \varepsilon Id_E) : 0 \rightarrow G_B \varepsilon E \rightarrow C(X) \varepsilon E \rightarrow C(Y) \varepsilon E$$

est exacte à gauche, alors $G_B \varepsilon E = Ker(\Psi_B \varepsilon Id_E)$, et par suite

$$G_B \varepsilon E \subset (\Psi \varepsilon Id_E)^{-1}(C(Y) \varepsilon F).$$

Nous obtenons ainsi un morphisme strict

$$u_B : (G_B \varepsilon E) \mid (G_B \varepsilon F) \rightarrow G_B \varepsilon_{Res}(E \mid F)$$

qui est induit par l'application linéaire bornée $\Phi_B \varepsilon Id_E$. Aussi, nous avons un morphisme strict injectif

$$v_B : G_B \varepsilon_{Res}(E \mid F) \rightarrow C(X) \varepsilon(E \mid F)$$

tel que $v_B \circ u_B = \Phi_B \varepsilon Id_{E \mid F}$. Par conséquent, le morphisme u_B est injectif.

En passant à la limite inductive $\cup_B$, on a un morphisme strict injectif

$$\cup_B((G_B \varepsilon E) \mid (G_B \varepsilon F)) \rightarrow \cup_B(G_B \varepsilon_{Res}(E \mid F)).$$

Comme

$$\begin{aligned} \cup_B((G_B \varepsilon E) \mid (G_B \varepsilon F)) &= \cup_B(G_B \varepsilon E) \mid \cup_B(G_B \varepsilon F) \\ &= (\cup_B(G_B)) \varepsilon E \mid (\cup_B(G_B)) \varepsilon F \\ &= (G \varepsilon E) \mid (G \varepsilon F) \end{aligned}$$

on obtient le résultat. $\square$

Théorème 2.10. Soient G un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace de Schwartz et $E \mid F$ un quotient bornologique. Alors le morphisme strict $(G \varepsilon E) \mid (G \varepsilon F) \rightarrow G \varepsilon_c(E \mid F)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Si G est un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace, alors chaque borné de G est contenu dans un disque borné complétant B de G tel que G_B est un $\mathcal{L}_\infty$ -espace. Soit

$$(0, \Phi, \Psi) : 0 \longrightarrow G_B \longrightarrow C(X) \longrightarrow C(Y)$$

une $C(K)$ -résolution de G_B . Cette $C(K)$ -résolution a été construite à partir de la suite exacte courte

$$(0, \Phi, \Psi_1, 0) : 0 \longrightarrow G_B \longrightarrow C(X) \longrightarrow C(X)/G_B \longrightarrow 0.$$

Comme les espaces de Banach $C(X)$ et G_B sont des $\mathcal{L}_\infty$ -espaces, alors $C(X)/G_B$ est aussi un $\mathcal{L}_\infty$ -espace (le résultat dual de la Proposition II.5.13 de [9]). D'après la Proposition 2.5 et l'exemple 2.4(i) de [8], et le Théorème 1.2 de [1], les suites

$$0 \longrightarrow G_B \varepsilon E \longrightarrow C(X) \varepsilon E \longrightarrow (C(X)/G_B) \varepsilon E \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow G_B \varepsilon F \longrightarrow C(X) \varepsilon F \longrightarrow (C(X)/G_B) \varepsilon F \longrightarrow 0$$

sont exactes dans la catégorie **b**. Maintenant, puisque les espaces de Banach G_B , $C(X)$ et $C(X)/G_B$ sont des $\mathcal{L}_\infty$ -espaces, alors les suites

$$0 \longrightarrow H \varepsilon F \longrightarrow H \varepsilon E \longrightarrow H \varepsilon(E \mid F) \longrightarrow 0$$

pour $H = G_B, C(X)$ et $C(X)/G_B$, sont aussi exactes dans **q**; voir [1, Théorème 1.2].

Ceci conduit au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & G_B \varepsilon F & \longrightarrow & C(X) \varepsilon F & \longrightarrow & (C(X)/G_B) \varepsilon F \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & G_B \varepsilon E & \longrightarrow & C(X) \varepsilon E & \longrightarrow & (C(X)/G_B) \varepsilon E \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & G_B \varepsilon (E|F) & \longrightarrow & C(X) \varepsilon (E|F) & \longrightarrow & (C(X)/G_B) \varepsilon (E|F) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

où les deux premières lignes et les trois colonnes sont exactes. D'après le lemme 4.3.6 de [10], la troisième ligne est aussi exacte.

Il s'ensuit que la suite

$$0 \longrightarrow (G_B \varepsilon E) \mid (G_B \varepsilon F) \longrightarrow C(X, E \mid F) \longrightarrow (C(X)/G_B) \varepsilon (E \mid F) \longrightarrow 0$$

est exacte. D'autre part, la suite

$$0 \longrightarrow G_B \varepsilon_{Res}(E \mid F) \longrightarrow C(X, E \mid F) \longrightarrow C(Y, E \mid F)$$

est exacte à gauche. Comme l'application $\Psi_2 : C(X)/G_B \rightarrow C(Y)$ est injective et à image fermée, le morphisme strict $\Psi_2 \varepsilon Id_{E|F} : (C(X)/G_B) \varepsilon E \mid F \longrightarrow C(Y, E \mid F)$ est injectif; voir [1, Proposition 2.2]). Or $\Psi = \Psi_2 \circ \Psi_1$; donc

$$Ker(\Psi \varepsilon Id_{E|F}) = Ker((\Psi_2 \circ \Psi_1) \varepsilon Id_{E|F}) = Ker(\Psi_1 \varepsilon Id_{E|F}).$$

Ceci montre que, pour tout quotient bornologique $E \mid F$, on a

$$(G_B \varepsilon E) \mid (G_B \varepsilon F) = G_B \varepsilon_{Res}(E \mid F).$$

Maintenant, si on lui applique le foncteur exact $\cup_B$ on obtient

$$\cup_B ((G_B \varepsilon E) \mid (G_B \varepsilon F)) = \cup_B (G_B \varepsilon_{Res}(E \mid F)).$$

D'après la fin de la preuve de la Proposition 2.9, on a

$$\cup_B ((G_B \varepsilon E) \mid (G_B \varepsilon F)) = (G \varepsilon E) \mid (G \varepsilon F).$$

Ceci achève la preuve du résultat. $\square$

Si E et F sont deux b -espaces, on appelle *bornologie projective* sur $G \otimes E$, et on la note π_b , la plus fine des bornologies de b -espaces sur $G \otimes E$ pour lesquelles l'application bilinéaire canonique $G \times E \rightarrow G \otimes E$ est bornée. Nous désignons ce b -espace par $G \hat{\otimes}_{\pi_b} E$.

Dans [4, Théorème 2, p. 78], H. Hogbe-Nlend a établi pour les b -espaces un résultat analogue à celui de A. Grothendieck, et qui montre que si G est un b -espace nucléaire, alors pour tout b -espace F on a $G \hat{\otimes}_{\pi_b} E = G \varepsilon E$.

Comme conséquence du Théorème 2.10, nous obtenons une généralisation du Théorème de H. Hogbe-Nlend [4] pour les quotients bornologiques.

Corollaire 2.11. *Soit G est un b -espace nucléaire. Alors les deux quotients bornologiques $(G \otimes_{\pi_b} E) \mid (G \otimes_{\pi_b} F)$ et $G \varepsilon_c(E \mid F)$ sont isomorphes.*

Démonstration. Comme le b -espace nucléaire G est un $b\mathcal{L}_\infty$ -espace de Schwartz, alors les quotients bornologiques $(G\varepsilon E) \mid (G\varepsilon F)$ et $G\varepsilon_c(E \mid F)$ sont isomorphes. D'après le Théorème 2 de [4], on a $(G\varepsilon E) \mid (G\varepsilon F) = (G \otimes_{\pi_b} E) \mid (G \otimes_{\pi_b} F)$. Ce qui montre le résultat. $\square$

RÉFÉRENCES

- [1] B. Aqzzouz, *The ε_c -product of a Schwartz b -space by a quotient Banach space and applications*, Appl. Categ. Structures **10** (2002), no. 6, 603–616.
- [2] J. Frampton et A. J. Tromba, *On the classification of spaces of Hölder continuous functions*, J. Functional Analysis **10** (1972), 336–345.
- [3] G. M. Henkin, *Impossibility of a uniform homeomorphism between spaces of smooth functions of one and of n variables ($n \geq 2$)*, J. Math. USSR, Sb. **3** (1967), 551–561.
- [4] H. Hogbe-Nlend, *Théorie des bornologies et applications*, Lecture Notes in Mathematics **213**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, v+168 pp.
- [5] R. Hollstein, *Inductive limits and ε -tensor products*, J. reine angew. Math. **319** (1980), 38–62.
- [6] C. Houzel, *Séminaire Banach*, Lecture Notes in Mathematics **277**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, V, 229 p.
- [7] H. Jarchow, *Locally convex spaces*, Mathematische Leitfäden, [Mathematical Textbooks] B. G. Teubner, Stuttgart, 1981, 548 pp.
- [8] W. Kabbalo, *Lifting theorems for vector valued functions and the ε -tensor product*, Functional analysis: surveys and recent results (Proc. Conf., Paderborn, 1976), pp. 149–166, North-Holland Math. Studies, **27**; Notas de Mat., **63**, North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [9] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, Lecture Notes in Mathematics **338**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973, ix+243 pp.
- [10] N. Popescu et L. Popescu, *Theory of categories*, Bucuresti: Editura Academiei, Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff International Publishers, **X**, 337 p.
- [11] L. Waelbroeck, *Duality and the injective tensor product*, Math. Ann. **163** (1966), 122–126.
- [12] L. Waelbroeck, *Topological vector spaces and algebras*, Lecture Notes in Mathematics **230**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, vii+158 pp.
- [13] L. Waelbroeck, *The category of quotient bornological spaces*, Aspects of mathematics and its applications, 873–894, North-Holland Math. Library, **34**, North-Holland, Amsterdam, 1986.

B. AQZZOUZ, U. MOHAMMED V-SOUISSI, FACULTÉ DES SCIENCES ÉCONOMIQUES, JURIDIQUES ET SOCIALES, DÉP. D'ÉCONOMIE, B.P. 5295, SALAELJADIDA, MOROCCO.
baqzzouz@hotmail.com

H. M. ELALJ, U. IBN TOFAIL, FACULTÉ DES SCIENCES, DÉP. DE MATHÉMATIQUES, B.P. 133, KÉNITRA, MOROCCO.
hassanelalj@yahoo.fr

H. SNOUSSI, U. MOHAMMED V-SOUISSI, FACULTÉ DES SCIENCES ÉCONOMIQUES, JURIDIQUES ET SOCIALES, DÉP. D'ÉCONOMIE, B.P. 5295, SALAELJADIDA, MOROCCO.
snoussi@um5s.ac.ma