

UNE CLASSIFICATION DES ARBRES PLANS

MARTIN DUCHARME, CÉDRIC LAMATHE ET PIERRE LEROUX[†]

RÉSUMÉ. Le but de cet article est de classifier les arbres plans (arbres plongés dans le plan) selon leurs symétries. Pour ce faire, nous utilisons le formalisme de la théorie combinatoire des espèces, incluant le théorème de dissymétrie pour les arbres. Nous considérons deux paramètres : le nombre de sommets dans un premier temps et la distribution des degrés, en second lieu. La classification des arbres plans que nous donnons est équivalente au dénombrement de ces structures selon ces paramètres et selon leur stabilisateur (groupe d'automorphismes).

ABSTRACT. The goal of this paper is to classify plane trees (trees embedded in the plane) according to their symmetries. For this purpose, we use the framework of the combinatorial theory of species, including the dissymmetry theorem for enriched trees. We consider two parameters: firstly, the number of vertices, and secondly, the degree distribution of the vertices. The classification is equivalent to the enumeration of plane trees according to these parameters and to their stabilizer (automorphism group).

1. Introduction

On considère dans cet article les *arbres plans*, c'est-à-dire les arbres (de Cayley) plongés dans le plan (à homéomorphisme près). Notre but est de classifier les arbres plans selon leurs symétries, c'est-à-dire de classer chacune des structures en fonction de leurs stabilisateurs (ou groupes d'automorphismes). Dans ce contexte, nous utilisons la théorie des espèces, introduite par A. Joyal [8]. Une présentation détaillée de cette théorie combinatoire se trouve dans [2, 3]. Dans [10], les auteurs ont proposé l'énumération des arbres plans et des arbres plans bicolores selon leur distribution des degrés, ainsi que selon l'ordre de leurs automorphismes. Ici, nous allons plus loin en donnant explicitement la classification de chaque structure selon son groupe d'automorphismes, dans le langage plus structurel de la théorie des espèces, en utilisant une méthode basée sur des formules d'addition inédites.

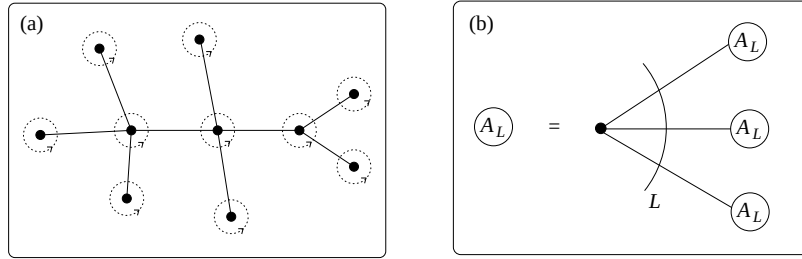
Dans le but d'analyser les symétries des arbres plans, nous utilisons les espèces suivantes :

- X , l'espèce des singletons, c'est-à-dire des sommets;
- E_2 , l'espèce des ensembles de taille deux;

Reçu le 22 décembre 2005 et, sous forme définitive, le 18 juillet 2007.

[†] P. Leroux est décédé le 9 mars 2008.

- $L = \sum_{n \geq 0} X^n$, l'espèce des listes (ou ordres linéaires), où X^n représente l'espèce des listes de longueur n ;
- $C = \sum_{n \geq 1} C_n$, l'espèce des cycles (orientés), où C_n est l'espèce des cycles (orientés) de taille n ;
- $\mathcal{a}$ et $\mathcal{a}^\bullet$, les espèces des arbres plans et des arbres plans pointés en un sommet;
- A_L , l'espèce des arborescences ordonnées, c'est-à-dire où l'ensemble des fils de tout sommet est linéairement ordonné.

FIGURE 1. (a) Un arbre plan (b) $A_L = XL(A_L)$

Il est bien connu (voir [2, 3, 10]) que l'espèce A_L des arborescences ordonnées satisfait (voir figure 1 (b))

$$(1) \quad A_L = XL(A_L)$$

et que l'espèce $\mathcal{a}^\bullet$ des arbres plans pointés en un sommet satisfait l'équation fonctionnelle

$$(2) \quad \mathcal{a}^\bullet = X(1 + C) \circ A_L = X + XC(A_L),$$

étant donné que le plongement dans le plan induit, autour de chaque sommet, une structure de cycle orienté sur l'ensemble des arêtes incidentes à ce noeud.

Un des outils de base de ce travail est le théorème de dissymétrie adapté au cas présent des arbres plans; voir [2, 3, 10].

Théorème 1.1 (Théorème de dissymétrie pour les arbres plans). *Nous disposons de l'isomorphisme d'espèces*

$$(3) \quad \mathcal{a}^\bullet + E_2(A_L) = \mathcal{a} + (A_L)^2.$$

Remarque 1.2. Notons $\mathcal{a}^-$ et $\mathcal{a}^{\bullet-}$ les espèces des arbres plans pointés en une arête et en un sommet et une arête incidente, respectivement. On a $\mathcal{a}^- = E_2(A_L)$ et $\mathcal{a}^{\bullet-} = A_L^2$. Le théorème de dissymétrie s'exprime de façon plus conceptuelle par l'isomorphisme

$$(4) \quad \mathcal{a}^\bullet + \mathcal{a}^- = \mathcal{a} + \mathcal{a}^{\bullet-}.$$

Sous cette forme, le théorème est également plus simple à démontrer. Le premier terme du membre de droite de (4) correspond au cas où le pointage, en un sommet ou en une arête, est effectué directement au centre de l'arbre, ce qui est canoniquement équivalent à ne rien faire, et le deuxième terme à un pointage hors centre. En effet, dans ce cas,

on peut sélectionner le premier élément (sommet ou arête) incident au pointage, en direction du centre, pour obtenir une $(a^\bullet)$ -structure.

Utilisant une orientation du plan, par exemple dans le sens horaire, on voit que l'espèce des cycles de longueur 2, C_2 , est isomorphe à E_2 et que $a^- = C_2(A_L) = E_2(A_L)$ (voir la figure 2 (a)).

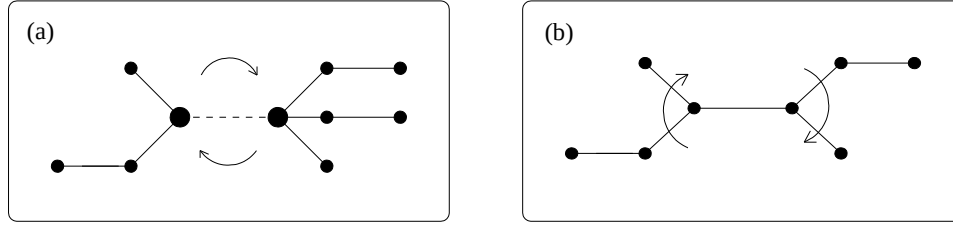


FIGURE 2. (a) $a^- = C_2(A_L) = E_2(A_L)$ (b) Symétrie circulaire d'ordre deux

Isolant le terme a , le théorème de dissymétrie prend alors la forme

$$(5) \quad a = a^\bullet + C_2(A_L) - (A_L)^2.$$

Pour obtenir le développement moléculaire de l'espèce a , il suffit donc de calculer celui des trois espèces $a^\bullet$, $C_2(A_L)$ et $(A_L)^2$. Commençons par donner le développement moléculaire de l'espèce A_L , et de ses puissances, qui s'obtient facilement par inversion de Lagrange puisque A_L est une espèce asymétrique, c'est-à-dire que le stabilisateur de chaque structure est trivial).

Proposition 1.3. *Le développement moléculaire de l'espèce A_L est donné par*

$$(6) \quad A_L(X) = \sum_{n \geq 1} c_{n-1} X^n,$$

où $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ désigne le n -ième nombre de Catalan. De plus, on a

$$(7) \quad A_L^k(X) = \sum_{n \geq k} \frac{k}{n} \binom{2n-k-1}{n-k} X^n.$$

En particulier, on a

$$(8) \quad A_L^2(X) = A_L(X) - X = \sum_{n \geq 2} c_{n-1} X^n.$$

Démonstration. La formule (6) s'obtient par une application simple de la formule d'inversion de Lagrange en utilisant le fait que l'espèce $Y = A_L$ satisfait (1), c'est-à-dire que $Y = X/(1 - Y)$. La formule (7) s'obtient par la formule d'inversion de Lagrange composée. Pour établir (8), on spécialise la formule (7), ou on utilise la relation $A_L = X + A_L^2$. $\square$

L'article est organisé comme suit. À la section 2, nous introduisons les concepts d'espèce moléculaire et de développement moléculaire. Nous proposons également des formules d'addition concernant les espèces des cycles de taille deux (C_2) et, plus généralement, des cycles (orientés) de taille k (C_k), avec $k \geq 1$. Forts de ces formules, à la section 3, nous calculons explicitement le développement moléculaire de l'espèce

des arbres plans, donnant ainsi la classification souhaitée selon les symétries. Nous traitons deux cas :

- (1) en fonction du nombre de sommets;
- (2) en fonction du nombre de sommets et de la distribution des degrés des sommets.

Enfin, nous terminons à la section 4 avec deux tables donnant les premiers termes du développement moléculaire des arbres plans, selon la taille et selon la distribution des degrés des sommets.

2. Espèces moléculaires et formules d'addition

2.1. Espèces et développements moléculaires

Cette section est consacrée aux notions d'espèce moléculaire et de développement moléculaire (ou décomposition moléculaire).

Définition 2.1. Une *espèce moléculaire* M est une espèce ne possédant qu'un seul type d'isomorphie.

En d'autres termes, deux M -structures quelconques sont toujours isomorphes. De telles espèces sont caractérisées par le fait qu'elles sont indécomposables sous la somme combinatoire :

$$M \text{ est moléculaire} \iff (M = F + G \text{ implique } F = 0 \text{ ou } G = 0).$$

Il est toujours possible de représenter une espèce moléculaire sous la forme d'une espèce quotient

$$M = \frac{X^n}{H},$$

où X^n représente l'espèce des listes (ou ordres linéaires) de longueur n , et H est un sous-groupe du groupe symétrique à n éléments $\mathbb{S}_n$. On écrit $H \leq \mathbb{S}_n$. En fait, H est le *stabilisateur* d'une quelconque M -structure sur l'ensemble $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, c'est-à-dire le sous-groupe de $\mathbb{S}_n$ dont tous les éléments fixent la M -structure considérée. Notons que le stabilisateur d'une structure est aussi appelé son *groupe d'automorphismes*. On dit que n est le *degré* de l'espèce M . C'est en fait le cardinal de l'ensemble sur lequel sont construites les structures de l'espèce moléculaire M .

Proposition 2.2. ([2, 3]) Deux espèces moléculaires X^n/H et X^n/K de même degré n , avec $n \in \mathbb{N}$, où H et K sont des sous-groupes de $\mathbb{S}_n$, sont égales (c'est-à-dire isomorphes en tant qu'espèces) si et seulement si H et K sont des sous-groupes conjugués de $\mathbb{S}_n$.

Donnons dès maintenant quelques exemples d'espèces moléculaires usuelles.

Exemple 2.3. Les espèces moléculaires suivantes sont toutes de degré n et sont obtenues en décrivant explicitement le sous-groupe de $\mathbb{S}_n$ qui stabilise une quelconque de leurs structures :

- lorsque $H = 1$, le sous-groupe trivial de $\mathbb{S}_n$, alors $X^n/1 = X^n$;

- lorsque $H = \langle \rho \rangle$, où ρ est la permutation circulaire $\rho = (1, 2, \dots, n)$ (engendrant un groupe cyclique d'ordre n), alors $X^n / \langle \rho \rangle = C_n$, l'espèce des cycles (orientés) de taille n ;
- lorsque le groupe H est $\mathbb{S}_n$ lui-même, alors on a $X^n / \mathbb{S}_n = E_n$, l'espèce des ensembles de cardinal n .

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des espèces moléculaires. Les premiers éléments de cet ensemble, jusqu'au degré 3, sont

$$\mathcal{M} = \{1, X, E_2, X^2, E_3, C_3, XE_2, X^3, \dots\}.$$

Pour une description des espèces moléculaires jusqu'au degré 7, voir [11, 5, 6, 3].

Chaque espèce F peut être exprimée comme une combinaison linéaire (possiblement infinie) à coefficients entiers d'espèces moléculaires de la manière suivante :

$$(9) \quad F = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M M,$$

où $f_M \in \mathbb{N}$ représente le nombre de sous-espèces de F isomorphes à M .

En décomposant l'action du groupe symétrique $\mathbb{S}_n$ sur l'ensemble des F -structures $F[n]$ en somme d'actions transitives, pour chaque n , on peut montrer le résultat suivant.

Proposition 2.4. ([2, 3]) *Pour chaque espèce F , le développement (9) est unique.*

Définition 2.5. Soit F une espèce quelconque. Le développement (9) est appelé *développement moléculaire* ou *décomposition moléculaire* de l'espèce F .

Ce développement moléculaire est puissant puisque, en plus de classifier l'espèce F selon ses symétries (correspondant à chaque type de sous-groupe de $\mathbb{S}_n$ fixant certaines F -structures), toutes les séries génératrices et indicatrices usuelles s'en déduisent.

Définition 2.6. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[x, y, r, s, t, \dots]$ un anneau de polynômes. Une espèce $F = F_w$ pondérée à *poids monomial* est une espèce pondérée par une fonction de poids $w_U : F[U] \rightarrow \mathbb{K}$ pour chaque ensemble fini U , où le poids d'une structure est un monôme en les variables de $\mathbb{K}$.

Définition 2.7. Une *espèce moléculaire monomiale* est une espèce moléculaire pondérée monomialement au sens de la définition précédente.

Remarque 2.8. Dans le cas d'une espèce pondérée F_w , la décomposition (9) devient

$$(10) \quad F_w = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M(w) M,$$

où $f_M(w)$ est une combinaison linéaire finie à coefficients entiers positifs de monômes en les variables de poids.

Exemple 2.9. Pour illustrer la signification des coefficients $f_M(w)$ dans des expressions de la forme (10), considérons l'espèce des arbres plans pondérés par t pour chaque noeud interne et par u pour chaque feuille. Par exemple, à la figure 3, nous pouvons voir trois arbres plans, pondérés de la manière décrite ci-dessus, bâtis sur sept sommets et qui ne sont pas isomorphes. Par contre, ces structures déterminent des espèces moléculaires isomorphes. On dit alors que ces structures sont *semblables* si elles

possèdent le même poids. On peut voir en effet que leur stabilisateur sont conjugués ou encore, ce qui est souvent plus facile à concevoir, qu'elles peuvent être réétiquetées de façon telle que leurs stabilisateurs soient identiques. Dans le cas présent, l'espèce moléculaire correspondante est $XC_2(X^3)$, le facteur X correspondant au sommet central de ces arbres. Le premier arbre plan possède le poids u^2t^5 et les deux autres, le poids u^4t^3 . Alors, le terme

$$(11) \quad \dots + (2u^4t^3 + u^2t^5) XC_2(X^3) + \dots$$

apparaît dans le développement moléculaire de l'espèce des arbres plans pondérés comme défini plus haut. Notons que le coefficient 2 dans (11) est appelé la *multiplcité* de l'espèce moléculaire $XC_2(X^3)$ de poids u^4t^3 dans l'espèce des arbres plans pondérés.

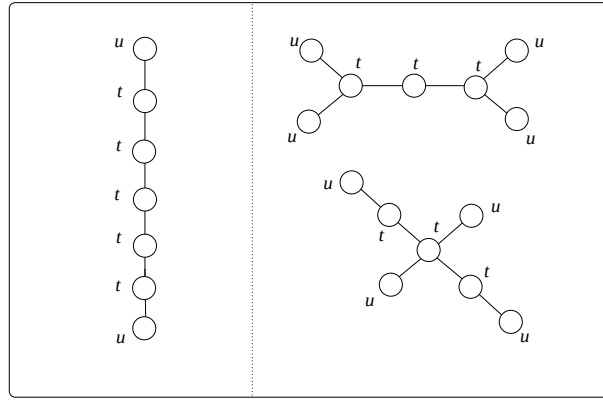


FIGURE 3. Arbres plans pondérés étiquetés non isomorphes associés à l'espèce $XC_2(X^3)$

Finalement, pour conclure sur les espèces moléculaires, considérons deux espèces moléculaires M et N . Alors, le produit MN est lui aussi une espèce moléculaire. De même, l'espèce $M(N)$, obtenue par substitution de N dans M , reste moléculaire. Par exemple, les espèces $C_k(X^n)$, avec $n \geq 1$ et $k \geq 2$, sont moléculaires. La proposition suivante vient préciser comment les expressions utilisant le produit et la composition d'espèces moléculaires peuvent être traduites en termes de stabilisateurs de structures.

Proposition 2.10. ([2, 3]) Soient X^n/H et X^m/K deux espèces moléculaires, où $H \leq \mathbb{S}_n$ et $K \leq \mathbb{S}_m$. Alors

$$\frac{X^n}{H} \cdot \frac{X^m}{K} = \frac{X^{n+m}}{H \times K} \quad \text{et} \quad \frac{X^n}{H} \circ \frac{X^m}{K} = \frac{X^{nm}}{H \wr K},$$

où $H \times K$ représente le produit cartésien des groupes H et K , et $H \wr K$, leur produit en couronne.

Rappelons également que dans le cas pondéré, le poids est multiplicatif pour le produit et la substitution d'espèces.

2.2. Formules d'addition

Dans cette section, nous considérons une espèce asymétrique B donnée par

$$B(X) = \sum_{m \geq 0} b_m X^m, \quad b_m \in \mathbb{N}.$$

On note $b_m^{(n)}$ le coefficient de X^m dans l'espèce $B^n(X)$, avec la convention $b_\nu^{(n)} = 0$ si l'indice ν n'est pas un entier plus grand ou égal à zéro. Notons que $b_m^{(1)} = b_m$. Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 2.11. ([9, 12]) *Nous disposons de la formule d'addition suivante relative à l'espèce $C_2 = E_2$ des cycles à deux éléments :*

$$(12) \quad C_2(B(X)) = \sum_{m \geq 1} b_m C_2(X^m) + \sum_{m \geq 0} e_m X^m,$$

avec

$$e_0 = \frac{1}{2} (b_0^2 + b_0) = Z_{E_2}(b_0, b_0, b_0, \dots)$$

et

$$e_m = \frac{1}{2} (b_m^{(2)} - b_{\frac{m}{2}}), \quad m \geq 1.$$

Nous allons également utiliser une nouvelle formule d'addition relative à l'espèce des cycles. Une formule semblable a déjà été proposée par Auger et al. dans [1], mais celle présentée ici est plus adaptée aux calculs impliqués dans le cadre des développements moléculaires. Avant de donner cette formule, introduisons, pour une espèce asymétrique $B(X)$ de développement moléculaire $B(X) = \sum_{m \geq 0} b_m X^m$, avec $b_m \in \mathbb{N}$, l'alphabet $\mathcal{A}(B) = \{b_{i,j} \mid i \in \mathbb{N} \text{ et } j \in [b_i]\}$, où $[b_i] = \{1, 2, \dots, b_i\}$, pondéré de sorte que le poids de la lettre $b_{i,j}$ soit X^i . Cet alphabet est muni de l'ordre lexicographique défini par la relation suivante :

$$(b_{i,j} \leq b_{m,\ell}) \iff ((i < m) \text{ ou } (i = m \text{ et } j \leq \ell)).$$

Le poids w est multiplicatif, c'est-à-dire que le poids d'un mot est donné par le produit des poids de ses lettres. Il est important de noter que l'entier $b_m^{(k)}$ correspond au nombre de mots de longueur k et de poids X^m de l'alphabet $\mathcal{A}(B)$.

Par définition, les classes de conjugaison de mots primitifs sont en bijection avec les mots de Lyndon. On note $\lambda(B, k, n)$ le nombre de mots de Lyndon de longueur k et de poids X^n sur $\mathcal{A}(B)$. Il est possible, en classant les mots sur $\mathcal{A}(B)$ selon la longueur de leur racine primitive, d'obtenir l'équation suivante :

$$b_n^{(k)} = \sum_{d|k} \frac{k}{d} \lambda(B, k/d, n/d).$$

De plus, une simple application de l'inversion de Möbius donne la relation

$$\lambda(B, k, n) = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(d) b_{n/d}^{(k/d)}.$$

On établit maintenant une formule d'addition concernant l'espèce C_k des cycles de longueur k , en mettant en bijection les types d'isomorphie de $C_k(B(X))$ et les classes de conjugaison de mots de longueur k sur $\mathcal{A}(B)$. De plus, il faut constater qu'un type

d'isomorphie de $C_k(B(X))$ associé à un mot de Lyndon de longueur k/i et de poids X^n est isomorphe en tant qu'espèce à $C_i(X^n)$.

Mentionnons qu'une preuve complète de la proposition suivante se trouve dans [7].

Proposition 2.12. *Soit*

$$B(X) = \sum_{m \geq 0} b_m X^m,$$

avec $b_m \in \mathbb{N}$, une espèce asymétrique. Alors, nous avons la formule d'addition suivante relative à l'espèce C_k des cycles (orientés) de longueur k , où $k \geq 1$:

$$(13) \quad C_k(B(X)) = \sum_{i|k} \sum_{n \geq 0} \lambda(B, k/i, n) C_i(X^n).$$

Remarque 2.13. On vérifie facilement que la formule (13) est cohérente, lorsque $k = 2$, avec la formule d'addition (12), se rappelant que $C_1(X) = X$.

3. Classification des arbres plans selon leurs symétries

3.1. En fonction du nombre de sommets

Dans cette section, nous allons proposer une classification explicite des arbres plans selon leurs symétries en fonction du nombre de sommets. Pour cela, nous utilisons le théorème de dissymétrie (Théorème 1.1) sous la forme (5). En introduction, nous avons déjà donné le développement moléculaire de l'espèce A_L^2 ; voir la formule (8). Le développement moléculaire de l'espèce $C_2(A_L)$ s'obtient facilement à partir de la formule d'addition présentée à la proposition 2.11.

Proposition 3.1. *Le développement moléculaire de l'espèce $C_2(A_L)$, où $A_L = \sum_{n \geq 1} \mathbf{c}_{n-1} X^n$, $\mathbf{c}_n$ étant le n -ième nombre de Catalan, est donné par*

$$(14) \quad C_2(A_L) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{c}_{n-1} C_2(X^n) + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{2} (\mathbf{c}_{n-1} - \mathbf{c}_{\frac{n}{2}-1}) X^n.$$

Il reste alors à obtenir le développement de l'espèce $\mathbf{a}^\bullet$. Rappelons tout d'abord que cette espèce est caractérisée par l'équation fonctionnelle suivante :

$$\mathbf{a}^\bullet = X(1 + C)(A_L) = X + XC(A_L).$$

Dans le cas de la formule d'addition concernant l'espèce $C_k(B)$ avec $B := A_L$, nous écrivons $\lambda(k, n) = \lambda(A_L, k, n)$ pour désigner le nombre de mots de Lyndon de longueur k et de poids X^n sur l'alphabet $\mathcal{A}(A_L)$. Ces entiers satisfont la formule

$$\lambda(k, n) = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(d) a_{n/d}^{(k/d)},$$

où

$$a_n^{(k)} := [X^n] A_L^k(X) = \frac{k}{n} \binom{2n-k-1}{n-k}, \quad \text{pour } k \geq n.$$

Proposition 3.2. *Le développement moléculaire de l'espèce $\mathbf{a}^\bullet$ des arbres plans pointés en un sommet est donné par*

$$(15) \quad \mathbf{a}^\bullet = X + \sum_{n \geq 1} \lambda_n X^{n+1} + \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 1} \lambda_n X C_k(X^n),$$

où

$$\lambda_n = \sum_j \lambda(j, n).$$

Démonstration. Le résultat annoncé suit directement de la formule d'addition (13) appliquée à l'équation fonctionnelle

$$\mathbf{a}^\bullet = X + X \sum_{k \geq 1} C_k(A_L)$$

et en notant que $C_1(X^n) = X^n$. $\square$

En combinant les équations (8), (14) et (15), ainsi que le théorème de dissymétrie, on obtient la classification suivante des arbres plans selon leurs symétries.

Théorème 3.3. *Le développement de l'espèce $\mathbf{a}$ des arbres plans est donné par*

$$(16) \quad \mathbf{a} = X + \sum_{n \geq 2} \alpha_n X^n + \sum_{n \geq 1} \beta_n C_2(X^n) + \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 1} \lambda_n X C_k(X^n),$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \lambda_{n-1} - \frac{1}{2} (c_{n-1} + c_{\frac{n}{2}-1}), \\ \beta_n &= c_{n-1}. \end{aligned}$$

Remarquons que λ_n est le nombre de mots de Lyndon de poids X^n sur l'alphabet $\mathcal{A}(A_L)$ et que ce nombre est fini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3.2. En fonction du nombre de sommets et de la distribution des degrés des sommets

Dans cette section, nous donnons un analogue pondéré par la distribution des degrés des sommets des résultats de la section précédente. Dans ce but, soit $\mathbb{Q}[r_1, r_2, \dots]$ l'anneau des polynômes en les variables $r_1, r_2, \dots$, à coefficients dans le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, et soit $\mathbf{a}[n]$ l'ensemble des arbres plans sur l'ensemble $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Nous introduisons une fonction de poids (voir [10, 4])

$$\begin{aligned} w : \mathbf{a}[n] &\longrightarrow \mathbb{Q}[r_1, r_2, \dots], \\ \alpha &\longmapsto w(\alpha) \end{aligned}$$

où le poids d'un arbre plan α est donné par $w(\alpha) = r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots$, où i_j représente le nombre de sommets de degré j de l'arbre α . Ainsi, la distribution des degrés est un vecteur dénombrable $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots)$. A titre d'exemple, l'arbre de la figure 4 (a) est de poids $r_1^7 r_3 r_4^2$.

Dans le cas des arborescences, nous convenons qu'une demi-arête est issue de la racine (on parle d'arborescence *plantée*) et contribue à son degré. Ainsi, un sommet seul a le poids r_1 . Par exemple, l'arborescence de la figure 4 (b) possède le poids $r_1^8 r_3^2 r_4 r_5$.

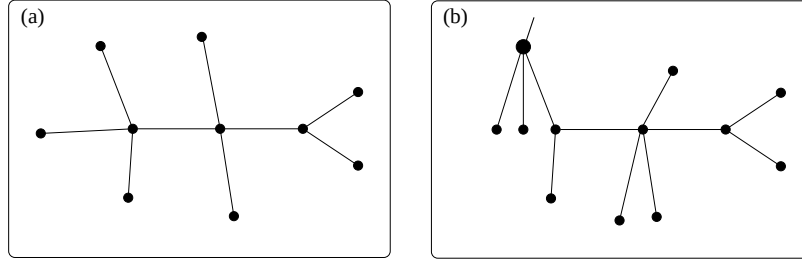


FIGURE 4. (a) un arbre de poids $r_1^7 r_3 r_4^2$ (b) une arborescence de poids $r_1^8 r_3^2 r_4 r_5$

On considère ici des distributions des degrés $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots)$. Considérons, pour $n, j \in \mathbb{N}$, les ensembles suivants :

$$I_{n,j} = \{\mathbf{i} \mid i_1 + i_2 + i_3 + \dots = n, i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \dots = 2n - j\}.$$

Lorsque $\mathbf{i} \in I_{n,1}$, la distribution $\mathbf{i}$ correspond à celle d'une arborescence. Pour $\mathbf{i} \in I_{n,2}$, la distribution correspond à celle d'un arbre ou à une paire d'arborescences. Finalement, pour $\mathbf{i} \in I_{n,k}$, on a la distribution d'un k -uplet d'arborescences.

De plus, on notera $\mathbf{r}^{\mathbf{i}} = r_1^{i_1} r_2^{i_2} r_3^{i_3} \dots$ le poids d'une structure dont la distribution des degrés est $\mathbf{i}$.

Les espèces $\mathcal{A}$ et A_L possèdent des analogues pondérés par les degrés des sommets, $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$ et $A_{\mathbf{r}}$, satisfaisant les équations

$$\mathcal{A}_{\mathbf{r}}^{\bullet} = r_1 X + X C_{\mathbf{r}}(A_{\mathbf{r}})$$

et

$$A_{\mathbf{r}} = X L_{\mathbf{r}'}(A_{\mathbf{r}}(X)),$$

où $C_{\mathbf{r}}$ et $L_{\mathbf{r}'}$ sont des espèces pondérées correspondant aux espèces C et L , respectivement. Plus précisément, on pose

$$C_{\mathbf{r}} = \sum_{i \geq 1} r_i C_i = r_1 C_1 + r_2 C_2 + r_3 C_3 + \dots,$$

l'espèce des cycles pondérées, où un cycle de longueur i possède le poids r_i (noté $r_i C_i$), et

$$L_{\mathbf{r}'} = (C_{\mathbf{r}})' = \sum_{i \geq 0} r_{i+1} L_i = r_1 \cdot 1 + r_2 X + r_3 X^2 + \dots,$$

l'espèce des listes pondérées, où une liste de longueur i reçoit le poids r_{i+1} (noté $r_{i+1} L_i$).

De plus, les espèces $C_{\mathbf{r}}$ et $L_{\mathbf{r}'}$ ont les séries génératrices suivantes (voir [3, 10, 4]):

$$C_{\mathbf{r}}(x) = r_1 x + r_2 \frac{x^2}{2} + r_3 \frac{x^3}{3} + \dots$$

et

$$L_{\mathbf{r}'}(x) = (C_{\mathbf{r}}(x))' = r_1 + r_2 x + r_3 x^2 + \dots.$$

Par inversion de Lagrange, les développements moléculaires de l'espèce $A_{\mathbf{r}}$ ainsi que de ses puissances s'obtiennent facilement.

Proposition 3.4. *Le développement moléculaire de l'espèce des arborescences linéaires pondérées par le degré des sommets $A_{\mathbf{r}}(X)$ est donné par*

$$A_{\mathbf{r}}(X) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\mathbf{i} \in I_{n,1}} a_{n,\mathbf{i}} \mathbf{r}^{\mathbf{i}} X^n,$$

où

$$a_{n,\mathbf{i}} = \frac{1}{n} \binom{n}{i_1, i_2, \dots}.$$

Démonstration. Nous utilisons de nouveau l'inversion de Lagrange à partir de l'équation fonctionnelle $A_{\mathbf{r}} = X L_{\mathbf{r}'}(A_{\mathbf{r}}(X))$. Il vient successivement

$$\begin{aligned} [X^n] A_{\mathbf{r}}(X) &= \frac{1}{n} [X^{n-1}] (L_{\mathbf{r}'}(X))^n \\ &= \frac{1}{n} [X^{n-1}] (r_1 + r_2 X + r_3 X^2 + \dots)^n \\ &= \frac{1}{n} [X^{n-1}] \sum_{\ell_1 + \ell_2 + \dots = n} \binom{n}{\ell_1, \ell_2, \dots} r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2} \dots X^{\ell_2 + 2\ell_3 + \dots} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{\ell_1 + \ell_2 + \dots = n \\ \ell_2 + 2\ell_3 + \dots = n-1}} \binom{n}{\ell_1, \ell_2, \dots} r_1^{\ell_1} r_2^{\ell_2} \dots \end{aligned}$$

Le résultat annoncé suit alors en extrayant le coefficient de $r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots$ dans la dernière expression obtenue. $\square$

De façon similaire, en utilisant l'inversion de Lagrange composée, on obtient le résultat suivant :

Proposition 3.5. *Soit $k \geq 1$. Le développement moléculaire de l'espèce $(A_{\mathbf{r}})^k$ est donné par*

$$A_{\mathbf{r}}^k(X) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\mathbf{i} \in I_{n,k}} a_{n,\mathbf{i}}^{(k)} \mathbf{r}^{\mathbf{i}} X^n,$$

où

$$(17) \quad a_{n,\mathbf{i}}^{(k)} = \frac{k}{n} \binom{n}{i_1, i_2, \dots}.$$

La formule d'addition de la proposition 2.11 concernant l'espèce C_2 des cycles de taille deux se généralise assez directement au cas pondéré. Nous considérons ici l'espèce asymétrique $A_{\mathbf{r}}$ des arborescences ordonnées pondérées par le degré des sommets.

Proposition 3.6. *Nous avons la formule d'addition suivante relative à l'espèce C_2 des cycles à deux éléments :*

$$C_2(A_{\mathbf{r}}(X)) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\mathbf{i} \in I_{n,1}} a_{n,\mathbf{i}} \mathbf{r}^{2\mathbf{i}} C_2(X^n) + \sum_{n \geq 2} \sum_{\mathbf{i} \in I_{n,2}} e_{n,\mathbf{i}} \mathbf{r}^{\mathbf{i}} X^n.$$

où

$$e_{n,\mathbf{i}} = \frac{1}{2} \left(a_{n,\mathbf{i}}^{(2)} - a_{\frac{n}{2}, \frac{\mathbf{i}}{2}} \right), \quad n \geq 1,$$

ayant posé $\frac{\mathbf{i}}{2} = (\frac{i_1}{2}, \frac{i_2}{2}, \frac{i_3}{2}, \dots)$, pour $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3, \dots)$.

Généralisons maintenant la formule d'addition (13) concernant l'espèce C_k des cycles de longueur k . Pour ce faire, nous considérons l'alphabet pondéré

$$\mathcal{A}_w(A_{\mathbf{r}}) = \{\alpha_{n,\mathbf{i},j} \mid n \in \mathbb{N}, \mathbf{i} \in I_{n,1} \text{ et } 1 \leq j \leq a_{n,\mathbf{i}}\},$$

où le poids d'une lettre $\alpha_{n,\mathbf{i},j}$ est $\mathbf{r}^{\mathbf{i}} X^n$. Nous munissons cet alphabet d'un ordre défini par

$$\alpha_{m,\mathbf{i},i} \leq \alpha_{n,\mathbf{j},j} \iff ((m < n) \text{ ou } (m = n \text{ et } \mathbf{i} < \mathbf{j}) \text{ ou } (m = n, \mathbf{i} = \mathbf{j} \text{ et } i \leq j)),$$

où $\mathbf{i} < \mathbf{j}$ signifie que le vecteur $\mathbf{i}$ est lexicographiquement inférieur au vecteur $\mathbf{j}$. Le poids est une nouvelle fois multiplicatif sur les lettres d'un mot de $\mathcal{A}_w(A_{\mathbf{r}})$. De plus, l'entier $a_{n,\mathbf{i}}^{(k)} = [\mathbf{r}^{\mathbf{i}}][X^n]A_{\mathbf{r}}^k(X)$ donne le nombre de mots de longueur k de l'alphabet $\mathcal{A}_w(A_{\mathbf{r}})$ de poids $\mathbf{r}^{\mathbf{i}} X^n$.

Proposition 3.7. *Nous avons la formule d'addition suivante relative à l'espèce C_k des cycles (orientés) de longueur k , avec $k \geq 1$:*

$$C_k(A_{\mathbf{r}}(X)) = \sum_{d|k} \sum_{n \geq 0} \sum_{\mathbf{i}} \lambda(k/d, n, \mathbf{i}) \mathbf{r}^{d\mathbf{i}} C_d(X^n),$$

où $d\mathbf{i} = (di_1, di_2, di_3, \dots)$ et $\lambda(k/d, n, \mathbf{i})$, le nombre de mots de Lyndon de longueur k/d sur l'alphabet $\mathcal{A}_w(A_{\mathbf{r}})$ de poids $\mathbf{r}^{\mathbf{i}} X^n$, satisfait la formule

$$\lambda(k, n, \mathbf{i}) = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(d) a_{\frac{n}{d}, \frac{\mathbf{i}}{d}}^{(k/d)},$$

où $a_{n,\mathbf{i}}^{(j)}$ est donné par (17), rappelant que ces coefficients sont nuls dans le cas d'indices fractionnaires.

En utilisant le théorème de dissymétrie et les trois propositions précédentes, on obtient le résultat final de cet article.

Théorème 3.8. *Le développement moléculaire de l'espèce $\mathcal{A}(X)$ des arbres plans pondérés par leur distribution des degrés est donné par*

$$(18) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}(X) = & \sum_{n \geq 2} \sum_{\mathbf{i} \in I_{n,2}} \alpha_{n,\mathbf{i}} \mathbf{r}^{\mathbf{i}} X^n + \sum_{n \geq 1} \sum_{\mathbf{i} \in I_{n,1}} \beta_{n,\mathbf{i}} \mathbf{r}^{2\mathbf{i}} C_2(X^n) \\ & + \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 0} \sum_{\ell \geq 1} \sum_{\mathbf{i} \in I_{n,\ell}} \lambda(\ell, n, \mathbf{i}) r_{k\ell} \mathbf{r}^{k\mathbf{i}} X C_k(X^n), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_{n,\mathbf{i}} &= \sum_{k \geq 1} \lambda(k, n-1, \mathbf{i} - \delta_k) - \frac{1}{2} \left(a_{n,\mathbf{i}}^{(2)} + a_{\frac{n}{2}, \frac{\mathbf{i}}{2}} \right), \\ \beta_{n,\mathbf{i}} &= a_{n,\mathbf{i}}, \end{aligned}$$

et δ_k est le vecteur infini dont tous les éléments sont nuls excepté le k -ième qui vaut 1.

4. Appendice

La table 1 présente les premiers termes, jusqu'à l'ordre 12, du développement moléculaire de l'espèce $\mathcal{A}$ des arbres plans.

n	$\mathcal{A}_n$
1	X
2	$C_2(X)$
3	$XC_2(X)$
4	$C_2(X^2) + XC_3(X)$
5	$X^5 + XC_2(X^2) + XC_4(X)$
6	$3X^6 + 2C_2(X^3) + XC_5(X)$
7	$9X^7 + 3XC_2(X^3) + XC_3(X^2) + XC_6(X)$
8	$28X^8 + 5C_2(X^4) + XC_7(X)$
9	$85X^9 + 8XC_2(X^4) + XC_4(X^2) + XC_8(X)$
10	$262X^{10} + 14C_2(X^5) + 3XC_3(X^3) + XC_9(X)$
11	$827X^{11} + 25XC_2(X^5) + XC_5(X^2) + XC_{10}(X)$
12	$2651X^{12} + 42C_2(X^6) + XC_{11}(X)$

TABLE 1. Premiers termes du développement moléculaire de l'espèce $\mathcal{A}$

Pour sa part, la table 2 présente l'analogue pondéré par la distribution des degrés du développement précédent. En posant $r_i = 1$, pour tout $i \geq 1$, on retrouve ce développement. Notons que lorsque l'on pose $r_1 = u$ et $r_i = t$ pour $i \geq 2$, nous nous remplaçons dans le cas de l'exemple 2.3 et les termes

$$r_2^5 r_1^2 XC_2(X^3) + r_3^2 r_2 r_1^4 XC_2(X^3) + r_4 r_2^2 r_1^4 XC_2(X^3)$$

deviennent

$$2u^4 t^3 XC_2(X^3) + u^2 t^5 XC_2(X^3).$$

Remerciements. L'article fut écrit avec le soutien financier du FQRNT (Québec) et du CRSNG (Canada).

English extended abstract

In this paper, we consider the class of plane trees, that is, of classical (Cayley) trees embedded in the plane (up to homeomorphism). These trees are characterized by the fact that the edges incident to each vertex are cyclically ordered. Our aim is to classify these plane trees according to their symmetries. More precisely, we classify these discrete structures with respect to their stabilizer (or automorphism group), up to conjugacy. In our classification, we consider two parameters: firstly, the number of vertices and, secondly, the degree distribution of the vertices, where the degree distribution is a infinite vector $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3, \dots)$ where i_j gives the number of vertices of

$r_0 X$
$r_1^2 C_2(X)$
$r_2 r_1^2 X C_2(X)$
$r_3 r_1^3 X C_3(X) + r_2^2 r_1^2 C_2(X^2)$
$r_2^3 r_1^2 X C_2(X^2) + r_3 r_2 r_1^3 X^5 + r_4 r_1^4 X C_4(X)$
$2r_3 r_2^2 r_1^3 X^6 + r_4 r_2 r_1^4 X^6 + r_5 r_1^5 X C_5(X) + r_2^4 r_1^2 C_2(X^3) + r_3^2 r_1^4 C_2(X^3)$
$r_2^5 r_1^2 X C_2(X^3) + r_3^2 r_2 r_1^4 X C_2(X^3) + 2r_4 r_2^2 r_1^4 X^7 + 3r_3 r_2^3 r_1^3 X^7 + 2r_3^2 r_2 r_1^4 X^7 +$ $r_4 r_2^2 r_1^4 X C_2(X^3) + r_4 r_3 r_1^5 X^7 + r_5 r_2 r_1^5 X^7 + r_3 r_2^3 r_1^3 X C_3(X^2) + r_6 r_1^6 X C_6(X)$
$3r_5 r_2^2 r_1^5 X^8 + 6r_4 r_3 r_2 r_1^5 X^8 + r_6 r_2 r_1^6 X^8 + r_5 r_3 r_1^6 X^8 + r_4^2 r_1^6 C_2(X^4) +$ $r_7 r_1^7 X C_7(X) + r_2^6 r_1^2 C_2(X^4) + 5r_3 r_2^4 r_1^3 X^8 + 6r_3^2 r_2^2 r_1^4 X^8 + 3r_3^2 r_2^2 r_1^4 C_2(X^4) +$ $5r_4 r_2^3 r_1^4 X^8 + r_3^3 r_1^5 X^8$
$7r_5 r_3 r_2 r_1^6 X^9 + 3r_4 r_3^2 r_1^6 X^9 + r_4 r_3^2 r_1^6 X C_2(X^4) + r_4 r_2^4 r_1^4 X C_4(X^2) + r_5 r_4 r_1^7 X^9 +$ $16r_3^2 r_2^3 r_1^4 X^9 + 8r_4 r_2^4 r_1^4 X^9 + r_4 r_2^4 r_1^4 X C_2(X^4) + 3r_3^2 r_2^3 r_1^4 X C_2(X^4) + 7r_3^3 r_2^2 r_1^5 X^9 +$ $r_4^2 r_2 r_1^6 X C_2(X^4) + 7r_3 r_2^5 r_1^3 X^9 + 3r_4^2 r_2 r_1^6 X^9 + r_2^7 r_1^2 X C_2(X^4) + r_8 r_1^8 X C_8(X) +$ $r_6 r_2^2 r_1^6 X C_2(X^4) + r_6 r_3 r_1^7 X^9 + r_7 r_2 r_1^7 X^9 + 3r_6 r_2^2 r_1^6 X^9 + 21r_4 r_3 r_2^2 r_1^5 X^9 +$ $7r_5 r_2^3 r_1^5 X^9$
$4r_4^2 r_3 r_1^7 X^{10} + 9r_3 r_2^6 r_1^3 X^{10} + 4r_5 r_2^3 r_1^7 X^{10} + r_6 r_2^3 r_1^6 X C_3(X^3) + 56r_4 r_3 r_2^3 r_1^5 X^{10} +$ $r_3 r_2^6 r_1^3 X C_3(X^3) + 28r_4 r_3^2 r_2 r_1^6 X^{10} + 32r_3^2 r_2^4 r_1^4 X^{10} + 8r_6 r_3 r_2 r_1^7 X^{10} + 28r_3^3 r_2^2 r_1^5 X^{10} +$ $14r_5 r_2^4 r_1^5 X^{10} + 2r_3^3 r_1^6 C_2(X^5) + r_9 r_1^9 X C_9(X) + 12r_4^2 r_2^2 r_1^6 X^{10} + 9r_6 r_2^3 r_1^6 X^{10} +$ $4r_7 r_2^2 r_1^7 X^{10} + r_2^8 r_1^2 C_2(X^5) + r_3^4 r_1^6 X C_3(X^3) + 8r_5 r_4 r_2 r_1^7 X^{10} + 14r_4 r_2^5 r_1^4 X^{10} +$ $r_3^4 r_1^6 X^{10} + 28r_5 r_3 r_2^2 r_1^6 X^{10} + r_8 r_2 r_1^8 X^{10} + r_7 r_3 r_1^8 X^{10} + r_6 r_4 r_1^8 X^{10} +$ $6r_3^2 r_2^4 r_1^4 C_2(X^5) + 4r_4^2 r_2^2 r_1^6 C_2(X^5) + r_5^2 r_1^8 C_2(X^5)$
$9r_6 r_4 r_2 r_1^8 X^{11} + 20r_3^4 r_2 r_1^6 X^{11} + r_{10} r_1^{10} X C_{10}(X) + 36r_6 r_3 r_2^2 r_1^7 X^{11} + r_9 r_2 r_1^9 X^{11} +$ $60r_3^2 r_2^5 r_1^4 X^{11} + 4r_4^2 r_2^3 r_1^6 X C_2(X^5) + 36r_5 r_4 r_2^2 r_1^7 X^{11} + 12r_3 r_2^7 r_1^3 X^{11} + r_4^3 r_1^8 X C_2(X^5) +$ $4r_8 r_2^2 r_1^8 X^{11} + 2r_6 r_2^4 r_1^6 X C_2(X^5) + 6r_3^2 r_2^5 r_1^4 X C_2(X^5) + r_7 r_4 r_1^9 X^{11} + 36r_4^2 r_3 r_2 r_1^7 X^{11} +$ $9r_5 r_4 r_3 r_1^8 X^{11} + 4r_4 r_3^2 r_2 r_1^6 X C_2(X^5) + 126r_4 r_3 r_2^4 r_1^5 X^{11} + r_6 r_3^2 r_1^8 X C_2(X^5) + 84r_5 r_3 r_2^3 r_1^6 X^{11} +$ $+ 12r_4 r_3^3 r_1^7 X^{11} + r_4^3 r_1^8 X^{11} + r_8 r_3 r_1^8 X^{11} + 9r_7 r_3 r_2 r_1^8 X^{11} + 12r_7 r_2^3 r_1^7 X^{11} +$ $124r_4 r_3^2 r_2^2 r_1^6 X^{11} + 20r_4 r_2^6 r_1^4 X^{11} + r_5 r_2^5 r_1^5 X C_5(X^2) + 40r_4^2 r_2^3 r_1^6 X^{11} + r_6 r_5 r_1^9 X^{11} +$ $2r_4^3 r_2 r_1^6 X C_2(X^5) + r_8 r_2^2 r_1^8 X C_2(X^5) + r_9^2 r_1^9 X C_2(X^5) + 4r_6 r_3^2 r_1^8 X^{11} + 20r_6 r_2^4 r_1^6 X^{11} +$ $25r_5 r_2^5 r_1^5 X^{11} + r_5^2 r_2 r_1^8 X C_2(X^5) + 84r_3^3 r_2^3 r_1^5 X^{11} + 2r_4 r_2^6 r_1^4 X C_2(X^5) + 36r_5 r_3^2 r_2 r_1^7 X^{11} +$ $4r_5^2 r_2 r_1^8 X^{11}$
$120r_6 r_3 r_2^3 r_1^7 X^{12} + 15r_8 r_2^3 r_1^8 X^{12} + 120r_5 r_4 r_2^2 r_1^7 X^{12} + r_7 r_5 r_1^{10} X^{12} + 42r_5 r_2^6 r_1^5 X^{12} +$ $30r_7 r_2^4 r_1^7 X^{12} + r_8 r_4 r_1^{10} X^{12} + 5r_5 r_4 r_1^9 X^{12} + 210r_5 r_3 r_2^4 r_1^6 X^{12} + 210r_3^3 r_2^2 r_1^5 X^{12} +$ $100r_4^3 r_2^2 r_1^6 X^{12} + r_9 r_3 r_1^{10} X^{12} + r_6^2 r_1^{10} C_2(X^6) + r_{11} r_1^{11} X C_{11}(X) + 180r_5 r_3^2 r_2^2 r_1^7 X^{12} +$ $120r_4 r_3^3 r_2 r_1^7 X^{12} + 42r_6 r_2^5 r_1^6 X^{12} + 10r_7 r_4 r_2 r_1^9 X^{12} + 20r_5^2 r_2^2 r_1^8 X^{12} + 45r_6 r_4 r_2^2 r_1^8 X^{12} +$ $45r_6 r_2^3 r_2 r_1^8 X^{12} + 420r_4 r_3^2 r_2^3 r_1^6 X^{12} + 5r_5^2 r_2^2 r_1^8 C_2(X^6) + 20r_4^2 r_3^2 r_1^8 X^{12} + 5r_5^2 r_3 r_1^9 X^{12} +$ $30r_4 r_2^7 r_1^4 X^{12} + 10r_8 r_3 r_2 r_1^9 X^{12} + r_{10} r_2 r_1^{10} X^{12} + 100r_4^2 r_2^4 r_1^6 X^{12} + r_2^{10} r_1^2 C_2(X^6) +$ $15r_4^3 r_2 r_1^8 X^{12} + 90r_5 r_4 r_3 r_2 r_1^8 X^{12} + 6r_5^3 r_1^7 X^{12} + 10r_6 r_4 r_3 r_1^9 X^{12} + 100r_3^2 r_2^4 r_1^6 X^{12} +$ $15r_5 r_3^3 r_1^8 X^{12} + 5r_7 r_2^3 r_1^9 X^{12} + 15r_3 r_2^8 r_1^3 X^{12} + 10r_6 r_5 r_2 r_1^9 X^{12} + 10r_3^2 r_2^6 r_1^4 C_2(X^6) +$ $5r_9 r_2^2 r_1^{10} X^{12} + 5r_4^2 r_3 r_1^8 C_2(X^6) + 45r_7 r_3 r_2^2 r_1^8 X^{12} + 180r_4^2 r_3 r_2^2 r_1^7 X^{12} + 252r_4 r_3 r_2^3 r_1^5 X^{12} +$ $10r_4^3 r_2^2 r_1^6 C_2(X^6) + 10r_4^2 r_2^4 r_1^6 C_2(X^6)$

TABLE 2. Premiers termes du développement moléculaire de l'espèce $\mathcal{A}$ des arbres plans, pondérés par la distribution des degrés

degree j . For our purpose, we work in the (general) framework of the combinatorial theory of species of structures introduced by A. Joyal [8]; see also [2, 3] for a detailed presentation of this theory. The intended classification is expressed as the molecular expansion of the species $\mathcal{A}$ of plane trees. This is a (possibly infinite) linear combination with integer coefficients of basis species, indecomposable under the combinatorial sum, called molecular species. Each molecular species in this expansion contains explicitly the stabilizer of the structures and then corresponds to a specific symmetry of plane trees.

One of the main tools used to achieve our goal is the dissymmetry Theorem (eq. (3)) permitting to express the species of plane trees in terms of three related pointed species, especially the species $\mathcal{A}^\bullet$ of vertex-pointed plane trees. We then compute the molecular expansion of these three pointed species in two steps:

(1) We first characterize the species $\mathcal{A}^\bullet$ by a functional equation (see eq. (2)) in terms of the known species $\mathcal{C}$ of oriented cycles and $\mathcal{A}$ of vertex-planted plane trees or equivalently, the species of linearly ordered trees. The species $\mathcal{A}$ is our basis species and is asymmetric, that is, the stabilizer of each $\mathcal{A}$ -structures is trivial (reduced to the identity permutation of the symmetric group), then permitting to obtain in a straightforward way its molecular expansion.

(2) Next we make use of addition formulas concerning the species E_2 of two-element sets and $\mathcal{C}$. For the species $\mathcal{C}$, we introduce a new method based on the enumeration of classes of words whose letters are (correspond to) the structures of the asymmetric species $\mathcal{A}$.

Our final result (see formulas (16) and (18)) is obtained by a simple application of the dissymmetry Theorem. Notice that, for the classification according to the vertex degree distribution, a weight is introduced to take into account the degree of each vertex. We then use weighted species and weighted versions of the addition formulas.

RÉFÉRENCES

- [1] P. Auger, G. Labelle et P. Leroux, *Combinatorial addition formulas and applications*, Adv. in Appl. Math. **28** (2002), no. 3-4, 302–342
- [2] F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux, *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*, Publications du LaCIM **19** (1994). <http://www.lacim.uqam.ca/>.
- [3] F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux, *Combinatorial species and tree-like structures*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **67**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, xx+457 pp.
- [4] M. Bousquet et C. Lamathe, *Enumeration of solid 2-trees according to edge number and edge degree distribution*, Discrete Math. **298** (2005), no. 1-3, 115–141.
- [5] Y. Chiricota, *Classification des espèces moléculaires de degré 6 et 7*, Ann. Sci. Math. Québec **17** (1993), no. 1, 11–37.
- [6] Y. Chiricota, *Structures combinatoires et calcul symbolique*, Thèse de doctorat, UQÀM, Publications du LaCIM **12** (1993).

- [7] M. Ducharme, *2-arbres k -gonaux exterplans et exterplanaires et leur développement moléculaire*, Mémoire de maîtrise, UQÀM, (2005).
- [8] A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Math. **42** (1981), no. 1, 1–82.
- [9] G. Labelle, C. Lamathe et P. Leroux, *A classification of plane and planar 2-trees*, Random generation of combinatorial objects and bijective combinatorics, Theoret. Comput. Sci. **307** (2003), no. 2, 337–363.
- [10] G. Labelle et P. Leroux, *Enumeration of (uni- or bicolored) plane trees according to their degree distribution*, Proceedings of the 6th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (New Brunswick, NJ, 1994), Discrete Math. **157** (1996), no. 1-3, 227–240.
- [11] J. Labelle, *Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité*, Ann. Sci. Math. Québec **9** (1985), no. 1, 31–58.
- [12] C. Lamathe, *Spécification de classes de structures arborescentes*, Thèse de doctorat, Publications du LaCIM **33** UQÀM, (2003).

M. DUCHARME, LACIM ET DÉP. DE MATHÉMATIQUES, U. DU QUÉBEC À MONTRÉAL, C. P. 8888, SUCC. CENTRE-VILLE, MONTRÉAL (QUÉBEC), CANADA, H3C 3P8
ducharme.martin.2@courrier.uqam.ca

C. LAMATHE, LACIM ET DÉP. DE MATHÉMATIQUES, U. DU QUÉBEC À MONTRÉAL, C. P. 8888, SUCC. CENTRE-VILLE, MONTRÉAL (QUÉBEC), CANADA, H3C 3P8
lamathe.cedric@uqam.ca

P. LEROUX, LACIM ET DÉP. DE MATHÉMATIQUES, U. DU QUÉBEC À MONTRÉAL, C. P. 8888, SUCC. CENTRE-VILLE, MONTRÉAL (QUÉBEC), CANADA, H3C 3P8