

CALCUL DE BORNES SUR LA PRIME EN EXCÉDENT DE PERTE DE FONCTIONS DE RISQUES DÉPENDANTS EN PRÉSENCE D'INFORMATION PARTIELLE SUR LEURS MARGES

MICHEL DENUIT, CHRISTIAN GENEST ET MHAMED MESFIOUI

RÉSUMÉ. Une stratégie générale est proposée pour l'obtention de bornes sur la prime en excédent de perte de fonctions croissantes et directionnellement convexes d'un vecteur d'aléas positifs en présence d'information partielle concernant sa copule ou ses marges. Des calculs explicites sont présentés dans le cas d'une somme d'aléas dont l'espérance, la variance ou l'ensemble des valeurs possibles de chacun des termes est borné et connu. Ces observations, qui généralisent celles de Genest et coll. (2002), s'appuient sur un résultat de Müller et Scarsini (2001) concernant la comparaison stochastique de vecteurs aléatoires de même copule.

ABSTRACT. A general strategy is proposed for deriving bounds on the stop-loss premium of directionally convex, increasing functions of a vector of non-negative random variables on the basis of partial information on its copula or its margins. Explicit calculations are presented in the case of a sum of random variables for which the mean, variance or range of values of each term is bounded and known. These findings, which generalize those of Genest et al. (2002), are based on a result of Müller and Scarsini (2001) on the stochastic comparison of random vectors having a common copula.

1. Introduction. Soient $X_1, \dots, X_n$ des aléas positifs et continus. Le comportement stochastique de $X = X_1 + \dots + X_n$ revêt un intérêt particulier, notamment lorsqu'en actuariat, X_i représente le montant du i^{e} sinistre d'un portefeuille de contrats d'assurance. La loi de X se calcule aisément lorsque ses composantes sont mutuellement indépendantes, mais le cas plus réaliste et plus complexe où ces variables sont dépendantes a fait l'objet de peu de travaux à ce jour.

Lorsque la loi F_i de X_i est connue pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, Dhaene et Govaerts [10, 11] identifient, comme le fait aussi Müller [23], la structure de dépendance la plus risquée, c'est-à-dire la loi conjointe du vecteur $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ qui conduit à la plus grande valeur possible de la prime en excédent de perte, définie pour tout réel $d \in [0, \infty)$ par

$$\pi(X, d) = E \{ \max(0, X - d) \}.$$

L'évaluation de cette prime est pertinente pour les réassureurs, entre autres, pour qui elle représente l'espérance de l'excédent du total des indemnités versées par une compagnie d'assurance au-delà d'une franchise d .

Reçu le 8 mai 2006 et, sous forme définitive, le 6 février 2007.

Comme le montrent Dhaene et Goovaerts [10, 11] ainsi que Müller [23], la prime $\pi(X, d)$ est maximale lorsque les variables $X_1, \dots, X_n$ sont comonotones, c'est-à-dire en présence d'un aléa U équadistribué sur l'intervalle $(0, 1)$ tel que

$$X_1 = F_1^{-1}(U), \dots, X_n = F_n^{-1}(U). \quad (1)$$

Sous des conditions supplémentaires, Dhaene et Denuit [9] caractérisent aussi la structure de dépendance (dite anti-comonotone) correspondant à la plus petite valeur possible de $\pi(X, d)$.

En pratique, il est toutefois rare que les fonctions de répartition $F_1, \dots, F_n$ soient entièrement connues. C'est pourquoi Hürlimann [18] et plus récemment Genest et coll. [16] ont cherché à majorer $\pi(X, d)$ en présence d'information partielle concernant les marges du vecteur $\mathbf{X}$. En particulier, Genest et coll. [16] comparent deux stratégies naturelles de calcul d'un majorant dans le cas où l'espérance et la variance de X_i , notées

$$E(X_i) = \mu_i > 0 \quad \text{et} \quad \text{var}(X_i) = \sigma_i^2 > 0,$$

sont fixées pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$. Partant du fait que

$$E(X) = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad \text{et} \quad \text{var}(X) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j,$$

la première option qu'ils envisagent consiste à déterminer $\pi(X, d)$ pour tous les choix possibles de $\rho_{ij} = \text{corr}(X_i, X_j)$ où $i, j \in \{1, \dots, n\}$. La plus grande valeur ainsi obtenue est alors un majorant. Plus porteuse, la seconde option se limite au calcul de

$$\pi \left(\sum_{i=1}^n F_{i, \max}^{-1}(U), d \right), \quad (2)$$

où pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, $F_{i, \max}$ dénote la fonction de répartition conduisant au meilleur majorant sur la prime en excédent de perte pour X_i , étant donné l'information disponible concernant F_i . La constante (2) est forcément supérieure à $\pi(X, d)$, en vertu de l'inégalité de Lorentz ; voir par exemple le théorème 5 de Dhaene et coll. [12]. Dans leur article, Genest et coll. [16] n'explicitent toutefois la borne (2) que dans le cas $n = 2$.

Dans la foulée de ces travaux, on se propose ici de montrer comment l'exploitation de certains résultats de Müller et Scarsini [24] permet d'obtenir des bornes sur la prime en excédent de perte de toute combinaison $\Psi(\mathbf{X})$ d'aléas définie en terme d'une application $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et directionnellement convexe. Deux approches sont envisagées selon que l'on possède une information partielle ou complète sur les marges ou sur la copule régissant la dépendance entre $X_1, \dots, X_n$.

L'approche générale est décrite au §2 et des calculs sont présentés dans les paragraphes subséquents dans le cas spécifique où $\Psi(\mathbf{X}) = X_1 + \dots + X_n$ pour tout entier $n \geq 2$. Au §3, on traite le cas où chacune des variables X_i est bornée et d'espérance donnée. Au §4, on suppose à l'instar de Genest et coll. [16] que l'aléa X_i n'est pas borné mais que son espérance et sa variance sont connues. Au §5, on examine ce qui se produit lorsque la copule est fixée et archimédienne. La recherche de minorants sur la prime en excédent de perte est brièvement abordée au §6 et quelques remarques sont offertes au §7 en guise de conclusion.

2. Description de l'approche générale. Pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, soit X_i un aléa positif de loi continue définie en tout $x \in \mathbb{R}$ par $F_i(x) = P(X_i \leq x)$. Soit en outre C la copule du vecteur $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ définie implicitement par l'identité suivante, valide pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = C\{F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)\}. \quad (3)$$

Étant donné une application $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on cherche à majorer ou à minorer la prime en excédent de perte associée à $\Psi(\mathbf{X})$. On suppose pour ce faire que l'application en question est à la fois croissante et directionnellement convexe au sens suivant.

Définition 1. Soient $\mathbf{1}_1, \dots, \mathbf{1}_n$ les n vecteurs unités canoniques de $\mathbb{R}^n$ et soit $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application quelconque. Pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, soit en outre Δ_i^ε l'opérateur défini pour tout réel $\varepsilon \in (0, \infty)$ par $\Delta_i^\varepsilon \Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{1}_i) - \Psi(\mathbf{x})$. On dit alors que Ψ est directionnellement convexe si et seulement si $\Delta_i^\varepsilon \Delta_j^\delta \Psi(\mathbf{x}) \geq 0$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et pour tous réels $\varepsilon, \delta \in (0, \infty)$.

Remarque 1. D'après le théorème 2.6 de Müller et Scarsini [24], une fonction est directionnellement convexe si et seulement si elle est supermodulaire et convexe en chacune de ses coordonnées. Par la supermodularité d'une fonction Ψ , on entend le fait que $\Delta_i^\varepsilon \Delta_j^\delta \Psi(\mathbf{x}) \geq 0$ pour tous entiers $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i < j$ et pour tous réels $\varepsilon, \delta > 0$.

Remarque 2. Les applications linéaires du type $\mathbf{x} \mapsto \Psi(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ dans lesquelles les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont strictement positifs constituent des exemples élémentaires de fonctions croissantes et directionnellement convexes.

La méthode de construction de bornes sur la prime en excédent de perte dépend évidemment du choix de Ψ . Comme on va maintenant le voir, elle doit aussi tenir compte de la connaissance ou non des marges.

2.1. Marges connues. Supposons que les fonctions de répartition marginales $F_1, \dots, F_n$ soient connues et que l'on puisse en outre identifier des copules C^- et C^+ encadrant celle du vecteur $\mathbf{X}$. En d'autres termes, supposons que

$$C^- \prec_{\text{sm}} C \prec_{\text{sm}} C^+, \quad (4)$$

où $\prec_{\text{sm}}$ représente l'ordre supermodulaire au sens de Shaked et Shanthikumar [26] ou de Müller [23], dont la définition est rappelée ci-dessous.

Définition 2. Soient $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ deux vecteurs aléatoires de dimension $n \geq 2$ ayant respectivement pour lois les copules C et D . On note $\mathbf{U} \prec_{\text{sm}} \mathbf{V}$ ou $C \prec_{\text{sm}} D$ si et seulement si l'inégalité $E\{\Psi(\mathbf{U})\} \leq E\{\Psi(\mathbf{V})\}$ vaut pour toute application supermodulaire $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ garantissant l'existence des espérances.

Les préordres convexe et convexe-croissant interviendront aussi dans la suite.

Définition 3. Soient S et T deux aléas quelconques de lois F_S et F_T . On écrit $S \prec_{\text{ccx}} T$ ou $F_S \prec_{\text{ccx}} F_T$ si et seulement si $E\{\psi(S)\} \leq E\{\psi(T)\}$ pour toute application $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et convexe pour laquelle ces espérances existent. Si la relation est vérifiée pour toute application convexe $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ garantissant l'existence des espérances, on écrit alors $S \prec_{\text{cx}} T$ ou $F_S \prec_{\text{cx}} F_T$.

Le résultat suivant suggère des bornes sur la prime en excédent de perte de $\Psi(\mathbf{X})$ dans le cas où l'application Ψ est croissante et directionnellement convexe. Remarquer que celles-ci restent valables lorsque Ψ est à la fois croissante et supermodulaire.

Proposition 1. *Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire de marges continues $F_1, \dots, F_n$ et de copule C . Soient en outre $\mathbf{X}^- = (X_1^-, \dots, X_n^-)$ et $\mathbf{X}^+ = (X_1^+, \dots, X_n^+)$ deux vecteurs aléatoires de mêmes marges $F_1, \dots, F_n$ ayant respectivement pour copule C^- et C^+ . Si la relation (4) est vérifiée et que l'application $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante et directionnellement convexe, alors*

$$\Psi(\mathbf{X}^-) \prec_{\text{ccx}} \Psi(\mathbf{X}) \prec_{\text{ccx}} \Psi(\mathbf{X}^+), \quad (5)$$

de sorte que pour tout réel $d \in [0, \infty)$, on a

$$\pi(\Psi(\mathbf{X}^-), d) \leq \pi(\Psi(\mathbf{X}), d) \leq \pi(\Psi(\mathbf{X}^+), d). \quad (6)$$

Démonstration. L'énoncé (5) découle du théorème 3.1 de Müller [23]. Que (6) en soit une conséquence se déduit simplement du fait que l'application $x \mapsto \max(0, x - d)$ est croissante et convexe. $\square$

Les membres de gauche et de droite de la chaîne d'inégalités (6) constituent respectivement un minorant et un majorant naturels de la prime en excédent de perte associée à $\Psi(\mathbf{X})$, dans la mesure où l'on connaît C^- , C^+ et les fonctions de répartition marginales $F_1, \dots, F_n$. En particulier, l'inégalité $C(u_1, \dots, u_n) \preceq_{\text{sm}} M(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n)$ vaut pour tous réels $u_1, \dots, u_n \in (0, 1)$; voir par exemple le théorème 2.10.12 de Nelson [25]. Par conséquent, la borne supérieure de Fréchet–Hoeffding, M , est un choix naturel pour C^+ . Elle correspond d'ailleurs au postulat de comonotonie des variables $X_1, \dots, X_n$ déjà évoqué en (1). Dans le cas particulier où $\Psi(\mathbf{X}) = X_1 + \dots + X_n$, l'inégalité

$$\pi\left(\sum_{i=1}^n X_i, d\right) \leq \pi\left(\sum_{i=1}^n F_i^{-1}(U), d\right)$$

est en fait une simple conséquence de celle de Lorentz; consulter entre autres Bäuerle et Müller [1] ou Dhaene et coll. [12].

Lorsque les aléas $X_1, \dots, X_n$ sont associés au sens de Esary et coll. [13], la copule d'indépendance $\Pi(u_1, \dots, u_n) = u_1 \cdots u_n$ s'impose naturellement comme choix de C^- ; voir par exemple Christofides et Vaggelatos [5].

2.2. Marges inconnues. En pratique, il est plus fréquent que les marges des aléas $X_1, \dots, X_n$ soient inconnues mais que des informations partielles concernant leur nature permettent d'encadrer chacune d'entre elles comme suit :

$$F_{i,\min} \prec_{\text{cx}} F_i \prec_{\text{cx}} F_{i,\max}, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (7)$$

On suppose aussi dans la suite que les copules C^- et C^+ sont invariantes par permutation de leurs arguments et séquentiellement conditionnellement croissantes, au sens de Lehmann [21].

Définition 4. *On dit qu'un vecteur aléatoire continu $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ ou que sa copule satisfait au critère de croissance conditionnelle séquentielle si et seulement si pour tout entier $i \in \{2, \dots, n\}$, la fonction $P(U_i \leq u | U_1 = u_1, \dots, U_{i-1} = u_{i-1})$ est non-décroissante en $u_1, \dots, u_{i-1}$.*

Remarque 3. Il est évident que la copule d'indépendance et la borne supérieure de Fréchet–Hoeffding sont séquentiellement conditionnellement croissantes. Voir le §5 pour d'autres exemples.

Le résultat suivant propose des bornes sur la prime en excédent de perte associée à $\Psi(\mathbf{X})$ sous les conditions (4) et (7).

Proposition 2. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire de marges continues $F_1, \dots, F_n$ et de copule C . Soient aussi $\mathbf{X}_{\min}^- = (X_{1,\min}^-, \dots, X_{n,\min}^-)$ et $\mathbf{X}_{\max}^+ = (X_{1,\max}^+, \dots, X_{n,\max}^+)$ des vecteurs aléatoires de copule C^- et C^+ ayant respectivement pour marges $F_{1,\min}, \dots, F_{n,\min}$ et $F_{1,\max}, \dots, F_{n,\max}$. On suppose que les relations (4) et (7) sont vérifiées et que les copules C^- et C^+ sont invariantes par permutation de leurs arguments et séquentiellement conditionnellement croissantes. Si l'application $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante et directionnellement convexe, alors

$$\Psi(\mathbf{X}_{\min}^-) \prec_{\text{ccx}} \Psi(\mathbf{X}) \prec_{\text{ccx}} \Psi(\mathbf{X}_{\max}^+), \quad (8)$$

de sorte que pour tout réel $d \in [0, \infty)$, on a

$$\pi(\Psi(\mathbf{X}_{\min}^-), d) \leq \pi(\Psi(\mathbf{X}), d) \leq \pi(\Psi(\mathbf{X}_{\max}^+), d). \quad (9)$$

Démonstration. Soient $\mathbf{X}^-$ et $\mathbf{X}^+$ les deux vecteurs introduits dans la proposition 1, dont les conditions sont respectées. Puisque $\mathbf{X}^-$ et $\mathbf{X}_{\min}^-$ sont de même copule C^- séquentiellement conditionnellement croissante et de marges ordonnées selon la condition (7), une application du théorème 4.5 de Müller et Scarsini [24] permet de déduire que $\Psi(\mathbf{X}_{\min}^-) \prec_{\text{ccx}} \Psi(\mathbf{X}^-)$. En raisonnant de la même manière sur $\mathbf{X}^+$ et $\mathbf{X}_{\max}^+$, on trouve aussi que $\Psi(\mathbf{X}^+) \prec_{\text{ccx}} \Psi(\mathbf{X}_{\max}^+)$. L'énoncé (8) découle de ces observations et de la chaîne de relations (5). La croissance et la convexité de l'application $x \mapsto \max(0, x - d)$ conduisent alors aux bornes sur la prime en excédent de perte données en (9). $\square$

Tel qu'illustré dans les paragraphes subséquents, un net avantage de cette approche est qu'elle permet d'exploiter des résultats connus quant au choix, pour chaque entier $i \in \{1, \dots, n\}$, de bornes sur la prime en excédent de perte $F_{i,\min}$ et $F_{i,\max}$ correspondant à la marge F_i . Bien entendu, la proposition 2 peut également être adaptée à d'autres mesures de risque, disons π^* , dès lors que l'implication $S \prec_{\text{ccx}} T \Rightarrow \pi^*(S) \leq \pi^*(T)$ est valide. La valeur à risque caudale fournit un exemple parmi tant d'autres.

3. Aléas bornés d'espérances connues. Supposons que pour chaque entier $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe des constantes connues μ_i et b_i telles que $E(X_i) = \mu_i$ et $X_i \in [0, b_i]$ presque sûrement. Cette situation correspond à la pratique actuarielle, puisqu'une limite de couverture est souvent prévue dans les polices d'assurance et les traités de réassurance. Par commodité, on peut supposer sans perte de généralité que

$$\frac{\mu_1}{b_1} \geq \dots \geq \frac{\mu_n}{b_n} \geq \frac{\mu_{n+1}}{b_{n+1}} = 0.$$

Des résultats bien connus, exposés entre autres par De Vylder [7], entraînent alors que pour chaque entier $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $F_i \prec_{\text{cx}} F_{i,\max}$ avec

$$F_{i,\max}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0), \\ 1 - \mu_i/b_i & \text{si } x \in [0, b_i), \\ 1 & \text{si } x \in [b_i, \infty). \end{cases} \quad (10)$$

Lorsque $\Psi(\mathbf{X}) = X_1 + \dots + X_n$, on déduit donc de la proposition 2 que

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \prec_{\text{cx}} \sum_{i=1}^n F_{i,\max}^{-1}(U) = X_{\max}, \quad (11)$$

où U représente un aléa équidistribué sur $(0, 1)$. La loi de $X_{\max}$ est précisée ci-dessous.

Proposition 3. Soient $b_0^* = 0$, $b_{n+1}^* = \infty$ et $b_i^* = b_1 + \dots + b_i$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$. La fonction de répartition de la variable $X_{\max}$ définie en (11) s'exprime alors comme suit pour tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{\max}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(1 - \frac{\mu_i}{b_i}\right) 1_{[b_{i-1}^*, b_i^*)}(x). \quad (12)$$

Démonstration. Pour arriver à (12), on se sert du fait que pour tout réel $x \in [0, \infty)$, on a

$$\begin{aligned} F_{\max}(x) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n F_{i,\max}^{-1}(U) \leq x\right) \\ &= 1 - \frac{\mu_1}{b_1} + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\left(b_i^* \leq x \mid \frac{\mu_{i+1}}{b_{i+1}} \leq 1 - U \leq \frac{\mu_i}{b_i}\right) \\ &\quad \times \mathbb{P}\left(\frac{\mu_{i+1}}{b_{i+1}} \leq 1 - U \leq \frac{\mu_i}{b_i}\right). \end{aligned}$$

Puisque U est équidistribuée sur $(0, 1)$, cette expression peut encore s'écrire

$$F_{\max}(x) = 1 - \frac{\mu_1}{b_1} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mu_i}{b_i} - \frac{\mu_{i+1}}{b_{i+1}}\right) 1_{[b_i^*, \infty)}(x),$$

ce qui n'est rien d'autre que (12). $\square$

Comme on le montre ci-dessous, le calcul de la prime en excédent de perte correspondant à $X_{\max}$ est relativement simple. En vertu de la proposition 2, cette prime en excédent de perte majore celle de toute somme $X = X_1 + \dots + X_n$ d'aléas telle que $X_i \in [0, b_i]$ et est d'espérance $E(X_i) = \mu_i$ connue pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$.

Proposition 4. La prime en excédent de perte $\pi(X_{\max}, d)$ associée à la variable $X_{\max}$ définie en (11) est de la forme

$$\pi(X_{\max}, d) = \left(\mu_n^* - \mu_{i+1}^* + \frac{\mu_{i+1}}{b_{i+1}} (b_{i+1}^* - d)\right) 1_{[b_i^*, b_{i+1}^*)}(d) \quad (13)$$

pour tout entier $i \in \{0, \dots, n-1\}$, où $b_0^*, \dots, b_{n+1}^*$ ont le même sens qu'à la proposition 3 et $\mu_i^* = \mu_1 + \dots + \mu_i$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$.

Démonstration. Pour se convaincre de (13), on commence par observer que pour tout réel $d \in [b_i^*, b_{i+1}^*)$, on a

$$\pi(X_{\max}, d) = E\{\max(0, X_{\max} - d)\} = \sum_{j=i+1}^n (b_j^* - d) \left(\frac{\mu_j}{b_j} - \frac{\mu_{j+1}}{b_{j+1}}\right).$$

Un calcul élémentaire permet de réexprimer cette formule comme suit :

$$\begin{aligned}\pi(X_{\max}, d) &= \frac{\mu_{i+1}}{b_{i+1}} b_{i+1}^* + \sum_{j=i+2}^n \frac{\mu_j}{b_j} (b_j^* - b_{j-1}^*) - \frac{\mu_{i+1}}{b_{i+1}} d \\ &= \frac{\mu_{i+1}}{b_{i+1}} (b_{i+1}^* - d) + \mu_n^* - \mu_{i+1}^*.\end{aligned}$$

□

4. Aléas non-bornés à deux moments connus. Soient $X_1, \dots, X_n$ des aléas positifs et non-bornés tels que l'espérance $E(X_i) = \mu_i$ et la variance $\text{var}(X_i) = \sigma_i^2$ soient connues pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$. On admet en outre sans perte de généralité que

$$a_0 = 0 \leq a_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \mu_1^2} \leq \dots \leq a_n = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \mu_n^2} \leq a_{n+1} = 1.$$

D'après un résultat de Jansen et coll. [19], on sait que pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, $F_i \prec_{\text{cx}} F_{i,\max}$ avec

$$F_{i,\max}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0), \\ \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \mu_i^2} & \text{si } x \in \left[0, \frac{\mu_i^2 + \sigma_i^2}{2\mu_i}\right), \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x - \mu_i}{\sqrt{(x - \mu_i)^2 + \sigma_i^2}} & \text{si } x \in \left[\frac{\mu_i^2 + \sigma_i^2}{2\mu_i}, \infty\right). \end{cases} \quad (14)$$

Lorsque $X = \Psi(\mathbf{X}) = X_1 + \dots + X_n$, un majorant de la prime $\pi(X, d)$ en excédent de perte est donc donné par $\pi(X_{\max}, d)$, où $X_{\max} = F_{1,\max}^{-1}(U) + \dots + F_{n,\max}^{-1}(U)$ et U dénote un aléa équidistribué sur $(0, 1)$. La loi de $X_{\max}$ est explicitée ci-dessous.

Proposition 5. La fonction de répartition de l'aléa $X_{\max}$ défini en (14) est donnée par

$$F_{\max}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0), \\ \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \mu_i^2} & \text{si } x \in [b_{i-1,i}, b_{i,i}), \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x - \mu_i^*}{\sqrt{(x - \mu_i^*)^2 + \sigma_i^{*2}}} & \text{si } x \in [b_{i,i}, b_{i,i+1}), \end{cases}$$

où $b_{0,1} = 0$, $b_{n,n+1} = \infty$ et pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mu_i^* = \sum_{j=1}^i \mu_j, \quad \sigma_i^* = \sum_{j=1}^i \sigma_j, \quad b_{i,j} = \mu_i^* + \frac{\sigma_i^*}{2\sigma_j\mu_j} (\sigma_j^2 - \mu_j^2).$$

Démonstration. En exploitant les relations (11) et (14), on obtient d'abord

$$\begin{aligned} F_{\max}(x) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{P} \left(\sum_{j=1}^n F_{j,\max}^{-1}(U) \leq x \cap a_i \leq U \leq a_{i+1} \right) \\ &= a_1 + \sum_{i=1}^n \mathbf{P} \left\{ \sum_{j=1}^i \left(\mu_j + \sigma_j \frac{2U-1}{\sqrt{1-(2U-1)^2}} \right) \leq x \right. \\ &\quad \left. \cap a_i \leq U \leq a_{i+1} \right\}. \end{aligned}$$

Cette expression peut ensuite être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} F_{\max}(x) &= a_1 + \sum_{i=1}^n \mathbf{P} \left(\mu_i^* + \sigma_i^* \frac{2U-1}{\sqrt{1-(2U-1)^2}} \leq x \cap a_i \leq U \leq a_{i+1} \right) \\ &= a_1 + \sum_{i=1}^n \mathbf{P} \left(U \leq F_{\max,i}^*(x) \cap a_i \leq U \leq a_{i+1} \right), \end{aligned}$$

où

$$F_{i,\max}^*(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x - \mu_i^*}{\sqrt{(x - \mu_i^*)^2 + \sigma_i^{*2}}}.$$

Si on pose $b_{i,j} = F_{i,\max}^{*-1}(a_j)$, on voit alors que

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(U \leq F_{i,\max}^*(x) \cap a_i \leq U \leq a_{i+1} \right) &= \{F_{i,\max}^*(x) - a_i\} I_{(b_{i,i} \leq x \leq b_{i,i+1})} \\ &\quad + (a_{i+1} - a_i) I_{(x > b_{i,i+1})}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

La proposition suivante donne une expression algébrique pour la prime en excédent de perte correspondant à $X_{\max}$. Ce résultat est d'intérêt dans la mesure où la proposition 2 garantit qu'elle majore la prime en excédent de perte de toute somme $X = X_1 + \dots + X_n$ d'aléas telle que l'espérance $E(X_i) = \mu_i$ et la variance $\text{var}(X_i) = \sigma_i^2$ de chacun des termes soit connue pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$.

Proposition 6. *La prime en excédent de perte associée à la variable $X_{\max}$ définie en (14) est donnée par*

$$\pi(X_{\max}, d) = \begin{cases} \frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2 + \mu_i^2} (b_{i,i} - d) + \mu_n^* - \mu_i^* + \frac{\sigma_i^* \mu_i}{2\sigma_i} & \text{si } d \in [b_{i-1,i}, b_{i,i}], \\ \pi_i^*(d) + \mu_n^* - \mu_i^* & \text{si } d \in [b_{i,i}, b_{i,i+1}], \end{cases}$$

où pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\pi_i^*(d) = \frac{\mu_i^* - d}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(d - \mu_i^*)^2 + \sigma_i^{*2}}.$$

Démonstration. On commence par noter que si $d \in [b_{i-1,i}, b_{i,i}]$, alors

$$\begin{aligned}\pi(X_{\max}, d) &= \int_d^\infty \{1 - F_{\max}(x)\} dx \\ &= \int_d^{b_{i,i}} \frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2 + \mu_i^2} dx + \sum_{j=i}^n \int_{b_{j,j}}^{b_{j,j+1}} \{1 - F_{\max}(x)\} dx \\ &\quad + \sum_{j=i}^{n-1} \int_{b_{j,j+1}}^{b_{j+1,j+1}} \{1 - F_{\max}(x)\} dx.\end{aligned}$$

Cette expression peut être réarrangée comme suit :

$$\begin{aligned}\pi(X_{\max}, d) &= \frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2 + \mu_i^2} (b_{i,i} - d) + \sum_{j=i}^{n-1} \frac{\mu_{j+1}^2}{\sigma_{j+1}^2 + \mu_{j+1}^2} (b_{j+1,j+1} - b_{j,j+1}) \\ &\quad + \sum_{j=i}^n \{\pi_j^*(b_{j,j}) - \pi_j^*(b_{j,j+1})\}.\end{aligned}$$

Des manipulations élémentaires permettent alors d'affirmer que

$$\pi_j^*(b_{j,j}) = \frac{\sigma_j^* \mu_j}{2\sigma_j} \quad \text{et} \quad \pi_j^*(b_{j,j+1}) = \frac{\sigma_j^* \mu_{j+1}}{2\sigma_{j+1}}.$$

Il découle que

$$\begin{aligned}\sum_{j=i}^n \{\pi_j^*(b_{j,j}) - \pi_j^*(b_{j,j+1})\} &= \sum_{j=i+1}^n \frac{\mu_j}{2\sigma_j} (\sigma_j^* - \sigma_{j-1}^*) + \frac{\sigma_i^* \mu_i}{2\sigma_i} \\ &= \frac{\mu_n^* - \mu_i^*}{2} + \frac{\sigma_i^* \mu_i}{2\sigma_i}\end{aligned}$$

et

$$\sum_{j=i}^{n-1} \frac{\mu_{j+1}^2}{\sigma_{j+1}^2 + \mu_{j+1}^2} (b_{j+1,j+1} - b_{j,j+1}) = \frac{\mu_n^* - \mu_i^*}{2},$$

ce qui entraîne que

$$\pi(X_{\max}, d) = \frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2 + \mu_i^2} (b_{i,i} - d) + \mu_n^* - \mu_i^* + \frac{\sigma_i^* \mu_i}{2\sigma_i}.$$

En procédant comme précédemment, on se convainc aussi que pour tout réel $d \in [b_{i,i}, b_{i,i+1}]$, on a

$$\begin{aligned}\pi(X_{\max}, d) &= \pi_i^*(d) - \pi_i^*(b_{i,i}) + \pi(X_{\max}, b_{i,i}) \\ &= \pi_i^*(d) - \frac{\sigma_i^* \mu_i}{2\sigma_i} + \mu_n^* - \mu_i^* + \frac{\sigma_i^* \mu_i}{2\sigma_i} \\ &= \pi_i^*(d) + \mu_n^* - \mu_i^*.\end{aligned}$$

□

Remarque 4. Dans le cas $n = 2$, les formules énoncées dans les propositions 5 et 6 se réduisent à celles déjà annoncées par Genest et coll. [16].

5. Aléas bornés d'espérances connues liés par une copule archimédienne. Admettons que l'on connaisse $E(X_i) = \mu_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et que la copule C du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ définie implicitement par la relation (3) s'exprime sous la forme

$$C_\phi(u_1, \dots, u_n) = \phi^{-1} \{ \phi(u_1) + \dots + \phi(u_n) \}$$

en fonction d'une application $\phi : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ satisfaisant la condition $\phi(1) = 0$ et dont la réciproque ϕ^{-1} est telle que pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \phi^{-1}(t) > 0. \quad (15)$$

Ces copules, dites archimédiennes, jouissent d'intéressantes propriétés rapportées entre autres par Genest et MacKay [15] et dans le §4 de l'ouvrage de Nelsen [25]. Elles sont fréquemment employées pour modéliser la dépendance, en partie à cause de leur interprétation en terme de mélange dans le cas particulier où la condition (15) vaut pour tout entier $n \geq 2$. Le cas échéant, ϕ^{-1} est une transformée de Laplace et la dépendance qu'elle induit est positive ; consulter par exemple Marshall et Olkin [22]. Pour des exemples typiques de modélisation archimédienne dans des contextes actuariels et financiers, se référer entre autres à Frees et Valdez [14], Klugman et Parsa [20], Carrière [3], Belguise et Lévi [2], Cherubini et Luciano [4] ou Hennessy et Lapan [17].

Dans le présent contexte, la propriété clef des copules archimédiennes est que C_ϕ est symétrique et séquentiellement conditionnellement croissante dès lors que l'application $t \mapsto (-1)^n d^n \phi^{-1}(t)/dt^n$ est logarithmiquement convexe. On déduit alors aisément du théorème 4.5 de Müller et Scarsini [24] que

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \prec_{\text{cx}} \sum_{i=1}^n X_{i,\max} = X_{\max}, \quad (16)$$

pour tout vecteur $(X_{1,\max}, \dots, X_{n,\max})$ de copule C_ϕ et de marges $F_{1,\max}, \dots, F_{n,\max}$ telles que $F_i \prec_{\text{cx}} F_{i,\max}$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$.

Il arrive que la loi de $(X_{1,\max}, \dots, X_{n,\max})$ et la borne sur $\pi(X, d)$ qui en découle se calculent explicitement. À titre d'illustration, supposons comme au §3 que pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, on sache que $X_i \in [0, b_i]$ et $E(X_i) = \mu_i$. Le choix approprié de $F_{i,\max}$ est alors donné par (10). Supposons en outre que les variables $X_{i,\max}$ soient liées par une copule archimédienne C_ϕ et que ϕ^{-1} soit une transformée de Laplace, d'où $(-1)^n d^n \phi^{-1}(t)/dt^n$ est logarithmiquement convexe pour tout entier $n \geq 2$. D'après Marshall et Olkin [22], il existe alors une variable latente Θ telle que sachant $\Theta = \theta$, les aléas $X_{1,\max}, \dots, X_{n,\max}$ sont mutuellement indépendants et pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$F_{\theta,i,\max}(x) = P(X_{i,\max} \leq x | \Theta = \theta) = \exp[-\theta \phi\{F_{i,\max}(x)\}], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Proposition 7. *La prime en excédent de perte liée à l'aléa $X_{\max}$ défini en (16) est*

$$\pi(X_{\max}, d) = \sum_{\ell=0}^n \sum_{A \in \mathcal{J}_\ell} s(A) \max \left(0, -d + \sum_{i \notin A} b_i \right),$$

où $\mathcal{J}_\ell = \mathcal{J}_\ell(\emptyset)$ et où, de façon plus générale, $\mathcal{J}_\ell(B)$ dénote l'ensemble des parties de taille ℓ de $\{1, \dots, n\} \setminus B$. Ainsi $s(A)$ est défini pour toute partie A de taille ℓ par

$$\sum_{j=0}^{n-\ell} (-1)^j \sum_{B \in \mathcal{J}_j(A)} \phi^{-1} \left\{ \sum_{i \in A} \phi \left(1 - \frac{\mu_i}{b_i} \right) + \sum_{k \in B} \phi \left(1 - \frac{\mu_k}{b_k} \right) \right\}. \quad (17)$$

Démonstration. Pour toute valeur θ fixée, soient $X_{\theta,1,\max}, \dots, X_{\theta,n,\max}$ des aléas mutuellement indépendants tels que pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_{\theta,i,\max}$ ait pour loi $F_{\theta,i,\max}$. Alors

$$\pi(X_{\max}, d) = E_{\Theta} \{ \pi(X_{\theta,\max}, d) \},$$

où $X_{\theta,\max} = X_{\theta,1,\max} + \dots + X_{\theta,n,\max}$. En exploitant le fait que $X_{\theta,i,\max}$ ne prend que les valeurs 0 et b_i , on peut alors écrire

$$\pi(X_{\theta,\max}, d) = \sum_{\ell=0}^n \sum_{A \in \mathcal{J}_\ell} s_\theta(A) \max \left(0, -d + \sum_{i \notin A} b_i \right),$$

où $s_\theta(A) = \prod_{i \in A} p_{\theta,i} \prod_{i \notin A} (1 - p_{\theta,i})$ et $p_{\theta,i} = \exp\{-\theta \phi(1 - \mu_i/b_i)\}$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$. On observe ensuite que

$$\prod_{i \notin A} (1 - p_{\theta,i}) = \sum_{j=0}^{n-\ell} (-1)^j \sum_{B \in \mathcal{J}_j(A)} \prod_{k \in B} p_{\theta,k},$$

de sorte que

$$s_\theta(A) = \sum_{j=0}^{n-\ell} (-1)^j \sum_{B \in \mathcal{J}_j(A)} \prod_{i \in A} p_{\theta,i} \prod_{k \in B} p_{\theta,k}.$$

Après substitution, on trouve

$$\sum_{j=0}^{n-\ell} (-1)^j \sum_{B \in \mathcal{J}_j(A)} \exp \left\{ -\theta \sum_{i \in A} \phi \left(1 - \frac{\mu_i}{b_i} \right) - \theta \sum_{k \in B} \phi \left(1 - \frac{\mu_k}{b_k} \right) \right\}.$$

Puisque $E_{\Theta} \{s_\theta(A)\}$ et (17) coïncident, la démonstration est achevée. $\square$

6. Minorants sur la prime en excédent de perte. Bien que les applications présentées jusqu'ici concernent la recherche de majorants sur la prime en excédent de perte, les résultats décrits au §2 servent aussi au calcul de minorants. Pour illustrer ce point, considérons un vecteur $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ dont la copule C domine l'indépendance $\Pi(u_1, \dots, u_n) = u_1 \cdots u_n$ dans le préordre supermodulaire. Au vu du théorème 1 de Christofides et Vaggelatou [5], ceci se produit entre autres lorsque les aléas X_i sont associés au sens de Esary et coll. [13].

Supposons en outre, à titre d'exemple, que l'on dispose de l'information suivante pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$X_i \in [0, b_i], \quad E(X_i) = \mu_i, \quad \text{var}(X_i) = \sigma_i^2.$$

Alors

$$X_{\min} = \sum_{i=1}^n X_{i,\min} \prec_{\text{cx}} \sum_{i=1}^n X_i = X,$$

où les variables $X_{1,\min}, \dots, X_{n,\min}$ sont mutuellement indépendantes et telles que l'on ait $X_{i,\min} \prec_{\text{ccx}} X_i$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$. D'après De Vylder et Goovaerts [8], la borne la plus stricte pour la loi marginale pour $X_{i,\min}$ est donnée par

$$F_{i,\min}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \mu_i - \frac{\sigma_i^2}{b_i - \mu_i}\right), \\ 1 - \frac{\mu_i}{b_i} & \text{si } x \in \left[\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{b_i - \mu_i}, \frac{\mu_i^2 + \sigma_i^2}{\mu_i}\right), \\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{\mu_i^2 + \sigma_i^2}{\mu_i}, \infty\right). \end{cases}$$

Il suit de la proposition 2 que $\pi(X, d) \geq \pi(X_{\min}, d)$. La forme explicite de ce mino-
rant est donnée ci-dessous.

Proposition 8. *La prime en excédent de perte $\pi(X_{\min}, d)$ associée à l'aléa $X_{\min}$ défini en (11) est de la forme*

$$\sum_{\ell=0}^n \sum_{A \in \mathcal{J}_\ell} s(A) \max \left\{ 0, \sum_{i \in A} \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{b_i - \mu_i} \right) + \sum_{i \notin A} \left(\frac{\mu_i^2 + \sigma_i^2}{\mu_i} \right) - d \right\}. \quad (18)$$

Dans cette expression, $\mathcal{J}_\ell$ revêt le même sens qu'au §5 et

$$s(A) = \prod_{i \in A} \left(1 - \frac{\mu_i}{b_i} \right) \prod_{i \notin A} \frac{\mu_i}{b_i}.$$

Démonstration. Elle se fait en conditionnant sur les deux valeurs possibles de chacune des variables $X_{i,\min}$, à savoir $\mu_i - \sigma_i^2/(b_i - \mu_i)$ et $(\mu_i^2 + \sigma_i^2)/\mu_i$, dont les probabilités respectives sont $1 - \mu_i/b_i$ et μ_i/b_i pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$. $\square$

Comme deuxième (et dernier) exemple, supposons que les vecteurs $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}_{\min}$ soient de même copule archimédienne C_ϕ . Si ϕ^{-1} est une transformée de Laplace, le théorème 4.5 de Müller et Scarsini [24] entraîne alors que

$$X_{\min} = \sum_{i=1}^n X_{i,\min} \prec_{\text{cx}} \sum_{i=1}^n X_i = X.$$

En procédant comme au §5, on vérifie sans difficulté que le minorant sur la prime en excédent de perte $\pi(X_{\min}, d)$ est de la forme (18) avec $s(A)$ donné par (17).

7. Conclusion. On a montré comment il est possible de trouver des bornes sur la prime en excédent de perte de toute fonction croissante et directionnellement convexe $\Psi(\mathbf{X})$ d'un vecteur $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ d'aléas positifs en présence d'information partielle sur sa structure de dépendance et sur ses marges. Quelques illustrations ont été fournies dans le cas particulier où $\Psi(\mathbf{X}) = X_1 + \dots + X_n$.

D'autres variations sur le même thème sont possibles. Dans la recherche de minorants sur la prime en excédent de perte de $\Psi(\mathbf{X}) = X_1 + \dots + X_n$ par exemple, des conditions plus faibles que l'association entre $X_1, \dots, X_n$ peuvent être invoquées pour déduire que

$$\sum_{i=1}^n X_i^\perp \preceq_{\text{cx}} \sum_{i=1}^n X_i,$$

où les variables $X_1^\perp, \dots, X_n^\perp$ sont mutuellement indépendantes et pour chaque entier $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i^\perp$ est de même loi que X_i . Une telle condition appelée dépendance positive cumulée a été identifiée par Denuit et coll. [6]. Elle est vérifiée lorsque X_j et

$S_{\mathcal{J}} = \sum_{i \in \mathcal{J}} X_i$ sont en dépendance positive par quadrant pour tous les choix possibles de $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, n\}$ et de $j \notin \mathcal{J}$.

Comme Denuit et coll. [6] l'ont montré, la dépendance positive cumulée est une forme de dépendance qui étend à toute dimension supérieure la notion bivariée classique de dépendance positive par quadrant tout en préservant son sens : si un vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ est en dépendance positive cumulée, les chances que $S_{\mathcal{J}}$ et X_j prennent simultanément de grandes valeurs sont plus élevées que si les aléas $X_1, \dots, X_n$ étaient mutuellement indépendants. En particulier, l'inégalité

$$P\left(\sum_{i \neq j} X_i > d \mid X_j > t\right) \geq P\left(\sum_{i \neq j} X_i > d\right)$$

est alors valable pour tout entier $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $P(X_j > t) > 0$. Il s'ensuit que

$$E\left\{\max\left(0, \sum_{i \neq j} X_i - d\right) \mid X_j > t\right\} \geq E\left\{\max\left(0, \sum_{i \neq j} X_i - d\right)\right\}.$$

Bref, le fait de savoir qu'une certaine composante X_j dépasse un seuil t accroît les chances que la somme des $n - 1$ autres termes soit grande, tout comme l'espérance en excédent d'une franchise d .

En conclusion, soulignons que l'approche présentée ici pour le calcul de bornes sur la prime en excédent de perte d'une fonction $\Psi(\mathbf{X})$ d'aléas positifs $X_1, \dots, X_n$ trouve des applications aussi bien en finance qu'en actuariat, notamment pour l'évaluation de certains types d'options qui dépendent non seulement du prix d'un actif, mais aussi de sa valeur passée. Ce serait le cas entre autres pour une option d'achat pouvant être exercée à la valeur moyenne d'un certain actif au cours du dernier mois. Si X_i dénote la valeur de ce titre au temps t_i , le rendement de l'option est alors égal à

$$\max\left(0, -K + \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\right), \quad (19)$$

où K est le prix de l'option et α_i est la pondération associée au temps t_i pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$. On peut aussi songer à une option sur un indice boursier. Si celui-ci dépend d'actifs $X_1, \dots, X_n$ dans lesquels des proportions $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ d'un capital ont été investies, son rendement est alors de la forme (19).

Remerciements. Ces travaux ont été soutenus financièrement par le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada, le Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies, l'Institut de finance mathématique de Montréal, ainsi que la Communauté française de Belgique (Projet ARC 04/09–320).

English extended abstract. A general strategy is proposed for deriving upper and lower stop-loss bounds on directionally convex, increasing functions of a vector $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ of non-negative random variables when partial information is available concerning its copula C or its margins $F_1, \dots, F_n$.

Given a mapping $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, Theorem 4.5 of Müller and Scarsini [24] is used in §2 to derive the following result, which provides bounds on the stop-loss premium of $X = \Psi(\mathbf{X})$, defined as $\pi(X, d) = E\{\max(0, X - d)\}$ for all $d \in [0, \infty)$. The conditions involve the notions of directional convexity (Definition 1) and conditional increasingness in sequence (Definition 4), as well as three stochastic orderings recalled in Definitions 2

and 3, i.e., the supermodular, convex and convex-increasing orderings denoted $\prec_{\text{sm}}$, $\prec_{\text{cx}}$ and $\prec_{\text{ccx}}$, respectively.

Proposition 2. *Let $\mathbf{X}$ be a random vector with continuous marginal distributions $F_1, \dots, F_n$ and copula C . Let also $\mathbf{X}_{\min}^- = (X_{1,\min}^-, \dots, X_{n,\min}^-)$ and $\mathbf{X}_{\max}^+ = (X_{1,\max}^+, \dots, X_{n,\max}^+)$ be random vectors with copulas C^- and C^+ and margins $F_{1,\min}, \dots, F_{n,\min}$ and $F_{1,\max}, \dots, F_{n,\max}$, respectively. Assume that $C^- \prec_{\text{sm}} C \prec_{\text{sm}} C^+$ and $F_{i,\min} \prec_{\text{cx}} F_i \prec_{\text{cx}} F_{i,\max}$ hold for every integer $i \in \{1, \dots, n\}$. Further assume that copulas C^- and C^+ are invariant by permutation of their arguments and conditionally increasing in sequence. If the mapping $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is increasing and directionally convex, then*

$$\Psi(\mathbf{X}_{\min}^-) \prec_{\text{ccx}} \Psi(\mathbf{X}) \prec_{\text{ccx}} \Psi(\mathbf{X}_{\max}^+),$$

and thus for every real $d \in [0, \infty)$, one has

$$\pi(\Psi(\mathbf{X}_{\min}^-), d) \leq \pi(\Psi(\mathbf{X}), d) \leq \pi(\Psi(\mathbf{X}_{\max}^+), d).$$

The rest of the paper presents various applications of Proposition 2 in the special case where $\Psi(\mathbf{X}) = X_1 + \dots + X_n$, which is of greatest relevance to actuarial practice.

In §3, it is assumed that for every integer $i \in \{1, \dots, n\}$, there exist known constants μ_i and b_i such that $E(X_i) = \mu_i$ and $X_i \in [0, b_i]$ almost surely. Without loss of generality, it may be assumed that $\mu_1/b_1 \geq \dots \geq \mu_n/b_n \geq \mu_{n+1}/b_{n+1} = 0$. Proposition 2 then implies the existence of a uniform random variable U on the interval $(0, 1)$ such that

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \prec_{\text{cx}} \sum_{i=1}^n F_{i,\max}^{-1}(U) = X_{\max},$$

where for each integer $i \in \{1, \dots, n\}$, $F_{i,\max}(x) = 1 - \mu_i/b_i$ for $x \in [0, b_i]$. The exact distribution of $X_{\max}$ is stated in Proposition 3 and a formula for the corresponding stop-loss premium $\pi(X_{\max}, d)$ appears in Proposition 4. The latter then constitutes an upper bound on the stop-loss premium of X .

Similarly, §4 considers the case where $X_1, \dots, X_n$ are unbounded positive random variables with expected value $E(X_i) = \mu_i$ and variance $\text{var}(X_i) = \sigma_i^2$ assumed known for every integer $i \in \{1, \dots, n\}$. Without loss of generality, it is also assumed that

$$a_0 = 0 \leq a_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \mu_1^2} \leq \dots \leq a_n = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \mu_n^2} \leq a_{n+1} = 1.$$

Under these conditions, the distribution function of a random variable $X_{\max}$ that dominates $X = X_1 + \dots + X_n$ in the convex order is given in Proposition 5. Proposition 6 then provides an expression for $\pi(X_{\max}, d)$, and hence an upper bound on $\pi(X, d)$.

In §5, attention turns to the case where $E(X_i) = \mu_i$ is known for every integer $i \in \{1, \dots, n\}$ and the underlying copula C of the vector $(X_1, \dots, X_n)$ is Archimedean with generator ϕ . The upper stop-loss bound on $X = X_1 + \dots + X_n$ is then as follows.

Proposition 7. *The stop-loss premium associated with the random variable $X_{\max}$ defined in (16) is of the form*

$$\pi(X_{\max}, d) = \sum_{\ell=0}^n \sum_{A \in \mathcal{J}_\ell} s(A) \max \left(0, -d + \sum_{i \notin A} b_i \right),$$

where $\mathcal{J}_\ell = \mathcal{J}_\ell(\emptyset)$ and where in general, $\mathcal{J}_\ell(B)$ denotes the collection of subsets of $\{1, \dots, n\} \setminus B$ that are of size ℓ . Thus $s(A)$ is defined for every subset A of size ℓ by

$$\sum_{j=0}^{n-\ell} (-1)^j \sum_{B \in \mathcal{J}_j(A)} \phi^{-1} \left\{ \sum_{i \in A} \phi \left(1 - \frac{\mu_i}{b_i} \right) + \sum_{k \in B} \phi \left(1 - \frac{\mu_k}{b_k} \right) \right\}.$$

Finally, §6 shows how Proposition 2 can also be used to obtain a lower stop-loss bound on $X = X_1 + \dots + X_n$ when $X_i \in [0, b_i]$, $E(X_i) = \mu_i$ and $\text{var}(X_i) = \sigma_i^2$ for every integer $i \in \{1, \dots, n\}$ while the copula C linking $X_1, \dots, X_n$ is known to dominate the independence copula in the supermodular ordering. In that case, Proposition 8 states that the lower stop-loss bound is of the form

$$\sum_{\ell=0}^n \sum_{A \in \mathcal{J}_\ell} s(A) \max \left\{ 0, \sum_{i \in A} \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{b_i - \mu_i} \right) + \sum_{i \notin A} \left(\frac{\mu_i^2 + \sigma_i^2}{\mu_i} \right) - d \right\}.$$

In this expression, $\mathcal{J}_\ell$ has the same meaning as above and

$$s(A) = \prod_{i \in A} \left(1 - \frac{\mu_i}{b_i} \right) \prod_{i \notin A} \frac{\mu_i}{b_i}.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. N. Bäuerle et A. Müller, *Modelling and comparing dependencies in multivariate risk portfolios*, ASTIN Bull. **28** (1998), 59–76.
2. O. Belguise et C. Lévi, *Tempêtes : Étude des dépendances entre les branches automobile et incendie à l'aide de la théorie des copulas*, Bull. Franc. Actuar. **5** (2001–2002), 135–174.
3. J. Carrière, *Bivariate survival models for coupled lives*, Scand. Actuar. J. (2000), 17–32.
4. U. Cherubini et E. Luciano, *Bivariate option pricing with copulas*, Appl. Math. Finance **9** (2002), 69–85.
5. T. C. Christofides et E. Vaggelatos, *A connection between supermodular ordering and positive/negative association*, J. Multivariate Anal. **88** (2004), 138–151.
6. M. Denuit, J. Dhaene et C. Ribas, *Does positive dependence between individual risks increase stop-loss premiums ?* Insurance Math. Econom. **28** (2001), 305–308.
7. F. E. De Vylder, *Advanced risk theory : a self-contained introduction*, Éditions de l'Université libre de Bruxelles, Bruxelles, 1996.
8. F. E. De Vylder et M. J. Goovaerts, *Upper and lower bounds on stop-loss premiums in case of known expectation and variance of the risk variable*, Schweiz. Aktuarver. Mitt. (1982), 149–164.
9. J. Dhaene et M. Denuit, *The safest dependence structure among risks*, Insurance Math. Econom. **25** (1999), 11–21.
10. J. Dhaene et M. J. Goovaerts, *Dependency of risks and stop-loss order*, ASTIN Bull. **26** (1996), 201–212.
11. J. Dhaene et M. J. Goovaerts, *On the dependency of risks in the individual life model*, Insurance Math. Econom. **19** (1997), 243–253.
12. J. Dhaene, S. Wang, V. Young et M. J. Goovaerts, *Comonotonicity and maximal stop-loss premiums*, Schweiz. Aktuarver. Mitt. (2000), 99–113.
13. J. D. Esary, F. Proschan et D. Walkup, *Association of random variables with applications*, Ann. Math. Statist. **38** (1967), 1466–1474.

14. E. W. Frees et E. A. Valdez, *Understanding relationships using copulas*, N. Am. Actuar. J. **2** (1998), 1–25.
15. C. Genest et R. J. MacKay, *Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données*, Canad. J. Statist. **14** (1986), 145–159.
16. C. Genest, É. Marceau et M. Mesfioui, *Upper stop-loss bounds for sums of possibly dependent risks with given means and variances*, Statist. Probab. Lett. **57** (2002), 33–41.
17. D. A. Hennessy et H. E. Lapan, *The use of Archimedean copulas to model portfolio allocations*, Math. Finance **12** (2002), 143–154.
18. W. Hürlimann, *On best stop-loss bounds for bivariate sums by known marginal means, variances and correlation*, Schweiz. Aktuarver. Mitt. (1998), 111–134.
19. K. Jansen, J. Haezendonck et M. J. Goovaerts, *Upper bounds on stop-loss premiums in case of known moments up to the fourth order*, Insurance Math. Econom. **5** (1986), 315–334.
20. S. A. Klugman et R. Parsa, *Fitting bivariate loss distributions with copulas*, Insurance Math. Econom. **24** (1999), 139–148.
21. E. L. Lehmann, *Some concepts of dependence*, Ann. Math. Statist. **37** (1966), 1137–1153.
22. A. W. Marshall et I. Olkin, *Families of multivariate distributions*, J. Amer. Statist. Assoc. **83** (1988), 834–841.
23. A. Müller, *Stop-loss order for portfolios of dependent risks*, Insurance Math. Econom. **21** (1997), 219–223.
24. A. Müller et M. Scarsini, *Stochastic comparison of random vectors with a common copula*, Math. Oper. Res. **26** (2001), 723–740.
25. R. B. Nelsen, *An introduction to copulas*, Springer, New-York, 1999.
26. M. Shaked et J. G. Shanthikumar, *Stochastic orders and their applications*, Academic Press, New-York, 1994.

M. DENUIT

INSTITUT DE STATISTIQUE ET
INSTITUT DES SCIENCES ACTUARIELLES
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
VOIE DU ROMAN PAYS, 20
1348 LOUVAIN-LA-NEUVE
BELGIQUE
denuit@stat.ucl.ac.be

C. GENEST

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC (QUÉBEC)
CANADA G1K 7P4
Christian.Genest@mat.ulaval.ca

M. MESFIOUI

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES
CASIER POSTAL 500
TROIS-RIVIÈRES (QUÉBEC)
CANADA G9A 5H7
Mhamed.Mesfioui@uqtr.ca