

COHOMOLOGIES CONTINUES POUR LES ACTIONS PROPRES

ABDELHAK ABOUQATEB ET MOULAY-TAHAR BENAMEUR

RÉSUMÉ. Dans le cas de l'action propre et régulière d'un groupe de Lie connexe G sur une variété différentiable M , nous explicitons un isomorphisme entre les courants basiques et la cohomologie de Hochschild continue de l'algèbre des fonctions différentiables G -invariantes sur M dont le support est le saturé d'un compact. Ceci nous permet de calculer la cohomologie cyclique périodique en généralisant un célèbre théorème de Connes. Enfin nous montrons la cohérence de notre construction avec la construction usuelle en géométrie non commutative, obtenue à l'aide de l'algèbre produit croisé.

ABSTRACT. For proper regular actions of a connected Lie group G on a smooth manifold M , we state an isomorphism between the space of basic r -currents and the r -th continuous Hochschild cohomology space of the algebra of smooth G -invariant functions with G -compact support. This enables to deduce the cyclic cohomology and the periodic cyclic cohomology and extends a famous theorem due to Connes. Finally, we prove that our construction is compatible with the usual construction in Noncommutative Geometry, obtained using the crossed product algebra

Introduction. Dans l'étude des espaces singuliers en géométrie non commutative, la cohomologie cyclique joue un rôle déterminant et permet de mettre en place des théorèmes d'indice en généralisant l'homologie de de Rham. En effet, un théorème célèbre et maintenant classique dû à A. Connes [19], extension du célèbre isomorphisme de Hochschild-Kostant-Rosenberg, établit une identification entre la cohomologie cyclique (périodique) de l'algèbre des fonctions différentiables sur une variété (compacte) et l'homologie de de Rham de la variété. Ce théorème est important en géométrie non commutative ; il assure une cohérence avec le cadre de la géométrie différentielle usuelle, et permet en plus de faire des calculs homologiques importants pour des algèbres graduées commutatives, voir par exemple [15, 10, 11].

Grâce au théorème de Connes, le rôle de réceptacle pour les invariants topologiques caractéristiques joué par l'homologie de de Rham est maintenant plus globalement pris en charge par la cohomologie cyclique, cf par exemple le livre référence [18]. Pour les feuilletages sur les variétés compactes et les opérateurs elliptiques le long des feuilles par exemple, le théorème de l'indice est une égalité dans le groupe de K -théorie de l'algèbre (non commutative) du feuilletage [20], mais le calcul effectif requiert la

Reçu le 16 avril 2005 et, sous forme définitive, le 9 décembre 2005.

construction de cocycles cycliques géométriques et leur couplage scalaire avec les indices [18, 49, 32, 33, 9]. L'algèbre de Connes des fonctions différentiables à support compact sur le groupoïde d'holonomie, ou plutôt sa C^* -complétion, remplace alors la variété des feuilles qui est singulière pour presque tous les feuilletages. Cette algèbre a permis des avancées spectaculaires mais le calcul de ses invariants K -théoriques est néanmoins difficile et fait partie du large programme de la conjecture de Baum-Connes.

Nous étudions dans ce travail les feuilletages propres sur des variétés non compactes. Ceci peut être compris comme une généralisation de la théorie de l'indice entamée par Atiyah dans [4] et permet de déduire des informations analytiques sur les opérateurs longitudinaux sur des feuilletages de variétés non compactes mais qui sont propres. Ici l'espace quotient reste donc raisonnable, c.-à-d. une orbifold. Dans ce cas, *l'algèbre des fonctions feuilletées* reflète une bonne partie de la structure transverse du feuilletage [35, 36]. Pour simplifier et garder un contact avec les applications indicielles sous-jacentes, nous nous sommes restreint au cas de l'action propre et localement libre d'un groupe de Lie connexe, le feuilletage obtenu sera alors appelé *feuilletage propre*. Des références classiques et importantes concernant les actions propres de groupes de Lie sont [14, 46, 40, 37, 38, 39, 51] et une classe importante d'exemples d'actions propres et localement libres est donnée par les triplets

$$G \subset H \supset \Gamma,$$

où H est un groupe de Lie, G est un sous-groupe de Lie fermé connexe de H , et Γ est un sous-groupe de H , tels que l'action de G sur H/Γ est propre. L'orbifold est dans ce cas l'espace $G \backslash H/\Gamma$ [13, 41, 37, 39, 42, 44, 61]. Les conséquences en théorie de l'indice ne sont cependant pas couvertes par cet article et seront traitées dans une prochaine publication.

Le premier résultat que nous obtenons pour ces feuilletages propres, est un calcul de la cohomologie de Hochschild des feuilletages propres. Ainsi, nous montrons que la cohomologie de Hochschild de l'algèbre des fonctions feuilletées dont le support est le saturé d'un compact est isomorphe à l'homologie basique du feuilletage. De plus, la correspondance de Hochschild-Kostant-Rosenberg est explicite et généralise la flèche de Connes [19] grâce à une fonction cutoff issue du caractère propre du feuilletage.

Le second résultat important de cet article est ensuite la détermination de la cohomologie cyclique et de la cohomologie cyclique périodique. La différentielle de de Rham doit alors être modifiée à l'aide de la forme de courbure moyenne. L'apparition de ce twist s'explique par la cohérence de la cohomologie cyclique avec la dualité. En effet, il faut se souvenir que lorsque la dualité de Poincaré en homologie basique est remplie, par exemple pour les feuilletages riemanniens, elle est matérialisée par un twist de différentielle identique à celui découvert ici [58]. Ainsi la cohomologie cyclique périodique est complètement identifiée dans cet article avec l'homologie basique ainsi twistée. Les propriétés de fonctorialité, d'excision ou d'homotopie de l'homologie cyclique périodique obtenues par Cuntz et Quillen puis par Nistor [22, 50] donnent ainsi des résultats analogues sur l'homologie basique de tels feuilletages propres. Rappelons que de tels résultats sont réputés difficiles en géométrie (commutative) des feuilletages.

Enfin, notre troisième résultat est la comparaison de notre construction avec celle associée en géométrie non commutative au produit croisé. L'algèbre $\mathcal{A}_G$ s'envoie homomorphiquement dans l'algèbre non commutative $C_c^\infty(M) \rtimes G$, obtenue par produit croisé. Grâce aux résultats obtenus dans un cadre plus général dans [9], nous pouvons

exliciter ici une correspondance qui associe à tout courant basique C un cocycle de Hochschild τ_C sur l'algèbre produit croisé. Nous montrons aussi qu'alors le cocycle de Hochschild sur $\mathcal{A}_G$ obtenu par functorialité à partir de τ_C n'est autre que celui donné directement à partir de C par l'isomorphisme (2) (voir page 4).

Le contenu de cet article est plus précisément comme suit. La section 1 est consacrée à des préliminaires sur les courants invariants et les courants basiques. Nous explicitons en particulier, et en raison de leur importance dans la suite, les identifications topologiques, d'un côté entre les courants semi-basiques et les fonctionnelles continues sur les formes semi-basiques [3], et de l'autre entre les courants basiques et les courants transverses invariants par holonomie de Haefliger [30]. Ensuite et toujours dans le cadre de cette première section, nous montrons quelques lemmes techniques sur les actions propres qui sont utilisées dans la description des cocycles de Hochschild associés aux courants basiques. Une liste d'exemples de feuilletages riemanniens et géodésibles, correspondants à nos hypothèses, est alors donnée. La section 2 est consacrée au calcul de la cohomologie de Hochschild (continue) de l'algèbre topologique des fonctions G -invariantes à support G -compact. Cette algèbre est munie d'une topologie naturelle d'espace L.F. qui est de Fréchet lorsque l'espace des orbites M/G est compact. Ensuite dans la section 3, nous déduisons le calcul de la cohomologie cyclique ainsi que de la cohomologie cyclique périodique. Enfin, la section 4 est consacrée à la preuve de la commutativité du diagramme reliant l'homologie basique, la cohomologie cyclique de l'algèbre produit croisée et la cohomologie cyclique de l'algèbre des fonction G -invariantes. Tout au long de cet article, et sauf mention expresse du contraire, les structures considérées seront de classe C^∞ . Par ailleurs, nous désignerons toujours par le mot « cohomologie » une cohomologie continue relativement à la topologie sous-jacente.

1. Courants basiques et actions propres. Dans cette section préliminaire, nous rappelons quelques résultats plus ou moins connus concernant les courants basiques sur un feuilletage donné. Puis nous nous concentrons sur le cas des actions propres et donnons alors quelques constructions utiles. Les résultats de cette section sont utilisés pour le calcul de l'homologie de Hochschild dans la section suivante.

1.1. Courants basiques et homologie de Haefliger. L'objet de ce paragraphe est de comparer les différentes approches connues à l'homologie de Haefliger des feuilletages.

Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée de dimension $n = p + q$, p étant la dimension des feuilles. Dans tout cet article, nous supposons pour simplifier que le feuilletage $\mathcal{F}$ est orienté. On note $\Omega_c^r(M)$ l'espace des r -formes différentielles à support compact dans M muni de la C^∞ -topologie de Schwarz. Il s'agit donc d'un espace L.F. Un élément du dual topologique $C^r(M)$ de $\Omega_c^{n-r}(M)$ est appelé r -courant ou courant de degré r et de dimension $n - r$. L'évaluation d'un r -courant T sur une forme $\omega \in \Omega_c^{n-r}(M)$ sera notée $\langle T, \omega \rangle$. Si X est un champ de vecteurs sur M , le produit intérieur du r -courant T par X est le $(r - 1)$ -courant $i_X T$ défini par

$$\langle i_X T, \omega \rangle = (-1)^r \langle T, i_X \omega \rangle, \quad \forall \omega \in \Omega_c^{n-r+1}(M). \quad (1)$$

Le r -courant T sera dit *semi-basique* si $i_X T = 0$ pour tout champ de vecteurs X tangent au feuilletage. L'espace des r -courants semi-basiques sera noté $C_{sb}^r(M)$. De la même façon, l'espace des formes semi-basiques (c.-à-d. des formes β telles que $i_X \beta = 0$ pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathcal{F}$) sera noté $\Omega_{sb}^*(M)$. Le sous-espace des formes semi-basiques à support compact sera noté $\Omega_{csb}^*(M)$. Lorsque la variété M est orientée,

toute r -forme η définit un r -courant T_η , appelé courant régulier associé à η , donné par

$$\langle T_\eta, \omega \rangle = \int_M \eta \wedge \omega, \quad \forall \omega \in \Omega_c^{n-r}(M).$$

Il est facile de vérifier que le courant T_η est semi-basique si et seulement si la forme η est semi-basique. Ceci permet en fait de plonger $\Omega_{sb}^r(M)$ dans $C_{sb}^r(M)$.

Nous allons maintenant expliciter une dualité entre courants semi-basiques et formes semi-basiques à support compact. Rappelons que le feuilletage $\mathcal{F}$ est orienté. Soit χ une orientation de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire une p -forme sur M qui induit une orientation sur les feuilles [58]. Soit ν le fibré normal à $\mathcal{F}$ qui est un fibré de rang q . Notons d'abord que l'espace des $(q-r)$ -formes semi-basiques à support compact s'identifie à l'espace $C_c^\infty(\bigwedge^{q-r} \nu^*)$ des sections à support compact du fibré $\bigwedge^{q-r} \nu^*$:

$$\Omega_{csb}^{q-r}(M) = C_c^\infty(\bigwedge^{q-r} \nu^*).$$

Considérons le plongement

$$j : C_c^\infty(\bigwedge^{q-r} \nu^*) \hookrightarrow \Omega_c^{n-r}(M) \text{ donnée par } j(\alpha) = \chi \wedge \alpha.$$

Soit $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{n-r}(M)$ le sous-espace de $\Omega_c^{n-r}(M)$ des formes $\mathcal{F}$ -triviales [54], c.-à-d. des $(n-r)$ -formes α à support compact telles que

$$i_{X_1} \cdots i_{X_p} \alpha = 0, \quad \forall X_1, \dots, X_p \in C^\infty(\mathcal{F}).$$

Proposition 1. *On a la décomposition topologique suivante :*

$$\Omega_c^{n-r}(M) = j(C_c^\infty(\bigwedge^{q-r} \nu^*)) \oplus \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{n-r}(M).$$

Démonstration. Il s'agit d'établir que l'application

$$(\alpha, \beta) \mapsto \chi \wedge \alpha + \beta$$

de $C_c^\infty(\bigwedge^{q-r} \nu^*) \oplus \mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{n-r}(M)$ vers $\Omega_c^{n-r}(M)$ est un isomorphisme topologique.

Fixons une métrique riemannienne sur M et identifions alors le fibré normal ν avec le fibré orthogonal au feuilletage pour cette métrique. Pour tout $k, h \in \{0, \dots, p\} \times \{0, \dots, q\}$, on note par $\Omega_c^{k,h}(M, F)$ (resp. $\Omega^{k,h}(M, F)$) l'espace des sections à support compact (resp. l'espace des sections) du fibré $\Lambda^k F^* \otimes \Lambda^h \nu^*$. La métrique fixée sur M induit alors une décomposition topologique :

$$\Omega_c^{n-r} M \simeq \bigoplus_{k+h=n-r} \Omega_c^{k,h}(M, F) \text{ et } \Omega^{n-r} M \simeq \bigoplus_{k+h=n-r} \Omega^{k,h}(M, F). \quad (2)$$

Il est clair que le produit extérieur des formes respecte cette bigraduation. De plus, l'espace $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{n-r}(M)$ correspond dans cette décomposition à

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{n-r}(M) \simeq \bigoplus_{0 \leq k \leq p-1} \Omega^{k, n-r-k}(M, F). \quad (3)$$

D'autre part, la forme caractéristique χ est une forme différentielle de bidegré $(p, 0)$ relativement à cette décomposition. Elle induit donc par cup produit une application continue

$$\chi \wedge : \Omega_c^{0, q-r}(M, F) \longrightarrow \Omega_c^{p, q-r}(M, F),$$

qui n'est autre que la restriction de l'application correspondant à j . Il est clair que cette application est injective. Puisque le feuilletage est orienté, le fibré $\Lambda^p F^*$ est un fibré en droite trivialisé par χ . Ainsi, tout élément de $\Omega_c^{p, q-r}(M, F)$ est l'image par j

d'un élément de $\Omega_c^{0,q-r}(M, F)$. L'application réciproque de $\chi \wedge$ est donc l'application bien définie et continue que nous noterons $\omega \mapsto \omega/\chi$. Les topologies respectives se correspondent suivant cette bijection et on voit donc que l'application j est un homéomorphisme de $\Omega_c^{0,q-r}(M, F)$ sur $\Omega_c^{p,q-r}(M, F)$. On conclut la preuve en utilisant cet homéomorphisme et les homéomorphismes (2) et (3). $\square$

On en déduit alors par transposition le corollaire qui suit :

Corollaire 1. *L'application*

$$j^! : C_{sb}^r(M) \longrightarrow (C_c^\infty(\bigwedge^{q-r} v^*))' \text{ donnée par } \langle j^!(T), \beta \rangle = \langle T, \chi \wedge \beta \rangle,$$

est un isomorphisme entre l'espace des r -courants semi-basiques et le dual topologique des $(q-r)$ -formes semi-basiques à support compact muni de sa topologie usuelle de Schwartz.

On dira qu'un r -courant semi-basique T est basique si dT est aussi semi-basique. L'espace des r -courants basiques sera noté $C_{\mathcal{F}}^r(M)$. Ainsi, $C_{\mathcal{F}}^r(M)$ est l'ensemble des r -courants T qui vérifient

$$i_X T = 0 \text{ et } L_X T = 0, \quad \forall X \in C^\infty(\mathcal{F}).$$

On notera qu'il suffit de se limiter à X champ fondamental lorsque le feuilletage est donné par une action régulière d'un groupe de Lie connexe, on rappelle aussi que l'espace $\Omega_{\mathcal{F}}^r(M)$ des r -formes basiques, est l'espace des formes β sur M qui vérifient

$$i_X \beta = 0 \text{ et } L_X \beta = 0, \quad \forall X \in C^\infty(\mathcal{F}).$$

La différentielle de de Rham induit une différentielle sur les formes basiques ainsi que sur les courants basiques. On obtient ainsi deux complexes différentiels gradués $(\Omega_{\mathcal{F}}^*(M), d)$ et $(C_{\mathcal{F}}^*(M), d)$ dont les cohomologies sont notées $H_{\mathcal{F}}^*(M)$ et $H_*^{\mathcal{F}}(M)$ respectivement. Ce sont respectivement les espaces de cohomologie et d'homologie basiques du feuilletage. Nous avons un plongement naturel du premier complexe dans le second

$$\iota : \Omega_{\mathcal{F}}^*(M) \hookrightarrow C_{\mathcal{F}}^*(M).$$

qui induit un homomorphisme entre la cohomologie basique et l'homologie basique. Lorsque le feuilletage est riemannien complet, Sergiescu a prouvé que la dualité continuait à exister et que ι induit un isomorphisme en cohomologie, voir [57].

Remarque. Il n'y a en général pas de dualité topologique entre courants basiques et formes basiques à support compact. En effet, soit Σ une surface compacte de genre $g \geq 2$, et $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ identifié à $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$. La 3-variété $M = PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ supporte un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1 donné par l'action homogène du groupe des matrices de la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il a été montré dans [3] que $\dim(C_{\mathcal{F}}^1(M)) = 2g$. D'un autre côté, puisque ce feuilletage est à feuilles denses, on a $\dim \Omega_{\mathcal{F}}^k(M) \leq 1$ (voir [47, page 40]).

Nous décrivons maintenant l'identification entre les courants basiques et les courants transverses invariants par holonomie au sens de A. Haefliger [30] qui sera utilisée par la suite, voir aussi [9].

Dans [30], A. Haefliger a introduit le complexe $C^*(M/\mathcal{F})$ des courants transverses invariants par holonomie, généralisant ainsi la notion de mesure transverse invariante [52, 54]. Rappelons brièvement cette construction. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_i$ un recouvrement ouvert localement fini de M distingué pour le feuilletage. Fixons pour chaque i une transversale $T_i \subset U_i$ et posons $T = \bigcup_i T_i$. On peut supposer que les transversales T_i sont deux à deux disjointes. Soit $\mathcal{H}$ le pseudogroupe d'holonomie induit par le feuilletage sur la sous-variété transverse T . L'espace $\Omega_c^{q-r}(M/\mathcal{F})$ des « coinvariants » de l'action induite sur l'espace $\Omega_c^{q-r}(T)$ des formes différentielles à support compact sur T , est par définition l'espace des formes de Haefliger. Il s'agit plus précisément du quotient de $\Omega_c^{q-r}(T)$ par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $\gamma^* \omega - \omega$, où $\gamma \in \mathcal{H}$ et $\omega \in \Omega_c^{q-r}(T)$ est à support contenu dans l'image de γ . L'espace $\Omega_c^{q-r}(M/\mathcal{F})$ est alors muni de la topologie quotient qui est non séparée en général. La différentielle de de Rham sur T induit une différentielle

$$d : \Omega_c^{q-r}(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega_c^{q-r+1}(M/\mathcal{F}).$$

Le dual topologique de $\Omega_c^{q-r}(M/\mathcal{F})$ est l'espace des r -courants transverses invariants sous l'action de $\mathcal{H}$, ou r -courants de Haefliger, il est noté $C^r(M/\mathcal{F})$. La différentielle de de Rham d induit alors par transposition et restriction une différentielle

$$d : C^r(M/\mathcal{F}) \longrightarrow C^{r+1}(M/\mathcal{F}).$$

Les espaces $\Omega_c^{q-r}(M/\mathcal{F})$ et $C^r(M/\mathcal{F})$ ainsi que les différentielles sont clairement indépendants des choix de recouvrements et de transversales. Ainsi les homologies des complexes obtenus sont intrinsèques au feuilletage. On les appelle respectivement la cohomologie et l'homologie de Haefliger et on les note $H^*(M/\mathcal{F})$ et $H_*(M/\mathcal{F})$.

Rappelons que le feuilletage $\mathcal{F}$ est orienté, on peut donc définir, suivant [30], un opérateur d'intégration le long des feuilles à valeurs dans les formes de Haefliger

$$\int_{\mathcal{F}} : \Omega_c^{n-r}(M) \longrightarrow \Omega_c^{q-r}(M/\mathcal{F}),$$

de la manière suivante. On fixe une partition de l'unité ϕ_i subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$. Si $\omega \in \Omega_c^{n-r}(M)$, alors on utilise la submersion $\pi_i : U_i \rightarrow T_i$ pour construire l'intégration $\int_{\pi_i} \phi_i \omega \in \Omega_c^{q-r}(T_i)$ de la forme localisée $\phi_i \omega$, le long des fibres de π_i . On définit ensuite $\int_{\mathcal{F}} \omega$ comme la classe dans $\Omega_c^{q-r}(M/\mathcal{F})$ de la forme $\sum_i \int_{\pi_i} \phi_i \omega$. Le noyau $\text{Ker } \int_{\mathcal{F}}$ est décrit dans [30] et permet d'obtenir le corollaire suivant :

Corollaire 2. [3] *On a un isomorphisme*

$$\left(\int_{\mathcal{F}} \right)^t : C^r(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} C^r_{\mathcal{F}}(M) \quad (4)$$

entre l'espace des courants de Haefliger et l'espace des courants basiques.

A partir de la définition de $\int_{\mathcal{F}}$, on voit facilement que l'intégration le long des feuilles commute aux différentielles et induit une application linéaire

$$\int_{\mathcal{F}} : H_c^{n-r}(M) \longrightarrow H_c^{q-r}(M/\mathcal{F})$$

graduée de degré $-p$, entre la cohomologie de de Rham de M et la cohomologie de Haefliger de $(M, \mathcal{F})$. Rappelons que $H_c^{p,q-r}(M, F)$ est le p -ième espace de cohomologie du complexe longitudinal

$$0 \rightarrow \Omega_c^{0,q-r}(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_c^{1,q-r}(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \dots \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_c^{p,q-r}(M, \mathcal{F}) \rightarrow 0,$$

où $\Omega_c^{k,h}(M, \mathcal{F})$ désigne l'espace des formes de bidegré (k, h) , c.-à-d. des sections à support compact du fibré $\Lambda^k \mathcal{F}^* \otimes \Lambda^h \nu^*$. Notons un lemme utile pour le couplage avec l'homologie de Haefliger [9].

Lemme 1. *L'intégration le long des feuilles induit un isomorphisme entre l'espace $H_c^{p,q-r}(M, F)$ et l'espace $\Omega_c^{q-r}(M/\mathcal{F})$ des formes de Haefliger de degré $q-r$.*

Démonstration. D'après les résultats de [30], l'application $\int_{\mathcal{F}}$ est une application continue, surjective et ouverte. De plus, suivant la décomposition de $\omega \in \Omega_c^{n-r}(M)$ en composantes bihomogènes

$$\omega = \sum_{k+h=n-r} \omega_{k,h}, \quad \omega_{k,h} \in \Omega_c^{k,h}(M, \mathcal{F}),$$

l'application $\int_{\mathcal{F}}$ par définition s'annule sur toutes les composantes $\omega_{k,h}$ telles que $k < p$, de sorte qu'elle ne lit que la composante $\omega_{p,q-r}$ de ω . Par conséquent, en restriction à $\Omega_c^{p,q-r}(M, \mathcal{F})$ l'application $\int_{\mathcal{F}}$ reste une application linéaire, continue, surjective et ouverte.

On sait par ailleurs et toujours grâce aux résultats de [30], que le noyau de $\int_{\mathcal{F}}$ est engendré par les $i_X \alpha$ et les $L_X \beta$ pour X champs de vecteurs longitudinaux. Il est facile de voir que l'intersection de ce noyau avec $\Omega_c^{p,q-r}(M, \mathcal{F})$ n'est autre que l'image par $d_{\mathcal{F}}$ de $\Omega_c^{p-1,q-r}(M, \mathcal{F})$, ce qui termine la preuve. $\square$

1.2. Quelques lemmes sur les actions propres. Une action (à gauche par difféomorphismes) d'un groupe de Lie G sur une variété M est dite propre si, pour tout compact C de M , l'ensemble $\{g \in G/gC \cap C \neq \emptyset\}$ est compact dans G . Ceci équivaut à demander que l'application

$$G \times M \ni (g, x) \longmapsto (gx, x) \in M \times M,$$

est une application propre [40, 14]. Si en plus la dimension des orbites est constante, on dira que l'action est régulière. L'action est localement libre si les groupes d'isotropies sont discrets.

La variété M sera dite G -variété propre (resp. propre régulière) s'il existe une action propre (resp. propre et régulière) de G sur M .

Un résultat maintenant classique de Palais [51] assure qu'une action propre est une action par isométries. Plus précisément, il existe une métrique riemannienne G -invariante sur une G -variété propre. Les orbites d'une action propre régulière définissent alors un feuilletage riemannien [47] dont les feuilles sont des sous-variétés fermées. Ceci est un cas important de feuilletages dits propres [18]. L'espace des feuilles est alors séparé et est naturellement muni d'une structure d'orbifold (ou V -variété de Satake [55]), c.-à-d. tout point de M/G possède un voisinage homéomorphe au quotient d'un ouvert de $\mathbb{R}^q$ par un groupe fini. Ceci est bien sûr une conséquence du fameux modèle de slice local de Palais-Koszul.

Une autre propriété importante de ces feuilletages propres est qu'ils sont *géodésibles* [16]. Il existe donc une métrique riemannienne g dont la seconde forme fondamentale α_g est nulle, c.-à-d. telle que pour $X, X' \in \mathcal{F}$, on a

$$(\nabla_X^g X' + \nabla_{X'}^g X)^\perp = 0.$$

Ici, ∇^g est la connection de Levi-Civita associée à g . Ainsi, il existe une métrique pour laquelle la courbure moyenne est en particulier nulle. Il s'agit donc de feuilletages *minimalisable* [53]. Le calcul de l'homologie cyclique obtenu dans la section 3 peut donc être notablement simplifié lorsqu'une telle métrique minimalisante sera en outre G -invariante.

On désignera dans la suite par dg une mesure de Haar invariante à droite, et par Δ_G la fonction modulaire du groupe G . Rappelons qu'il existe sur la G -variété propre M une fonction modulaire Δ_M , c.-à-d. une fonction différentiable $\Delta_M : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que (voir [2])

$$g^*(\Delta_M) = \Delta_G(g)\Delta_M.$$

Lemme 2. *Soit $G \times M \rightarrow M$ une action propre régulière d'un groupe de Lie connexe G de dimension p . Alors, il existe sur M une p -forme caractéristique G -invariante χ_G orientant les orbites.*

Démonstration. Considérons comme avant le feuilletage $\mathcal{F}$ donné par le fibré tangent aux orbites. La connexité du groupe G nous permet de le faire opérer sur $\mathcal{F}$ en préservant l'orientation. Soit $\langle, \rangle$ une métrique riemannienne G -invariante sur M , le supplémentaire orthogonal $\mathcal{F}^\perp$ relativement à la métrique est G -stable. Désignons par $\chi_{\mathcal{F}}$ la forme caractéristique du feuilletage $\mathcal{F}$ associée à la métrique $\langle, \rangle$. Pour tout $g \in G$, considérons la p -forme $g^*(\chi_{\mathcal{F}})$. Le fibré $\mathcal{F}^\perp$ étant G -stable, nous savons alors que $i_Y(g^*(\chi_{\mathcal{F}})) = 0$ pour tout $Y \in \mathcal{F}^\perp$. Ainsi, il existe une fonction $\varphi_g \in C^\infty(M)$ telle que $g^*\chi_{\mathcal{F}} = \varphi_g\chi_{\mathcal{F}}$.

Pour $x \in M$, soit maintenant $\{X_x^1, \dots, X_x^p\}$ une base orthonormée de $T_x(Gx)$. On a

$$\varphi_g(x) = (g^*\chi_{\mathcal{F}})_x(X_x^1, \dots, X_x^p) = (\chi_{\mathcal{F}})_{gx}(g_*X_x^1, \dots, g_*X_x^p).$$

Or, puisque l'application $g_* : T_x(Gx) \rightarrow T_{gx}(Gx)$ est une isométrie, la famille

$$\{g_*X_x^1, \dots, g_*X_x^p\}$$

est une base orthonormée de $T_{gx}(Gx)$. Ainsi $\varphi_g(x) = 1$. Par suite, pour tout $g \in G$, $g^*\chi_{\mathcal{F}} = \chi_{\mathcal{F}}$ et la preuve est complète. $\square$

Nous donnons maintenant un lemme technique utile pour la suite et faisant partie du folklore plus ou moins connu dans l'étude des actions propres. On désigne encore par dg une mesure de Haar invariante à droite, et par Δ_G la fonction modulaire associée.

Lemme 3. *Soit $G \times M \rightarrow M$ une action propre d'un groupe de Lie connexe G sur une variété M . Alors il existe une fonction positive $\varphi \in C^\infty(M)$ sur M , telle que :*

- pour tout compact C de M , la restriction $\varphi|_{GC}$ de φ à GC est à support compact ;
- pour tout x dans M , on a

$$\int_G \varphi(g^{-1}x) \Delta_G(g) dg = 1.$$

Démonstration. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de M par des ouverts U_i du type slice. Ainsi

$$U_i = G \times_{G_i} S_i,$$

où G_i est l'isotropie en un point x_i de S_i , et S_i est une sous-variété relativement compacte de M (cf. [51]). Soit $(\rho_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité G -invariante associée au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$. On a alors

$$U_i = GS_i, \quad M = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \rho_i = 1.$$

Pour tout $i \in I$, soit ψ_i une fonction positive à support compact sur M telle que $\psi_i = 1$ sur S_i . Posons $\psi := \sum_{i \in I} \rho_i \psi_i$.

Soit $\{U_1, \dots, U_k\}$ une sous-famille finie de $(U_i)_{i \in I}$ telle que,

$$\text{pour tout } i \in I \setminus \{1, \dots, k\}, \quad C \cap U_i = \emptyset.$$

L'existence d'une telle sous-famille finie est due à la finitude locale du recouvrement. Puisque les ouverts U_i sont G -stables, on a, pour tout $i \in I \setminus \{1, \dots, k\}$,

$$GC \cap U_i = \emptyset.$$

D'autre part, puisque $\text{Supp}(\rho_i) \subset U_i$, la restriction de ψ à GC est donnée par

$$\psi|_{GC} = \sum_{i=1}^k \rho_i \psi_i.$$

Il est alors facile de voir que la fonction ψ est nulle à l'extérieur du compact

$$K = \bigcup_{i=1}^k \text{Supp}(\psi_i) \cap GC,$$

Posons maintenant, pour tout $x \in M$,

$$(L\psi)(x) = \int_G \psi(g^{-1}x) \Delta_G(g) dg.$$

Cette intégrale est bien définie puisque $\{g \in G / \psi(g^{-1}x) \neq 0\}$ est contenu dans $\{g \in G / g^{-1}x \in \text{Supp}(\psi|_{Gx})\}$ qui est compact. Puisque les fonctions ρ_i sont G -invariantes, nous obtenons

$$(L\psi)(x) = \sum_{i=1}^k \rho_i(x) \int_G \psi_i(g^{-1}x) \Delta_G(g) dg.$$

Il est donc clair que $L\psi$ ne s'annule pas. En effet, soit $x \in M$, prenons $i_0 \in I$ telle que $x \in GS_{i_0}$, et soit V_{i_0} un voisinage ouvert de S_{i_0} sur lequel ψ_{i_0} est strictement positive. La fonction $g \in G \mapsto \psi_{i_0}(g^{-1}x)$ est alors positive sur $\rho^{-1}(V_{i_0})$ ouvert de G (avec $\rho : g \in G \mapsto g^{-1}x \in M$). D'où

$$\int_G \psi_{i_0}(g^{-1}x) \Delta_G(g) dg > 0.$$

D'autre part, l'image de L est contenue dans l'espace des fonction G -invariante comme cela peut être facilement vérifié. Finalement, il suffit de poser

$$\varphi := \frac{\psi}{L\psi}.$$

□

Considérons maintenant la p -forme χ_G du lemme 2. Le plongement associé

$$j_G : C_c^\infty(\bigwedge^{q-r} \mathbf{v}^*) \hookrightarrow \Omega_c^{q-r}(M),$$

est donné par $j_G(\alpha) = \chi_G \wedge \alpha$.

Lemme 4. *On suppose que G est connexe et, comme avant, que l'action est propre régulière. L'application j_G induit un isomorphisme J entre les courants basiques $C_{\mathcal{F}}^r(M)$ et l'espace $(C_c^\infty(\bigwedge^{q-r} \mathbf{v}^*))'_G$ des formes linéaires continues sur $C_c^\infty(\bigwedge^{q-r} \mathbf{v}^*)$ qui sont G -invariantes.*

Démonstration. L'application j_G est G -équivariante, elle induit donc par transposition un isomorphisme G -équivariant

$$j_G^t : C_{sb}^r(M) \xrightarrow{\cong} (C_c^\infty(\bigwedge^{q-r} \mathbf{v}^*))'_G.$$

Ainsi la restriction de j_G^t aux courants semi-basiques G -invariants fournit un isomorphisme avec $(C_c^\infty(\bigwedge^{q-r} \mathbf{v}^*))'_G$. Mais rappelons qu'un courant est G -invariant si et seulement si il est nul sur l'image des dérivées de Lie $L_X \alpha$ pour les champs longitudinaux, c'est-à-dire ici pour les champs fondamentaux. Ceci montre donc que l'on récupère l'isomorphisme annoncé :

$$J : C_{\mathcal{F}}^r(V) \xrightarrow{\cong} (C_c^\infty(\bigwedge^{q-r} \mathbf{v}^*))'_G$$

□

Considérons maintenant l'e.v.t. $\overline{\Omega}_{\mathcal{F}}^{q-r}(M)$ des $(q-r)$ -formes basiques dont le support est G -compact, c'est-à-dire le saturé d'un compact. On le munit de sa topologie naturelle d'espace L.F. Ainsi, une suite (α_n) convergera vers α lorsqu'il existera un sous-ensemble G -compact B , tel que les (α_n) et α sont supportés dans B et la suite (α_n) converge vers α au sens de la topologie C^∞ . Dans [2], une identification entre le dual topologique $(\overline{\Omega}_{\mathcal{F}}^{q-r}(M))'$ et l'espace $(C_c^\infty(\bigwedge^{q-r} \mathbf{v}^*))'_G$ est établie. En effet, soit comme avant dg une mesure de Haar invariante à droite sur le groupe de Lie connexe G et soit Δ_M une fonction modulaire sur M , alors l'application moyenne

$$m : C_c^\infty(\bigwedge^{q-r} \mathbf{v}^*) \longrightarrow \overline{\Omega}_{\mathcal{F}}^{q-r}(M)$$

définie par

$$m(\omega) = \Delta_M \int_G (g^{-1})^* \omega dg,$$

induit par transposition l'isomorphisme (cf [2])

$$I : (\overline{\Omega}_{\mathcal{F}}^{q-r}(M))' \xrightarrow{\cong} (C_c^\infty(\bigwedge^{q-r} \mathbf{v}^*))'_G. \quad (5)$$

En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit $G \times M \rightarrow M$ une action propre régulière d'un groupe de Lie connexe G de codimension q . Alors tout r -courant basique $T \in C_{\mathcal{F}}^r(M)$ s'identifie à une fonctionnelle continue sur l'e.v.t. $\overline{\Omega}_{\mathcal{F}}^{q-r}(M)$ des formes basiques à support G -compact. Cet isomorphisme est explicitement réalisé par l'application*

$$\Psi = J^{-1} \circ I : (\overline{\Omega}_{\mathcal{F}}^{q-r}(M))' \xrightarrow{\cong} C_{\mathcal{F}}^r(M).$$

Corollaire 3. *Sous les hypothèses du théorème 1 et lorsque l'espace des orbites M/G est compact, l'espace $C^r_{\mathcal{F}}(M)$ des r -courants basiques est isomorphe au dual topologique de l'espace de Fréchet $\Omega^{q-r}_{\mathcal{F}}(M)$ de toutes les formes basiques avec sa topologie C^∞ .*

Démonstration. Il suffit de noter dans ce cas que $\overline{\Omega}^{q-r}_{\mathcal{F}}(M)$ coïncide avec $\Omega^{q-r}_{\mathcal{F}}(M)$ et que les topologies se correspondent. $\square$

2. Courants G -basiques et cohomologie de Hochschild. Soit comme avant $G \times M \rightarrow M$ une action propre régulière d'un groupe de Lie connexe G de dimension p . Le cadre relativement plus intéressant est celui où le groupe G n'est pas compact et donc la variété M n'est pas compacte, et où l'action n'est pas libre. Les invariants de l'algèbre de Connes qui décrit l'espace des feuilles en géométrie non commutative sont alors codés par une algèbre produit croisé propre. Il existe cependant une algèbre intermédiaire commutative représentant, comme nous allons le voir, honorablement l'espace des fonctions différentiables sur l'espace topologique quotient. Cette algèbre est bien sûr l'algèbre $\bar{A}_G$ des fonctions différentiables G -invariantes sur M dont le support est G -compact. Cette algèbre est naturellement munie d'une topologie d'espace $L.F.$ qui est Fréchet lorsque l'espace des orbites est compact.

Rappelons d'abord quelques définitions. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre avec topologie que nous supposons d'abord topologique, c.-à-d. telle que le produit est jointement continu. On note $C^k(\mathcal{A})$ l'espace des formes $(k+1)$ -linéaires continues sur $\mathcal{A}$. Le complexe de Hochschild (continu) associé à l'algèbre topologique $\mathcal{A}$ est le complexe $(C^*(\mathcal{A}), b)$, où b est la différentielle de Hochschild donnée, pour tout $\Phi \in C^k(\mathcal{A})$, par

$$(b\Phi)(a_0, a_1, \dots, a_{k+1}) := (b'\Phi)(a_0, a_1, \dots, a_{k+1}) + (-1)^{k+1} \Phi(a_{k+1}a_0, a_1, \dots, a_k)$$

$$\text{avec } (b'\Phi)(a_0, a_1, \dots, a_{k+1}) := \sum_{j=0}^k (-1)^j \Phi(a_0, a_1, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{k+1}).$$

On peut alors vérifier que $b \circ b = 0$. La cohomologie de Hochschild continue $\mathrm{HH}^*(\mathcal{A})$ de l'algèbre $\mathcal{A}$ est alors la cohomologie du complexe $(C^*(\mathcal{A}), b)$, elle est notée

$$\mathrm{HH}^*(\mathcal{A}) = \bigoplus_j \mathrm{HH}^j(\mathcal{A}).$$

On considère aussi le sous-complexe $C^*_\lambda(\mathcal{A})$ du complexe de Hochschild, formé à partir des cochaines cycliques, c'est-à-dire des formes $(k+1)$ -linéaires continues Φ sur $\mathcal{A}^{k+1}$, telles que

$$\Phi(a_1, \dots, a_k, a_0) = (-1)^k \Phi(a_0, a_1, \dots, a_k), \quad \forall (a_0, a_1, \dots, a_k) \in \mathcal{A}^{k+1}.$$

L'opérateur b préserve C^*_λ et on obtient ainsi un sous-complexe $(C^*_\lambda(\mathcal{A}), b)$ du complexe de Hochschild. Ce sous-complexe est le complexe cyclique de $\mathcal{A}$ et sa cohomologie est la cohomologie cyclique de Connes de l'algèbre topologique $\mathcal{A}$, elle sera notée $\mathrm{HC}^*(\mathcal{A})$ ou parfois $\mathrm{H}^*_\lambda(\mathcal{A})$ en référence au générateur λ du groupe cyclique. La cohomologie cyclique ne fournit qu'une invariance homotopique partielle et on doit souvent plutôt considérer la cohomologie cyclique périodique $\mathrm{HP}^*(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$, qui est la limite inductive de la cohomologie cyclique relativement à l'opérateur de Connes $S: \mathrm{HC}^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathrm{HC}^{*+2}(\mathcal{A})$. La définition de l'opérateur S peut être consultée dans [19] ou dans [43].

Lorsque l'algèbre $\mathcal{A}$ n'est pas une algèbre topologique, les définitions ci-dessus ne sont plus valables et doivent être modifiées en conséquence. Les corrections topologiques nécessaires pour englober de telles algèbres sont décrites par exemple dans [10] ou [11]. Voir aussi [21].

Théorème 2. *On fixe une fonction cutoff φ comme dans le lemme 3, une fonction modulaire Δ_M et une forme caractéristique G -invariante χ_G . Pour tout r -courant basique $C \in C_{\mathcal{F}}^r(M)$, on définit un $(q-r)$ -cocycle de Hochschild $\Phi_C^{\varphi, \Delta_M, \chi_G}$ sur $\bar{A}_G$ en posant, pour tout $(f_0, \dots, f_{q-r}) \in \bar{A}_G^{q-r+1}$,*

$$\Phi_C^{\varphi, \Delta_M, \chi_G}(f_0, \dots, f_{q-r}) := \langle C, \frac{\varphi}{\Delta_M} \chi_G \wedge f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r} \rangle.$$

Démonstration. On note d'abord que la formule de couplage a un sens. En effet, la forme $\frac{\chi_G}{\Delta_M} \wedge f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r}$ est à support G -compact dans M . Ainsi, par le Lemme 3, on déduit que la forme différentielle $\frac{\varphi}{\Delta_M} \chi_G \wedge f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r}$ est à support compact dans M . Par conséquent, le couplage de cette dernière forme avec le courant C est un nombre complexe bien défini.

Notons maintenant que si T est une forme linéaire continue sur l'espace $\bar{\Omega}_{\mathcal{F}}^{q-r}(M)$ des formes basiques de degré $q-r$ et à support G -compact, alors la formule suivante définit un cocycle de Hochschild sur l'algèbre $\bar{A}_G$

$$\Psi_T(f_0, \dots, f_{q-r}) := \langle T, f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r} \rangle.$$

En effet, la différentielle de de Rham préserve les formes basiques à support G -compact. Ainsi, il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} b\Psi_T(f_0, \dots, f_{q-r}, f_{q-r+1}) &= (-1)^{q-r} \langle T, (f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r}) f_{q-r+1} \rangle + \\ &\quad (-1)^{q-r+1} \langle T, f_{q-r+1} f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Notons maintenant que l'on a

$$\langle C, \frac{\varphi}{\Delta_M} \chi_G \wedge f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r} \rangle = \langle (I^{-1} \circ J)(C), m(\frac{\varphi}{\Delta_M} \wedge f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r}) \rangle,$$

par définition de I et J . Ensuite, on a

$$m(\frac{\varphi}{\Delta_M} \wedge f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r}) = f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r}.$$

Ainsi, $\Phi_C^{\varphi, \Delta_M, \chi_G}$ est bien un cocycle de Hochschild puisque c'est le cocycle de Hochschild $\Psi_{(I^{-1} \circ J)(C)}$. $\square$

Proposition 2. *La classe de Hochschild du cocycle $\Phi_C^{\varphi, \Delta_M, \chi_G}$ défini dans le théorème 2 ne dépend pas du choix de φ .*

Démonstration. Ceci est une conséquence de la preuve du théorème précédent. On sait en effet que $\Phi_C^{\varphi, \Delta_M, \chi_G} = \Psi_{(I^{-1} \circ J)(C)}$. $\square$

On obtient donc une application linéaire bien définie entre les r -courants basiques et la cohomologie de Hochschild de degré $q-r$ de l'algèbre $\bar{A}_G$:

$$\Phi : C_{\mathcal{F}}^r(M) \longrightarrow \mathrm{HH}^{q-r}(\bar{A}_G).$$

Théorème 3. Soit $G \times M \rightarrow M$ une action propre régulière de codimension q d'un groupe de Lie connexe G . Alors la cohomologie de Hochschild continue $\mathrm{HH}^{q-r}(\overline{A}_G)$ est isomorphe via Φ à l'espace des r -courants basiques sur M .

La preuve de ce théorème se fera en plusieurs étapes. Pour alléger les notations et simplifier l'exposé de la preuve, nous supposons que l'espace des orbites M/G est compact.

Puisque l'action de G sur M est propre, la partie $M \rtimes G$ de $M \times M$ donnée par

$$M \rtimes G := \{(x, gx), x \in M, g \in G\},$$

est fermée. On fixe dans la suite une métrique riemannienne G -invariante sur M . Cette métrique permet alors d'induire le fibré transverse $\nu = TM/F$ d'une métrique G -invariante. On note $\exp$ l'application exponentielle associée au fibré ν . Il existe alors un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $M \rtimes G$ dans $M \times M$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{V}, \exists g \in G, \exists ! X_0(x, y) \in \nu_y \text{ tels que } \exp_y(X_0(x, y)) = g.x.$$

On peut, quitte à saturer, supposer que $\mathcal{V}$ est $G \times G$ -invariant. En effet, si $(x, y) \in \mathcal{V}$, alors, pour tout $g^1, g^2 \in G$, on peut trouver g' et un vecteur $X_0(g^1x, g^2y) \in \nu_{g^2y}$ satisfaisant

$$\exp_{g^2y}(X_0(g^1x, g^2y)) = g'(g^1x).$$

Plus précisément, et grâce à la G -invariance de la métrique, on peut prendre $g' = g^2g(g^1)^{-1}$ et $X_0(g^1x, g^2y) = g_{*,y}^2(X_0(x, y))$. En effet, alors $X_0(g^1x, g^2y)$ ne dépend pas du choix de g^1 et g^2 .

Lemme 5. On suppose qu'il existe un champ de vecteurs transverse G -invariant sur M qui ne s'annule pas. Alors il existe une section X du fibré $p_2^*\nu$ au-dessus de $M \times M$, où p_2 est la deuxième projection, satisfaisant

- $X(g^1x, g^2y) = g_{*,y}^2(X(x, y))$, pour tout $(x, y) \in M^2$ et tout $(g^1, g^2) \in G^2$;
- $X(x, y) = 0 \iff (x, y) \in M \rtimes G$;
- $X(x, y) = X_0(x, y)$ si (x, y) est assez proche de $M \rtimes G$.

Démonstration. Notons d'abord que X_0 satisfait sur $\mathcal{V}$ les trois propriétés du lemme. Soit φ une fonction différentiable positive sur M^2 à support contenu dans $\mathcal{V}$ et valant 1 sur un voisinage G^2 -invariant de $M \rtimes G$. Pour $(x, y) \in M^2$ quelconque, on pose alors

$$X(x, y) := \varphi(x, y)X_0(x, y) + i(1 - \varphi(x, y))Y(y),$$

où Y est un champ de vecteurs G -équivariant sur M ne s'annulant pas. D'autre part, $X(x, y) = 0$ seulement pour (x, y) assez proche de $M \rtimes G$ et pour $X_0(x, y) = 0$. Mais alors il est clair que cela arrive précisément lorsque $(x, y) \in M \rtimes G$ par définition de X_0 . Enfin, un calcul direct donne

$$\begin{aligned} X(g^1x, g^2y) &= \varphi(g^1x, g^2y)X_0(g^1x, g^2y) + i(1 - \varphi(g^1x, g^2y))Y(g^2y) \\ &= \varphi(x, y)g_{*,y}^2(X_0(x, y)) + i(1 - \varphi(x, y))g_{*,y}^2Y(y) \\ &= g_{*,y}^2X(x, y), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. $\square$

On supposera dans un premier temps qu'un tel champ X existe et on le fixe pour la suite. On note par Ω^k l'espace des sections $(G \times G)$ -invariantes du fibré $p_2^*\Lambda^k(\nu^* \otimes \mathbb{C})$

au-dessus de M^2 . Ici, le groupe de Lie G agit sur le fibré v^* en utilisant la deuxième projection de $G \times G$ dans G .

Lemme 6. *Les espaces Ω^k sont des modules projectifs de type fini sur l'algèbre Ω^0 . De plus, le produit intérieur par X envoie, pour tout $k \geq 0$, Ω^{k+1} , sur Ω^k .*

Démonstration. Nous devons d'abord montrer que le module Ω^k est projectif de type fini. Or l'action de $G \times G$ sur $M \times M$ est propre avec quotient compact, il existe donc un recouvrement fini de $M \times M$ par des ouverts type slice de la forme

$$U_i = (G \times G) \times_{K_i} S_i,$$

avec K_i sous-groupe compact de $G \times G$ et S_i K_i - sous-variété relativement compacte de telle sorte que U_i soit un $(G \times G)$ - retract d'une orbite $(G \times G)x_i$ d'un point $x_i \in S_i$ avec isotropie K_i . Plus précisément, $\pi_i : U_i \rightarrow (G \times G)x_i$ est un voisinage tubulaire $(G \times G)$ -stable de l'orbite $(G \times G)x_i$ tel que l'inclusion de la section nulle

$$j : (G \times G)x_i \hookrightarrow U_i$$

satisfait que $j \circ \pi_i$ est $(G \times G)$ - homotope à l'identité. Par un argument classique de partition de l'unité [6], on est donc ramené à prouver que l'espace des sections $(G \times G)$ -invariantes d'un $(G \times G)$ - fibré vectoriel $\tilde{E}$ au-dessus de $(G \times G) \times_{K_i} S_i$ est trivialisable. En effet, cela permettra de déduire le résultat puisque notre recouvrement est fini, voir [5, 6]. Or, un tel fibré est $(G \times G)$ -isomorphe au fibré $\pi_i^* E$, où E est la restriction de notre $(G \times G)$ - fibré vectoriel à l'orbite $(G \times G)x_i \simeq (G \times G)/K_i$. Si donc V_i est la représentation de dimension finie de K_i donnée par la fibre de E en x_i , alors on obtient par induction

$$C^\infty(U_i, \tilde{E})^{G \times G} \simeq C^\infty(U_i)^{G \times G} \otimes V_i^{K_i}.$$

Soit maintenant $\omega \in \Omega^k$ une forme $(G \times G)$ - invariante sur M^2 . Il est clair, d'après la définition du produit intérieur, que $i_X \omega$ est une section différentiable du fibré $p_2^* \Lambda^{k-1}(v^* \otimes \mathbb{C})$ au-dessus de $M \times M$. Soient $Z^1, \dots, Z^{k-1}$ des sections de $p_2^*(v)$ et soit $(g_1, g_2) \in G^2$. On a :

$$\begin{aligned} & \left\langle {}^t g_2(i_X \omega(g_1 x, g_2 y)), (Z^1(x, y), \dots, Z^{k-1}(x, y)) \right\rangle \\ &= \left\langle \omega(g_1 x, g_2 y), (X(g_1 x, g_2 y), g_{2,*}(Z^1(x, y)), \dots, g_{2,*}(Z^{k-1}(x, y))) \right\rangle \\ &= \left\langle {}^t(g_2^{-1})(\omega(x, y)), (g_{2,*}(X(x, y)), (g_{2,*}(Z^1(x, y)), \dots, (g_{2,*}(Z^{k-1}(x, y)))) \right\rangle \\ &= \left\langle \omega(x, y), (X(x, y), Z^1(x, y), \dots, Z^{k-1}(x, y)) \right\rangle \\ &= \left\langle (i_X \omega)(x, y), (Z^1(x, y), \dots, Z^{k-1}(x, y)) \right\rangle. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. □

Il est facile de vérifier que l'inclusion de la diagonale $\Delta : M \hookrightarrow M^2$ induit alors une application

$$\Delta^* : \Omega^0 \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}_G \text{ donnée par } \Delta^*(f)(x) := f(x, x).$$

Ainsi, on voit que l'algèbre $\overline{\mathcal{A}}_G$ est un Ω^0 - module.

Lemme 7. *La suite*

$$0 \rightarrow \Omega^m \xrightarrow{i_X} \dots \xrightarrow{i_X} \Omega^0 \xrightarrow{\Delta^*} \overline{\mathcal{A}}_G,$$

définit une résolution projective continue du Ω^0 -module $\overline{\mathcal{A}}_G$

Démonstration. Notons d'abord que puisque X ne s'annule que sur $M \rtimes G$ et que tout élément f de Ω^0 est une fonction G^2 -invariante, $\Delta^* f = 0$ équivaut à l'existence d'un élément $\omega \in \Omega^1$ tel que $f = i_X \omega$. Soient maintenant χ et χ' deux fonctions G^2 -invariantes sur M^2 telles que le support de χ' est G^2 -compact contenu dans $\mathcal{V}$ et telles que

$$\begin{aligned} X(x, y) &= X_0(x, y), \forall (x, y) \in \text{Supp}(\chi'), \\ \chi &= 1 \text{ sur un petit voisinage de } M \rtimes G \text{ et } \chi\chi' = \chi. \end{aligned}$$

Sur le support de $1 - \chi$, il est alors clair que X ne s'annule pas. Par conséquent, on peut trouver grâce à une partition de l'unité G^2 -invariante, un élément α de Ω^1 tel que

$$\langle \alpha, X \rangle = 1 \text{ sur le support de } 1 - \chi.$$

Pour (x, y) assez proche de $M \rtimes G$, on définit

$$\varphi_t(x, y) := \exp_x(tX(y, x)),$$

et on pose plus généralement [19][page 344]

$$s(\omega) := \chi' \int_0^1 \varphi_t^*(d_y(\chi\omega)) \frac{dt}{t} + (1 - \chi)\alpha \wedge \omega, \quad \omega \in \Omega^*.$$

Le reste de la preuve consiste à montrer que $i_X s + s i_X = id$. Cette vérification est la même que celle du cas sans action et est omise (cf [19]). $\square$

Démonstration. Nous sommes maintenant à même de calculer la cohomologie de Hochschild de notre algèbre $\overline{\mathcal{A}}_G$. Quitte à remplacer la G -variété propre M par la G -variété propre $M \times \mathbb{S}^1$, où G agit trivialement sur $\mathbb{S}^1$, on peut assurer l'existence d'un champ de vecteurs G -invariant sur M qui ne s'annule pas. Notons que

$$\overline{C}_G^\infty(M \times \mathbb{S}^1) = \overline{C}_G^\infty(M) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbb{S}^1)$$

permet d'injecter de manière scindée la cohomologie de Hochschild de notre algèbre $\overline{C}_G^\infty(M)$ dans la cohomologie de Hochschild de $\overline{C}_G^\infty(M \times \mathbb{S}^1)$. Ceci permet de déduire le théorème par restriction à partir du théorème pour la variété $M \times \mathbb{S}^1$.

En utilisant le lemme précédent, on déduit que la cohomologie de Hochschild est isomorphe à l'homologie du complexe

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\Omega^0}(\Omega^0, (\overline{\mathcal{A}}_G)^*) \xrightarrow{i_X^*} \dots \xrightarrow{i_X^*} \text{Hom}_{\Omega^0}(\Omega^q, (\overline{\mathcal{A}}_G)^*) \rightarrow 0.$$

Mais l'application

$$\Theta : \Omega^k \hat{\otimes} \overline{\mathcal{A}}_G \longrightarrow \overline{C}_G^\infty(M, \Lambda^k \mathbf{v}^*),$$

donnée par $\Theta(\xi \hat{\otimes} f)(x) := f(x)\xi(x, x)$ permet d'identifier $\Omega^k \hat{\otimes}_{\Omega^0} \overline{\mathcal{A}}_G$ avec l'espace $\overline{C}_G^\infty(M, \Lambda^k \mathbf{v}^* \otimes \mathbb{C})$ des formes différentielles G -invariante semi-basique. D'autre part, la restriction du champ de vecteurs X à la diagonale étant nulle, on voit que la cohomologie de Hochschild peut se calculer à partir de l'homologie du complexe

$$0 \rightarrow \overline{C}_G^\infty(M)' \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{0} \overline{C}_G^\infty(M, \Lambda^q \mathbf{v}^*)' \rightarrow 0.$$

Ceci permet, en appliquant les résultats des sections précédentes de déduire l'isomorphisme

$$\mathrm{HH}^k(\overline{\mathcal{A}}_G) \simeq C_{\mathcal{F}}^{q-k}(M).$$

Il nous reste donc à expliciter cet isomorphisme. Ici la résolution standard du Ω^0 -module $\overline{\mathcal{A}}_G$ est donnée par

$$\mathcal{C}_k := \overline{C}_{G^{k+2}}^\infty(M^2 \times M^k).$$

Par conséquent, on pose

$$F\omega(x, y; a^1, \dots, a^k) := \langle \omega(x, y); X(a^1, y), \dots, X(a^k, y) \rangle, \quad \omega \in \Omega^*.$$

On obtient ainsi une application de chaînes par calcul direct. On remarque que la fonction $F\omega$ ainsi définie est bien G^{k+2} -invariante. Le reste de la preuve est, une fois de plus, identique au calcul de Connes réalisé dans [19][pages 129-130]. $\square$

Corollaire 4. *La dimension de Hochschild de l'algèbre $\overline{A}_G$ est exactement q .*

3. Cohomologie cyclique des fonctions G -invariantes. Grâce aux résultats de la section précédente, nous sommes maintenant à même de calculer la cohomologie cyclique de l'algèbre $\overline{A}_G$ et de déduire la cohomologie cyclique périodique. Pour simplifier ce calcul, nous nous limiterons au cas où G est unimodulaire. On peut alors énoncer le lemme suivant :

Lemme 8. *Soit $C \in C_{\mathcal{F}}^r(M)$ un r -courant basique et soit φ une fonction cutoff satisfaisant les hypothèses du lemme 3. Alors, pour toute forme différentielle $\omega \in \overline{\Omega}_{\mathcal{F}}^{q-r-1}(M)$, on a*

$$\langle C, d\varphi \wedge \chi_G \wedge \omega \rangle = 0.$$

Démonstration. On sait qu'un tel courant C peut toujours s'écrire $C = \Psi(\eta)$ avec η forme linéaire continue sur $\overline{\Omega}_{\mathcal{F}}^{q-r}(M)$. Par conséquent,

$$\langle C, d\varphi \wedge \chi_G \wedge \omega \rangle = (-1)^p \langle I\eta, d\varphi \wedge \omega \rangle.$$

Or, la forme ω étant G -invariante, on a

$$\langle I\eta, d\varphi \wedge \omega \rangle = \pm \langle \eta, m(d\varphi \wedge \omega) \rangle = 0.$$

La dernière égalité résulte du fait que $m \circ d = d \circ m$ et donc que

$$m(d\varphi \wedge \omega) = (m \circ d)(\varphi \omega) - m(\varphi d\omega) = d\omega - d\omega = 0.$$

$\square$

Notons que la différentielle de de Rham de la forme caractéristique χ_G possède uniquement deux composantes bi-homogènes relativement à la bigraduation donnée par la décomposition

$$T^*M \simeq T^*\mathcal{F} \oplus \mathbf{v}^*, \quad \text{avec } \mathbf{v}^* := \{\alpha \in T^*M, \alpha|_{T\mathcal{F}} = 0\}.$$

On a plus précisément la proposition suivante :

Proposition 3. [58] *Soit κ_G la forme de courbure moyenne associée à la métrique G -invariante fixée sur M et correspondant au feuilletage par les orbites de l'action de G . Alors la différentielle $d\chi_G$ de la forme caractéristique χ_G satisfait la relation*

$$d\chi_G + \kappa_G \wedge \chi_G = \alpha_G,$$

où α_G est une forme $\mathcal{F}$ -triviale.

Grâce à cette proposition dont la preuve est donnée dans [58], on peut considérer une différentielle modifiée d_G [58, 26] en posant, pour $C \in C_{\mathcal{F}}^r(M)$ et $\omega \in \Omega_c^{n-r-1}(M)$,

$$\langle d_G C, \omega \rangle := \langle C, d\omega + \kappa_G \wedge \omega \rangle.$$

Alors que κ_G n'est à priori pas fermée, la différentielle d_G satisfait, comme nous allons le voir, $d_G^2 = 0$ lorsqu'on agit sur des courants basiques.

Proposition 4. *Soit B l'opérateur cyclique de Connes [19]. Alors on a, pour tout r -courant basique C ,*

$$B\Phi_C = \Phi_{(q-r-1)d_G C} \text{ où } \langle d_G C, \omega \rangle = \langle C, d\omega + \kappa_G \wedge \omega \rangle.$$

En particulier, le $(r-1)$ -courant $d_G C$ est basique et $d_G^2 C = 0$.

Démonstration. Si C est un r -courant basique, alors rappelons que l'on a

$$\Phi_C(f_0, \dots, f_{q-r}) := \langle C, \varphi \chi_G \wedge f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r} \rangle.$$

Or on a d'après la définition de B ,

$$\begin{aligned} B\Phi_C(f_0, \dots, f_{q-r-1}) &= (q-r-1) \langle C, \varphi \chi_G \wedge df_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r-1} \rangle \\ &= (q-r-1) \langle C, d(\varphi \chi_G \wedge f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r-1}) \rangle \\ &\quad - (q-r-1) \langle C, d(\varphi \chi_G) \wedge f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r-1} \rangle. \end{aligned}$$

Dans le calcul ci-dessus, seule la différentielle transverse des f_i doit être prise en compte et on obtient le même résultat en remplaçant d par la différentielle transverse d_v . D'après les lemmes précédents, on sait que

$$\langle C, d\varphi \wedge \chi_G \wedge f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r-1} \rangle = 0 \text{ et que } d\chi_G = \alpha_G - \kappa_G \wedge \chi_G,$$

avec α_G forme $\mathcal{F}$ -triviale. La $\mathcal{F}$ -trivialité implique alors que

$$\langle C, \varphi \alpha_G \wedge f_0 dv f_1 \wedge \dots \wedge dv f_{q-r-1} \rangle = 0.$$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned} B\Phi_C(f_0, \dots, f_{q-r-1}) &= (q-r-1) \langle C, d(\varphi \chi_G \wedge f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r-1}) \rangle \\ &\quad + (q-r-1) \langle C, \kappa_G \wedge \varphi \chi_G \wedge f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r-1} \rangle. \end{aligned}$$

□

Pour notre propos ici, nous allons énoncer le calcul de la cohomologie cyclique en termes de la différentielle d_G qui est bien étudiée en géométrie différentielle basique des feuilletages riemanniens compacts, mais qui est de carré nul dans notre cas comme nous venons de le voir. L'homologie des courants basiques pour la différentielle d_G sera notée

$$H_r^{\mathcal{F}, \kappa}(M) := \frac{\text{Ker}(d_G : C_{\mathcal{F}}^r(M) \rightarrow C_{\mathcal{F}}^{r+1}(M))}{d_G(C_{\mathcal{F}}^{r-1}(M))}.$$

L'espace des r -courants basiques qui sont d_G -fermés sera noté $Z_r^{\mathcal{F}, \kappa}(M)$. On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 4. *L'espace $\text{HC}^{q-r}(\bar{A}_G)$ de cohomologie cyclique de l'algèbre $\bar{A}_G$ est donné par l'isomorphisme*

$$\text{HC}^{q-r}(\bar{A}_G) \simeq Z_r^{\mathcal{F}, \kappa}(M) \bigoplus \bigoplus_{j>0} H_{r-2j}^{\mathcal{F}, \kappa}(M).$$

Démonstration. Pour déterminer la cohomologie cyclique, il suffit de déterminer la cohomologie de la cohomologie de Hochschild pour l'opérateur induit par B . Or on a montré que

$$B\phi_C = (q - r - 1)\phi_{d_G C}.$$

Ceci termine la preuve du théorème. $\square$

Nous pouvons maintenant déduire le calcul de la cohomologie cyclique périodique.

Théorème 5. *Pour $i = 0, 1$, l'espace $\mathrm{HP}^i(\overline{A}_G)$ de cohomologie cyclique périodique de l'algèbre $\overline{A}_G$ est donné par l'isomorphisme*

$$\mathrm{HP}^i(\overline{A}_G) \simeq \mathrm{H}_{[i]}^{\mathcal{F}, \kappa}(M) =: \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathrm{H}_{i+2j}^{\mathcal{F}, \kappa}(M).$$

Démonstration. Ce théorème est un corollaire du théorème précédent. En effet, l'opérateur S de périodicité de Connes devient, via l'isomorphisme du théorème précédent, simplement le passage des courants fermés à leurs classe de cohomologie. La preuve est une réécriture à l'identique de la preuve donnée dans le cas sans action dans [19]. $\square$

4. Lien avec le produit croisé. Nous supposons encore dans cette dernière section que l'action $G \times M \rightarrow M$ est une action propre et régulière. Pour simplifier la lecture des calculs ci-dessous, notre groupe G est supposé unimodulaire et l'espace des orbites est supposé compact.

L'action induite de G sur l'algèbre $C_c^\infty(M)$ des fonctions différentiables à support compact sur M , permet de considérer une algèbre non commutative produit croisé $\mathcal{B} = C_c^\infty(M) \rtimes G$ qui joue un rôle important dans la description de l'espace des orbites et notamment lorsque l'action n'est pas propre.

Nous définissons plus précisément l'algèbre de convolution $\mathcal{B}$ des fonctions différentiables à support compact sur $G \times M$, munie du produit de convolution défini par

$$(\xi * \eta)(g, x) := \int_G \xi(k, x) \eta(gk^{-1}, kx) dk, \quad \xi, \eta \in \mathcal{B} \text{ et } (g, x) \in G \times M.$$

Il est facile de vérifier que ce produit est bien associatif et que l'on définit une adjonction (c.-à-d. un anti-automorphisme involutif) sur l'algèbre $\mathcal{B}$ en posant

$$\xi^*(g, x) := \overline{\xi(g^{-1}, gx)}.$$

On définit maintenant un complexe de de Rham transverse non commutatif sur $M \times G$. Soit $(s, r) : G \times M \rightarrow M \rtimes G \subset M^2$ l'application (source, but) avec $s(g, x) := x$ et $r(g, x) := gx$ et posons alors pour $k \geq 0$

$$\mathcal{B}^k := C_c^\infty(G \times M, s^* \wedge^k T^* M \otimes \mathbb{C}).$$

L'espace gradué $\mathcal{B}^* = \bigoplus_k \mathcal{B}^k$ est alors une algèbre graduée pour le produit non gradué-commutatif défini, pour tout $\omega \in \mathcal{B}^k$ et tout $\omega' \in \mathcal{B}^{k'}$, par

$$(\omega * \omega')(g, x) := \int_G \xi(k, x) \wedge k^* \eta(gk^{-1}, kx) dk \in \wedge^{k+k'} T_x^* M \otimes \mathbb{C}.$$

La différentielle de de Rham sur M induit une différentielle encore notée d sur $\mathcal{B}^*$. Elle est plus précisément donnée par

$$(d\omega)(g, x) := d(y \mapsto \omega(g, y))(x).$$

La variété M se plonge dans $M \times G$ par l'application $x \mapsto (x, 1)$. Les restrictions au fibré ν au-dessus de M des éléments de $\mathcal{B}^*$ sont donc bien définies et sont des formes différentielles semi-basiques à support compact sur M . Soit C un k -courant G -basique sur le feuilletage induit par l'action de G sur M . Alors le théorème suivant est démontré par exemple dans [9] pour des feuilletages quelconques. On note par $m : \Omega_c^*(M) \rightarrow \overline{\Omega}^*(M)$ la moyenne qui devient, puisque le groupe est unimodulaire,

$$m(\omega) = m_1(\omega) = \int_G g^*(\omega) dg.$$

Théorème 6. *La fonctionnelle suivante est un cocycle de Hochschild sur $\mathcal{B}$:*

$$\tau_C(\xi_0, \dots, \xi_k) := \langle m([\xi_0 * d\xi_1 * \dots * d\xi_k]|_M), \Phi_C \rangle, \quad \xi_j \in \mathcal{B},$$

De plus, ce cocycle est cyclique lorsque $B(\Phi_C) = 0$ et sa classe en cohomologie cyclique périodique ne dépend que de la classe de Φ_C en cohomologie cyclique périodique.

Ainsi et grâce aux résultats de la section précédente, on voit que τ_C est un cocycle cyclique lorsque le courant C est d_G -fermé. De plus, la classe de τ_C en cohomologie cyclique périodique ne dépend que de la classe du courant C dans l'homologie modifiée $H_*^{\mathcal{F},K}(M)$. On obtient donc un morphisme bien défini

$$\tau : H_*^{\mathcal{F},K}(M) \longrightarrow \text{HP}^k(\mathcal{B}).$$

Rappelons d'autre part qu'il existe une fonction C^∞ positive à support compact ψ sur M dont l'intégrale du carré le long de toute orbite vaut 1. On pose alors, pour tout $f \in C_G^\infty(M)$,

$$\mathcal{M}(f)(g, x) := \psi(x)\psi(gx)f(x).$$

On rappelle que $\Phi : H_*^{\mathcal{F},K}(M) \rightarrow \text{HP}^k(C_G^\infty(M))$ est le morphisme défini dans la section précédente.

Théorème 7. *$\mathcal{M}$ est un homomorphisme d'algèbres et on a*

$$\int_G g^*([\mathcal{M}(f_0) * d\mathcal{M}(f_1) * \dots * d\mathcal{M}(f_r)]|_M) dg = f_0 df_1 \dots df_r,$$

de sorte que

$$\mathcal{M}^* \circ \tau = \Phi.$$

Démonstration. Il faut d'abord calculer $\mathcal{M}(f) * \mathcal{M}(g)$. Or on a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(f_1) * \mathcal{M}(f_2)(g, x) &= \int_G \mathcal{M}(f_1)(k, x) \mathcal{M}(f_2)(gk^{-1}, kx) dk \\ &= \int_G f_1(x) \psi(x) \psi(kx) f_2(kx) \psi(kx) \psi(gx) dk \\ &= f_1(x) f_2(x) \psi(x) \psi(gx) \int_G \psi(kx) \psi(kx) dk \\ &= \mathcal{M}(f_1 f_2)(g, x). \end{aligned}$$

On doit maintenant calculer $[\mathcal{M}(f_0) * d\mathcal{M}(f_1) * \dots * d\mathcal{M}(f_r)](1, x)$. D'abord notons que l'on a

$$\begin{aligned} d\mathcal{M}(f)(k, x) &= d_x(y \mapsto \psi(y)(\psi \circ k)(y)f(y)) \\ &= \psi(kx)f(x)d_x\psi + \psi(x)f(x)d_x(\psi \circ k) + \psi(x)\psi(kx)d_x f. \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que

$$\begin{aligned} [k^* d\mathcal{M}(f)](gk^{-1}, kx) &= [d\mathcal{M}(f)](gk^{-1}, kx) \circ d_x k = \psi(gx)f(kx)d_{kx}\psi \circ d_x k \\ &\quad + \psi(kx)f(kx)d_{kx}(\psi \circ g \circ k^{-1}) \circ d_x k + \psi(kx)\psi(gx)d_{kx}f \circ d_x k. \end{aligned}$$

Et comme f est une fonction G -invariante, on obtient alors

$$[k^* d\mathcal{M}(f)](gk^{-1}, kx) = \psi(gx)f(x)d_x(\psi \circ k) + \psi(kx)f(x)d_x(\psi \circ g) + \psi(kx)\psi(gx)d_x f.$$

Ainsi, en notant $\eta_j = \mathcal{M}(f_j)$ pour $j = 0, \dots, r$, on obtient

$$\begin{aligned} (\eta_0 * d\eta_1 * \dots * d\eta_r)(1, x) \\ = \int_{(k_0, \dots, k_{r-1}) \in G^r} \psi(x)\psi(k_0x)f_0(x) \left[\prod_{j=1}^{r-1} \omega_j(k_j, k_{j-1}, x) \right] \omega_r(1, k_{r-1}, x), \end{aligned}$$

où la 1-forme différentielle au-dessus de M , $x \mapsto \omega_j(g, k, x)$ pour $(g, k) \in G^2$ fixé, est définie par

$$\omega_j(g, k, x) := \psi(gx)f_j(x)d_x(\psi \circ k) + \psi(kx)f_j(x)d_x(\psi \circ g) + \psi(kx)\psi(gx)d_x f_j.$$

Les variables d'intégration se séparent. Pour l'intégrale en k_0 , nous sommes ramené au calcul de

$$\mathcal{M}(f_0)(k_0, x)k_0^* d\mathcal{M}(f)(k_1 k_0^{-1}, k_0 x).$$

Mais on a $\int_G (\psi \circ k)^2(x) dk = 1$ pour tout $x \in M$, de sorte que

$$\int_G [(\psi \circ k)d(\psi \circ k)](x) dk = 0, \quad \forall x \in M,$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_G \mathcal{M}(f_0)(k_0, x) [k_0^* d\mathcal{M}(f_1)](k_1 k_0^{-1}, k_0 x) dk \\ = \psi(x)f_0(x)f_1(x)d_x(\psi \circ k_1) + \psi(x)(\psi \circ k_1)(x)[f_0 df_1](x). \end{aligned}$$

Ensuite l'intégrale en k_1 se ramène à

$$I(k_2, x) = \int_{k_1 \in G} [\psi(x)f_0(x)f_1(x)d_x(\psi \circ k_1) + \psi(x)(\psi \circ k_1)(x)[f_0 df_1](x)] \omega_2(k_2, k_1, x) dk_1.$$

Ceci donne directement

$$I(k_2, x) = \psi(x)(f_0 df_1)(x)[f_2 d(\psi \circ k_2)](x) + \psi(x)\psi(k_2 x)(f_0 df_1 df_2)(x).$$

On a ensuite besoin de calculer

$$I(k_3, x) = \int_{k_2 \in G} I(k_2, x) \omega_3(k_3, k_2, x) dk_2,$$

et ainsi de suite. Mais si pour $j < r - 1$, on suppose que

$$I(k_j, x) = \psi(x)(f_0 df_1 \dots df_{j-1})(x)[f_j d(\psi \circ k_j)](x) + \psi(x)\psi(k_j x)(f_0 df_1 \dots df_j)(x),$$

alors, par le même calcul qu'avant, on voit que $d(\psi \circ k_j)](x) \wedge \omega_{j+1}(k_{j+1}, k_j, x) = 0$ et que, par conséquent,

$$\begin{aligned} I(k_{j+1}, x) &= \int_{k_j \in G} I(k_j, x) \wedge \omega_{j+1}(k_{j+1}, k_j, x) dk_j \\ &= \psi(x)(f_0 df_1 \dots df_j)(x)[f_{j+1} d(\psi \circ k_{j+1})](x) + \psi(x)\psi(k_{j+1} x)(f_0 df_1 \dots df_{j+1})(x). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} (\eta_0 * d\eta_1 * \cdots * d\eta_r)(1, x) \\ = \psi(x)(f_0 df_1 \cdots df_{r-1})(x)[f_r d\psi](x) + \psi(x)^2(f_0 df_1 \cdots df_r)(x). \end{aligned}$$

Ainsi il vient que la moyenne m de la restriction de la forme

$$\mathcal{M}(f_0) * d\mathcal{M}(f_1) * \cdots * d\mathcal{M}(f_r)$$

à M est

$$\begin{aligned} m(y \mapsto [\mathcal{M}(f_0) * d\mathcal{M}(f_1) * \cdots * d\mathcal{M}(f_r)](1, y))(x) \\ = (f_0 df_1 \cdots df_{r-1} f_r)(x) \int_G (\psi \circ h) d_x(\psi \circ h) dh \\ + (f_0 df_1 \cdots df_r)(x) \int_G (\psi \circ h)(x)^2 dh = (f_0 df_1 \cdots df_r)(x). \end{aligned}$$

Ainsi donc, le résultat devient

$$m[\mathcal{M}(f_0) * d\mathcal{M}(f_1) * \cdots * d\mathcal{M}(f_r)|_M] = f_0 df_1 \cdots df_r.$$

□

5. Exemples et applications. Nous consacrons cette dernière section à une liste exhaustive d'exemples importants auxquels nos résultats s'appliquent. Notons d'abord quelques remarques simples qui fournissent des moyens de générer des feuilletages propres par actions de groupes de Lie. Si d'abord G est un groupe de Lie agissant proprement et/ou localement librement sur une variété M , alors tel est le cas pour tout sous-groupe fermé de G . Si d'autre part (M, g) est une variété riemannienne, alors tout sous-groupe fermé G du groupe de Lie des isométries de (M, g) opère proprement sur M . De même, si G est un groupe de Lie contractile, alors toute action propre de G est localement libre. Ainsi, par exemple, toute action de $\mathbb{R}^p$ ou du groupe des matrices triangulaires supérieures ayant des 1 sur la diagonale sera localement libre. Enfin, les actions de groupes analytiques résolubles simplement connexes sont automatiquement localement libres dès qu'elles sont propres [34][page 153]. Des exemples de telles actions propres sont fournies par les groupes d'automorphismes bi-holomorphes d'un domaine régulier de $\mathbb{C}^n$ [48].

Regardons maintenant de plus près la situation importante des fibrés feuilletés. Soit H un groupe de Lie et soit $\Gamma \times S \rightarrow S$ une action proprement discontinue d'un sous-groupe discret Γ de H sur une variété S . Considérons la variété fibré plat $M := H \times_\Gamma S$ qui est l'espace des orbites de l'action diagonale de Γ sur $H \times S$. Il est alors facile de vérifier que l'action de H sur M donnée par

$$g(\overline{a, s}) = \overline{ga, s}$$

est propre et localement libre. L'espace des orbites M/H s'identifie d'ailleurs dans ce cas avec l'espace quotient S/Γ . Il est alors bien connu que les courants de de Rham (resp. les courants de de Rham fermés) sur S qui sont Γ -invariants fournissent des co-cycles de Hochschild (resp. cycliques) sur les algèbres produits croisés $C_c^\infty(S) \rtimes \Gamma$ et $C_c^\infty(M) \rtimes H$ [18, 8, 9]. La construction du présent article montre alors que cette correspondance est en fait portée dans ce cas par un homomorphisme d'algèbres, puisqu'ici les courants Γ -invariants sur S s'identifient avec les courants basiques du feuilletage et que l'algèbre des fonctions H -invariantes à support H -compact s'identifie avec les

fonctions Γ -invariantes sur S qui sont à support Γ -compact. Plus précisément dans ce cas, on a le théorème suivant :

Théorème 8. *La cohomologie de Hochschild de l'algèbre des fonctions différentiables H -invariantes qui sont à support H -compact est isomorphe à l'espace des courants de de Rham sur la transversale S qui sont Γ -invariants. De plus, grâce à l'homomorphisme vers l'algèbre produit croisé $C_c^\infty(M) \rtimes H$, le transport d'un courant de de Rham Γ -invariant sur S en un cocycle de Hochschild sur $C_c^\infty(M) \rtimes H$ coïncide avec la construction décrite dans [8].*

Illustrons plus précisément ce résultat. Soit Γ un sous-groupe discret cocompact de $PSL(2, \mathbb{R})$. Considérons la 5-variété non compacte $M_\Gamma := PSL(2, \mathbb{R}) \times_\Gamma \mathbf{H}$ munie de son feuilletage riemannien géodésible naturel $\mathcal{F}$ induit de l'action de $G = PSL(2, \mathbb{R})$ (ici la codimension est $q = 2$). L'algèbre de Fréchet $(C^\infty(M_\Gamma))_G$ s'identifie à $(C^\infty(\mathbf{H}))_\Gamma$ et ceci en associant à une fonction Γ -invariante sur $\mathbf{H}$ la fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(\overline{(g, x)}) := f(x).$$

L'isomorphisme

$$\Phi : C^1_{\mathcal{F}}(M_\Gamma) \rightarrow HH^1((C^\infty(\mathbf{H}))_\Gamma)$$

s'écrit alors

$$\Phi_C(f_0, f_1) = \langle C, \varphi \chi_G \wedge \tilde{f}_0 d\tilde{f}_1 \rangle$$

avec $\varphi \in C_c^\infty(M_\Gamma)$ satisfaisant $\int_G \varphi(g^{-1}m)dg = 1$ pour tout $m \in M_\Gamma$, et $\chi_G \in \Omega_G^3(M_\Gamma)$ orientant les orbites. En effet, il suffit de prendre une forme volume bi-invariante $\omega \in \Omega^3(PSL(2, \mathbb{R}))$ et pour χ_G l'unique 3-forme telle que

$$\pi^* \chi_G = \omega \times 1 \text{ avec } \pi : PSL(2, \mathbb{R}) \times \mathbf{H} \rightarrow M_\Gamma$$

le revêtement canonique. Il existe bien sûr un énoncé analogue pour la cohomologie cyclique.

Remerciements. Nos remerciements vont à Mohamed Boucetta, Aziz Elkacimi et James Heitsch pour les nombreuses discussions enrichissantes que nous avons eues. Ce travail a été effectué lors de la visite du second auteur à la Faculté des sciences et techniques de Marrakech ainsi qu'à l'Institut E. Schrödinger ; il tient à les remercier pour leur accueil chaleureux. Le premier auteur a bénéficié d'un soutien à la recherche mené dans le cadre du Programme thématique d'appui à la recherche scientifique PROTARS III.

English extended abstract. The transverse geometry of smooth foliations is described by a non commutative algebra of smooth functions on a smooth (non Hausdorff in general) groupoid. According to the nature of the problem in hand, one considers the holonomy groupoid, the monodromy groupoid or any other groupoid between them. The de Rham homology of the space of leaves does not make much sense in general as the holonomy pseudogroup action can be very wild. For some special classes of foliations, a counterpart for this homology is furnished by the Haefliger homology of invariant currents. This homology sits in a more fundamental homological object constructed by A. Connes and which is interesting for all foliations: the cyclic cohomology of the convolution algebra of the groupoid.

The cyclic cohomology is especially incisive in the index theory of foliations and when the space of leaves is highly singular [9, 12]. More than a tool, when the computation of this cohomology is accessible, it furnishes a way of proving index theorems

for compact singular spaces [45, 10, 11]. This is a consequence of the newly discovered excision property of cyclic homology [22, 50].

Computing such cohomologies in the whole generality is however a difficult problem closely related to famous conjectures [7]. Moreover, when the ambient manifold of the foliation is not compact but with a proper foliation, equivariant index theory can still be used to produce topological invariants [4]. In this case, the space of leaves is an orbifold and Connes' noncommutative algebra of the foliation is closely related to a simpler nontrivial commutative algebra, namely the algebra of smooth functions which are invariant under the action of the holonomy groupoid and which satisfy some support condition. Our aim in the present paper is to show that the Haefliger homology of the foliation corresponds to the cyclic cohomology of this simpler algebra. We also show that the morphism between the Haefliger homology and the cyclic cohomology of Connes' algebra is a functoriality morphism corresponding to the simpler "subalgebra" of invariant functions. So, we compute the cyclic cohomology, but also the Hochschild cohomology, of the algebra of invariant functions in terms of Haefliger currents and Haefliger homology. As a byproduct, we obtain a new point of view on the index theory of proper regular noncompact Lie group actions. From the geometric point of view, our computation gives a new insight into the homological properties of Haefliger homology such as Poincaré duality or excision, compare with [9].

In order to keep the statements of this paper in a reasonable and readable size, we have chosen to use Lie group actions instead of Lie groupoid actions, and restricted ourselves to this already important example. Let us describe now more precisely the main results of this paper. Assume that G is a connected Lie group which acts properly and regularly on a smooth manifold M . So G foliates M and we denote by p the dimension of the leaves, by q their codimension and by $n = p + q$ the dimension of the ambient manifold M . In general G is noncompact and so M is noncompact. Denote by Δ_G the modular function corresponding to a right invariant Haar measure. Using the proper action, a classical construction yields a smooth function φ on M whose support intersects compactly every G -compact subset of M and such that for any $x \in M$ (see Lemma 3),

$$\int_G \varphi(g^{-1}x) \Delta_G(g) dg = 1.$$

Denote by $\bar{A}_G$ the algebra of smooth functions on M which are G -invariant and whose support is G -compact. For any r -current C which is G -basic, we define a $(q - r + 1)$ -multilinear functional on $\bar{A}_G$ which is jointly continuous for the LF topology of $\bar{A}_G$, by setting

$$\Phi_C^{\varphi, \Delta_M, \chi_G}(f_0, \dots, f_{q-r}) := \langle C, \frac{\varphi}{\Delta_M} \chi_G \wedge f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_{q-r} \rangle,$$

where χ_G is a G -invariant p -form giving the orientation of the leaves (see Lemma 2) and Δ_M is a modular function on M . So Δ_M is a smooth positive function on M which satisfies

$$g^* \Delta_M = \Delta_G(g) \Delta_M, \quad \text{for all } g \in G.$$

A first result of this paper is Theorem 2 which states that $\Phi_C^{\varphi, \Delta_M, \chi_G}$ is a Hochschild cocycle whose Hochschild class is independent of the choices. Moreover, we prove in Theorem 3 that the correspondence $C \mapsto \Phi_C^{\varphi, \Delta_M, \chi_G}$ induces an isomorphism of the basic currents with Hochschild cohomology.

Now, denote by κ_G the mean curvature associated with the G -invariant metric and corresponding to the foliation of M [58] and let d_G be the twisted differential given by

$$d_G = d + \kappa_G \wedge \cdot,$$

then while κ_G is not closed in general, we still have $d_G^2 = 0$ in restriction to basic currents. The homology of basic currents with respect to the differential d_G is denoted $H_*^{\mathcal{F}, \kappa}(M)$ and the space of d_G -closed basic currents is denoted by $Z_*^{\mathcal{F}, \kappa}(M)$. Our computation of the cyclic cohomology $HC^*(\bar{A}_G)$ of the algebra $\bar{A}_G$ then yields (see Theorem 4)

$$HC^{q-r}(\bar{A}_G) \simeq Z_r^{\mathcal{F}, \kappa}(M) \bigoplus \bigoplus_{j>0} H_{r-2j}^{\mathcal{F}, \kappa}(M).$$

This result implies a complete computation of the periodic cyclic cohomology of the foliation

$$HP^{q-r}(\bar{A}_G) \simeq \bigoplus_{j \geq 0} H_{r-2j}^{\mathcal{F}, \kappa}(M).$$

In the two last sections, we investigate the relation between our computation and the cyclic cohomology of the noncommutative crossed product algebra of the action, and give examples. More precisely, we prove Theorem 7 which reduces a well known correspondence between Haefliger homology and cyclic cohomology of crossed product to a functoriality morphism. This is obtained via our previous computation.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Abels, *Parallelizability of proper actions, global K -slices and maximal compact subgroups*, Math. Ann. **212** (1974/75), 1–19
2. A. Abouqateb, *Courants invariants par une action propre*, Manuscripta Math. **98** (1999), 349–362.
3. A. Abouqateb et A. El Kacimi Alaoui, *Fonctionnelles invariantes et courants basiques*, Studia Math. **143** (2000), 199–219.
4. M. F. Atiyah, *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, Colloque « Analyse et Topologie » en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974), Asterisque No. 32–33, Soc. Math. France, Paris, 1976, pp. 43–72.
5. M. F. Atiyah, *K -theory*, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989.
6. M. F. Atiyah et I. Singer, *The index of elliptic operators. IV*, Ann. of Math. (2) **93** (1971), 119–138.
7. P. Baum, A. Connes et N. Higson, *Classifying space for proper actions and K -theory of group C^* -algebras*, C^* -algebras: 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993), Contemp. Math. 167, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 240–291.
8. M.-T. Benaméur, *A higher Lefschetz formula for flat bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 119–142.
9. M.-T. Benaméur et J. L. Heitsch, *Index theory and non-commutative geometry. I. Higher families index theory*, K -Theory **33** (2004), 151–183.
10. M.-T. Benaméur et V. Nistor, *Homology of complete symbols and noncommutative geometry*, Quantization of singular symplectic quotients, Progr. Math., 198, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 21–46.
11. M.-T. Benaméur et V. Nistor, *Homology of algebras of families of pseudodifferential operators*, J. Funct. Anal. **205** (2003), 1–36.

12. M.-T. Benameur et V. Nistor, *Residues and homology for pseudodifferential operators on foliations*, Math. Scand. **94** (2004), 75–108.
13. Y. Benoist, *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*, Ann. of Math. (2) **144** (1996), 315–347.
14. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques. Livre III. Topologie générale*, Paris, Hermann 1960.
15. J.-L. Brylinsky et E. Getzler, *The homology of algebras of pseudodifferential symbols and the noncommutative residue*, K-Theory **1** (1987), 385–403.
16. G. Cairns, *A general description of totally geodesic foliations*, Tohoku Math. J. (2) **38** (1986), 37–55.
17. A. Connes, *Cours du Collège de France*, 1994/95.
18. A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, San Diego, CA, 1994.
19. A. Connes, *Noncommutative differential geometry*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 62 (1985), 257–360.
20. A. Connes et G. Skandalis, *The longitudinal index theorem for foliations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), 1139–1183.
21. J. Cuntz, *Bivariate K-Theorie für lokalkonvexe Algebren und der Chern-Connes-Charakter. (German) [Bivariant K-theory for locally convex algebras and the Chern-Connes character]*, Doc. Math. **2** (1997), 139–182.
22. J. Cuntz et D. Quillen, *Excision in bivariant periodic cyclic cohomology*, Invent. Math. **127** (1997), no. 1, 67–98.
23. G. de Rham, *Variétés différentiables : formes, courants, formes harmoniques*, Hermann, Paris, 1960.
24. F. Delacroix, *Invariant currents and automorphic forms of an elementary Kleinian group*, Hokkaido Math. J. **30** (2001), 405–430.
25. J. Dieudonné, *Eléments d'analyse. Tome III, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXIII*, Gauthier-Villars, Paris, 1970.
26. A. El Kacimi-Alaoui, *Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications*, Compositio Math. **73** (1990), 57–106.
27. E. Freitag, *Hilbert modular forms*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
28. E. Ghys, *Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **34** (1984), 203–223.
29. V. Guillemin et S. Sternberg, *Geometric asymptotics*, Mathematical Surveys, No. 14, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977.
30. A. Haefliger, *Some remarks on foliations with minimal leaves*, J. Differential Geom. **15** (1980), 269–284.
31. A. Haefliger et B. Li, *Currents on the circle invariant by a Fuchsian group*, Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981), Lecture Notes in Math., 1007, Springer, Berlin, 1983, pp. 369–378.
32. J. Heitsch, *Bismut superconnections and the Chern character for Dirac operators on foliated manifolds*, K-Theory **9** (1995), 507–528.
33. J. Heitsch et C. Lazarov, *A general families index theorem*, K-Theory **18** (1999), 181–202.
34. G. Hochschild, *The structure of Lie groups*, Holden-Day, San Francisco, 1965.
35. S. Illman et M. Kankaanrinta, *A new topology for the set $C^{\infty,G}(M, N)$ of G -equivariant maps*, Math. Ann. **316** (2000), 139–168.

36. S. Illman et M. Kankaanrinta, *Three basic results for real analytic proper G -manifolds*, Math. Ann. **316** (2000), 169–183.
37. T. Kobayashi, *Proper action on homogenous space of reductive type*, Math. Ann. **285** (1989), 249–263.
38. T. Kobayashi, *Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds*, Algebraic and analytic methods in representation theory (Sønderborg, 1994), Perspect. Math., 17, Academic Press, San Diego, CA, 1997, pp. 99–165.
39. T. Kobayashi, *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups*, J. Lie Theory **6** (1996), 147–163.
40. J. L. Koszul, *Lectures on groups of transformations*, Notes by R. R. Simha and R. Sridharan. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 32, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1965.
41. R. S. Kulkarni, *Proper actions and pseudo-Riemannian space forms*, Adv. in Math. **40** (1981), 10–51.
42. R. Lipsman, *Proper actions and a compactness condition*, J. Lie Theory **5** (1995), 25–39.
43. J. L. Loday, *Cyclic Homology*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
44. G. A. Margulis, *Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients*, Bull. Soc. Math. France **125** (1997), 447–456.
45. R. Melrose et V. Nistor, *Homology of pseudodifferential operators I. Manifolds with boundary*, À paraître dans Amer. J. Math.
46. P. W. Michor, *Basic differential forms for actions of Lie groups. II*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2175–2177.
47. P. Molino, *Riemannian foliations*, Birkhäuser, Boston, MA, 1988.
48. R. Narasimhan, *Several complex variables*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago, 1971.
49. R. Nest et B. Tsygan, *Algebraic index theorem for families*, Adv. Math. **113** (1995), 151–205.
50. V. Nistor, *A bivariant Chern-Connes character*, Ann. of Math. (2) **138** (1993), 555–590.
51. R. S. Palais, *On the existence of slices for non-compact Lie groups*, Ann. of Math. (2) **73** (1961), 295–323.
52. J. F. Plante, *Foliations with measure preserving holonomy*, Ann. of Math. (2) **102** (1975), 327–361.
53. H. Rummmler, *Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts*, Comment. Math. Helv. **54** (1979), 224–239.
54. D. Ruelle et D. Sullivan, *Current, flows and diffeomorphisms*, Topology **14** (1975), 319–327.
55. I. Satake, *The Gauss-Bonnet theorem for V -manifolds*, J. Math. Soc. Japan **9** (1957), 464–492.
56. L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
57. V. Sergiescu, *Cohomologie basique et dualité des feuilletages riemanniens*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **35** (1985), 137–158.
58. P. Tondeur, *Geometry of foliations*, Monographs in Mathematics, 90, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
59. J. A. Wolf, *The Clifford-Klein space forms of indefinite metric*, Ann. of Math. (2) **75** (1962), 77–80.

- 60. A. G. Wasserman, *Equivariant differential topology*, Topology **8** (1969), 127–150.
- 61. A. Zeghib, *On closed anti de Sitter spacetimes*, Math. Ann. **310** (1998), 695–716.
- 62. R. Zimmer, *Discrete groups and non-Riemannian homogeneous spaces*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 159–168.

A. ABOUQATEB
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
B.P. 549 GUÉLIZ MARRAKECH, MAROC
abouqateb@fstg – marrakech.ac.ma

M.-T. BENAMEUR
UNIVERSITÉ DE METZ
UMR 7122 DU CNRS
METZ, FRANCE
benameur@math.univ – metz.fr