

## SYSTÈMES FONDAMENTAUX D'UNITÉS DE CERTAINES FAMILLES DE CORPS DE NOMBRES QUARTIQUES

M'HAMMED ZIANE

**RÉSUMÉ.** Nous déterminons un système fondamental  $\mathcal{S}$  d'unités pour le corps  $K = \mathbb{Q}(\omega)$ ,  $\omega$  étant une solution du polynôme  $X^4 + d^{-2}M_6X^2 - M_4$  où  $M_6 = D^6 + 6D^4d + 9D^2d^2 + 2d^3$  et  $M_4 = D^4 + 4D^2d + 2d^2$ , avec  $d, D \in \mathbb{N}$  et  $d|D$  :

$$\mathcal{S} = \left\{ 1 + \frac{D}{d}\omega - \frac{\omega^2}{d}, 1 - \frac{D}{d}\omega - \frac{\omega^2}{d} \right\}.$$

**ABSTRACT.** We give a fundamental system of units  $\mathcal{S}$  of the field  $K = \mathbb{Q}(\omega)$ ,  $\omega$  being a root of the polynomial  $X^4 + d^{-2}M_6X^2 - M_4$  where  $M_6 = D^6 + 6D^4d + 9D^2d^2 + 2d^3$  and  $M_4 = D^4 + 4D^2d + 2d^2$ , with  $d, D \in \mathbb{N}$ , and  $d|D$ :

$$\mathcal{S} = \left\{ 1 + \frac{D}{d}\omega - \frac{\omega^2}{d}, 1 - \frac{D}{d}\omega - \frac{\omega^2}{d} \right\}.$$

**1. Introduction.** W. Ljunggren [3] a donné une procédure pour construire un système fondamental d'unités d'un corps quartique pur. Elle se généralise aisément à tout corps  $K = \mathbb{Q}(\omega)$  de degré 4 ayant un sous-corps quadratique réel  $k$  et dont le groupe des unités est de rang 2. Pour tout élément  $\xi$  de  $K$ , appelons  $\xi'$  le conjugué de  $\xi$ , la notation  $'$  dénotant l'opération « conjugaison » qui s'avère fixer  $k$  et seulement  $k$ .

**Théorème.** Soit  $K$  un corps quartique réel. Soit  $\eta$  l'unité fondamentale du sous-corps quadratique réel  $k$  de  $K$ ,  $\xi$  une unité de  $K$  telle que  $\xi\xi' = \pm\eta$  (ou  $\pm\eta^{-1}$ ), et  $\varepsilon_1$  la plus petite unité  $> 1$  de  $K$  vérifiant  $\varepsilon_1\varepsilon_1' = 1$ . Alors  $\{\xi, \varepsilon_1\}$  est un système fondamental d'unités du corps  $K$ .

Le but de cette note est d'annoncer un résultat qui fera l'objet d'une publication ultérieure et qui provient de ma thèse de doctorat [Z].

**Théorème.** Considérons le corps  $K = \mathbb{Q}(\omega)$ ,  $\omega$  étant solution du polynôme

$$f(X) = X^4 + d^{-2}M_6X^2 - M_4$$

où

$$\begin{cases} M_6 = D^6 + 6D^4d + 9D^2d^2 + 2d^3, \\ M_4 = D^4 + 4D^2d + 2d^2 \end{cases}$$

---

Reçu le 22 septembre 2003 et, sous forme définitive, le 31 janvier 2005.

avec  $d, D \in \mathbb{N}$  et  $d|D$ . Définissons les unités  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  par

$$\varepsilon = 1 + \frac{D}{d}\omega - \frac{\omega^2}{d} \quad \text{et} \quad \varepsilon' = 1 - \frac{D}{d}\omega - \frac{\omega^2}{d}.$$

Supposons que  $D^2/d$  est pair et que  $M = (d^{-4}M_6^2 + 4M_4)/4d^2$  est libre de carrés. Alors  $\{\varepsilon, \varepsilon'\}$  est un système fondamental d'unités de  $K$ . Il en est de même pour  $\{\varepsilon, \eta\}$  où  $\eta$  est l'unité fondamentale du sous-corps quadratique  $k = \mathbb{Q}(\omega^2) = \mathbb{Q}(\sqrt{M})$  de  $K$ .

La résolvante cubique de  $f(X)$  est  $(X - (d^{-2}M_6))(X^2 + 4M_4)$ , et on en déduit que le groupe de Galois de  $f(X)$  est le groupe diédral  $D_4$  d'ordre 8. Inspiré par une idée de L. Bernstein [1], C. Levesque [2] a conjecturé que  $\{\varepsilon, \varepsilon'\}$  est un système fondamental d'unités de  $K$ .

**2. Un système fondamental d'unités de  $\mathbb{Q}(\omega)$ .** Posons  $\Delta = d^{-4}M_6^2 + 4M_4$ ; alors  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ . Avec  $T = D^2/d$ , nous avons  $\Delta/d^2 = T^6 + 12T^5 + 54T^4 + 112T^3 + 109T^2 + 52T + 12$ . Si  $T$  est pair, alors  $\Delta/d^2 \equiv 0 \pmod{4}$ . Si  $T$  est impair, alors  $\Delta/d^2 \equiv 0 \pmod{16}$ . Supposons désormais que  $T$  est pair et posons  $S = D^2/(2d)$ . Soit

$$M = \frac{d^{-4}M_6^2 + 4M_4}{4d^2} = \frac{\Delta}{4d^2} = 16S^6 + 96S^5 + 216S^4 + 224S^3 + 109S^2 + 26S + 3$$

libre de carrés. Alors  $M \equiv 2$  ou  $3 \pmod{4}$  et le développement en fraction continue de  $\sqrt{M} = \sqrt{\Delta/4d^2}$  est périodique de longueur  $\ell = 6$ .

L'unité fondamentale du sous-corps quadratique  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{M})$ , obtenue via les fractions continues, est alors

$$\eta = A + B\sqrt{M} = \left(A + \frac{BM_6}{2d^3}\right) + \left(\frac{B}{d}\right)\omega^2,$$

avec  $A = 32S^6 + 192S^5 + 440S^4 + 480S^3 + 256S^2 + 64S + 7$  et  $B = 8S^3 + 24S^2 + 20S + 4$ .

Remarquons d'abord que

$$N_{K/k}(\varepsilon) = \varepsilon\varepsilon' = A - B\Omega = \eta^{-1}.$$

Après un long calcul à la Stender effectué comme en [St], nous montrons que  $\varepsilon_1 = \varepsilon^2\eta$  est la plus petite unité  $> 1$  du corps  $K = \mathbb{Q}(\omega)$  vérifiant  $\varepsilon_1\varepsilon'_1 = 1$ . Alors d'après le théorème de Ljungren,  $\{\varepsilon, \varepsilon_1\}$  est un système fondamental d'unités de  $K = \mathbb{Q}(\omega)$ , et nous en déduisons qu'il en est de même pour  $\{\varepsilon, \varepsilon'\}$  et pour  $\{\varepsilon, \eta\}$ .

**English extended abstract.** The purpose of this note is to outline the proof of the following theorem.

**Theorem.** Consider the field  $K = \mathbb{Q}(\omega)$ ,  $\omega$  being a root of the polynomial

$$f(X) = X^4 + d^{-2}M_6X^2 - M_4$$

where

$$\begin{cases} M_6 = D^6 + 6D^4d + 9D^2d^2 + 2d^3, \\ M_4 = D^4 + 4D^2d + 2d^2 \end{cases}$$

with  $d, D \in \mathbb{N}$  and  $d|D$ . Define the units  $\varepsilon$  and  $\varepsilon'$  by

$$\varepsilon = 1 + \frac{D}{d}\omega - \frac{\omega^2}{d} \quad \text{and} \quad \varepsilon' = 1 - \frac{D}{d}\omega - \frac{\omega^2}{d}.$$

Suppose that  $D^2/d$  is even and that  $M = (d^{-4}M_6^2 + 4M_4)/4d^2$  is square-free. Then  $\{\varepsilon, \varepsilon'\}$  is a fundamental system of units of  $K$ . The same holds true for  $\{\varepsilon, \eta\}$  where  $\eta$  is the fundamental unit of the quadratic subfield  $k = \mathbb{Q}(\omega^2) = \mathbb{Q}(\sqrt{M})$  of  $K$ .

The proof is achieved by using the equivalent of a result of Ljunggren for a quartic field having a real quadratic subfield  $k$  and whose unit rank is 2. For any element  $\xi$  of  $K$ , denote by  $\xi'$  the conjugate of  $\xi$ , the notation  $'$  denoting the operation “conjugate” which fixes  $k$  and only  $k$ .

**Theorem.** Let  $K$  be a real quartic field. Let  $\eta$  be the fundamental unit of the quadratic subfield  $k$  of  $K$ ,  $\xi$  a unit of  $K$  such that  $\xi\xi' = \pm\eta$  (or  $\pm\eta^{-1}$ ), and  $\varepsilon_1$  the smallest unit  $> 1$  of  $K$  verifying  $\varepsilon_1\varepsilon'_1 = 1$ . Then  $\{\xi, \varepsilon_1\}$  is a fundamental system of units of  $K$ .

Let  $S = D^2/(2d)$  with  $D^2/d$  even and suppose that  $M$  is square-free. The fundamental unit  $\eta$  of the quadratic subfield  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{M})$  is obtained via a continued fraction expansion. After noting that  $N_{K/k}(\varepsilon) = \varepsilon\varepsilon' = \eta^{-1}$ , and proving that  $\varepsilon_1 = \varepsilon^2\eta$  is the smallest unit  $> 1$  of  $K$  verifying  $\varepsilon_1\varepsilon'_1 = 1$ , we deduce from Ljunggren’s theorem that  $\{\varepsilon, \varepsilon_1\}$  is a fundamental system of units of  $K = \mathbb{Q}(\omega)$ . The same conclusion holds true for  $\{\varepsilon, \varepsilon'\}$  and for  $\{\varepsilon, \eta\}$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

1. L. Bernstein, *Truncated units in infinitely many algebraic number fields of degree  $n \geq 4$* , Math. Ann. **213** (1975), 275–279.
2. C. Levesque, *Truncated units*, J. Number Theory **41** (1992), 48–68.
3. W. Ljunggren, *Über die Lösung einiger unbestimmten Gleichungen vierten Grades*, Avh. Norske Vid.-Akad. Oslo, I. Mat.-Nat. **K1** (1935), 1–35.
4. H.-J. Stender, “*Verstummelte*” Grundeinheiten für biquadratische und bikubische Zahlkörper, Math. Ann. **232** (1978), 55–64.
5. M. Ziane, *Systèmes fondamentaux d’unités*, Thèse de doctorat; Québec, Université Laval, 1998.

M. ZIANE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ MOHAMED 1<sup>er</sup>

FACULTÉ DES SCIENCES

B. P. 524, OUJDA, MAROC

COURRIEL : ziane@sciences.univ-oujda.ac.ma