

SUR LA HAUTEUR p -ADIQUE DANS UNE FAMILLE DE COURBES ELLIPTIQUES

CHRISTIAN WUTHRICH

RÉSUMÉ. Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$. Nous présentons quelques conjectures liées à la distribution des valuations du régulateur p -adique lorsque p varie dans l'ensemble des nombres premiers pour lesquels E a bonne réduction ordinaire. Dans une deuxième partie, la variation de la hauteur p -adique dans une famille de courbes elliptiques est analysée et ceci nous permet de montrer que cette hauteur est non-nulle pour une infinité de courbes.

ABSTRACT. We present first a few conjectures on the canonical p -adic regulator of an elliptic curve E defined over $\mathbb{Q}$. As p varies in the set of primes for which E has good ordinary reduction, the valuations of the p -adic regulator should hardly ever be different from the rank r of the Mordell-Weil group $E(\mathbb{Q})$ if p is non-anomalous for E or from $r - 2$ if the prime is anomalous. One can deduce another conjecture on the distribution of the rank of the Mordell-Weil group over the $\mathbb{Z}_p$ -extensions as p varies. In the second part, we announce some results on the variation of the p -adic height in a family of elliptic curves and illustrate them with a concrete example. One can deduce that the p -adic height of a point varying in this family is non-zero for all except maybe for a single curve in the family.

1. Version p -adique de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. Soit E une courbe elliptique définie sur le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et soit p un nombre premier impair tel que E ait une bonne réduction ordinaire en p . Afin de pouvoir énoncer une version p -adique de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer pour la fonction L p -adique, il faut tout d'abord construire un analogue p -adique de la hauteur canonique de Néron–Tate, c'est-à-dire une fonction quadratique

$$h_p: E(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}_p$$

telle que

$$\langle P, Q \rangle_p = h_p(P + Q) - h_p(Q) - h_p(P)$$

soit une forme bilinéaire. Ainsi on pourrait espérer qu'une formule de la forme

$$L_p(E, s) \sim \frac{\text{Reg}_p \cdot \# \text{III}(E/\mathbb{Q})(p) \cdot N_p^2 \cdot \prod c_v}{(\#E(\mathbb{Q})_{\text{tors}})^2} \cdot (s-1)^{r(E/\mathbb{Q})} + \dots$$

Reçu le 16 juillet 2003 et, sous forme définitive, le 31 janvier 2005.

soit valable, où Reg_p , le régulateur p -adique de $E/\mathbb{Q}$, désigne le déterminant de $(\langle P_i, P_j \rangle_p)$ quand P_i parcourt un ensemble de générateurs de $E(\mathbb{Q})$ modulo torsion. Les autres notations sont standard, comme par exemple N_p pour le nombre de points de la réduction de la courbe modulo p et $r(E/\mathbb{Q})$ pour le rang de la courbe, etc. Pour les détails, nous renvoyons à [6].

2. Construction de la hauteur p -adique. Nous fixons une équation de Weierstrass

$$y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6$$

pour E avec des coefficients entiers $a_i \in \mathbb{Z}$. Un point non-nul P de $E(\mathbb{Q})$ s'écrit alors comme

$$P = (x(P), y(P)) = \left(\frac{a(P)}{e(P)^2}, \frac{b(P)}{e(P)^3} \right)$$

si on exprime les coordonnées en fractions réduites d'entiers. Néron [7] et Bernardi [2] étaient les premiers à donner des définitions de hauteurs p -adiques sur une courbe elliptique, mais ce n'est qu'après les travaux de Perrin-Riou [8] et Schneider [9] qu'une hauteur p -adique *canonique* a été trouvée pour le cas de la réduction ordinaire. Dans [5], cette hauteur canonique est exprimée à l'aide de la fonction sigma p -adique canonique; voici l'énoncé.

Théorème 2.1. (MAZUR-TATE) *Il existe une unique fonction en $t = -\frac{x}{y}$ de la forme*

$$\sigma_p(t) = t + \text{termes d'ordre supérieur} \in \mathbb{Z}_p[[t]]$$

telle que

$$h_p(P) = \log_p \left(\frac{e(P)}{\sigma_p(P)} \right)$$

soit la hauteur p -adique canonique de P pour tout point P de $E(\mathbb{Q})$ ayant bonne réduction en toute place et tel que $t(P) \in p\mathbb{Z}_p$.

Pour que la conjecture sur le premier terme de la série de la fonction L p -adique ait un sens, il faut que le régulateur Reg_p soit non-nul. Autrement dit, on a la conjecture suivante.

Conjecture 2.2. (SCHNEIDER) *La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ est non-dégénérée.*

Bien qu'elle se vérifie facilement dans un cas concret, cette conjecture n'est toujours pas démontrée dans le cas général, sauf pour les courbes elliptiques définies sur $\mathbb{Q}$ à multiplication complexe de rang 1; voir l'article de Bertrand [3].

3. Autres conjectures. Grâce à des milliers de calculs de hauteurs p -adiques à l'aide de `pari-gp` [1] et des arguments heuristiques dans les cas $p = 3$ et 5, nous formulons la conjecture suivante.

Conjecture 3.1. *L'expression*

$$\frac{\text{Reg}_p \cdot N_p^2}{p^r}$$

est une unité dans $\mathbb{Z}_p^\times$ pour tous les nombres premiers p pour lesquels E a bonne réduction ordinaire à l'exception d'un ensemble de densité zéro.

Autrement dit, la valuation de $h_p(P)$ est très souvent 1 pour un point P avec bonne réduction en toute place et tel que $t(P)$ ait valuation 1. En fait, on pourrait même formuler des conjectures plus précises en termes de relations asymptotiques.

À l'aide de la théorie d'Iwasawa pour la courbe E , on peut de cette conjecture en déduire une autre.

Conjecture 3.2. *Supposons que le groupe de Tate-Shafarevitch $\text{III}(E/\mathbb{Q})$ de E soit fini. Soit $\mathbb{Q}^{p\text{-cyc}}$ l'unique $\mathbb{Z}_p$ -extension de $\mathbb{Q}$. Alors le rang du groupe de Mordell-Weil $E(\mathbb{Q}^{p\text{-cyc}})$ est égal au rang de $E(\mathbb{Q})$ pour tout premier p où E a bonne réduction ordinaire à l'exception d'un ensemble de densité zéro.*

Il est important de noter que le rang de $E(\mathbb{Q}^{p\text{-cyc}})$ est fini d'après un résultat profond de Kato [4]. En plus, on peut ajouter à la conjecture que $\text{III}(E/\mathbb{Q}^{p\text{-cyc}})$ est fini dans le cas d'égalité des rangs.

4. Variation de la hauteur dans des familles de courbes elliptiques. Pour illustrer le genre de résultat que l'on obtient quand on fait varier la courbe elliptique E plutôt que le nombre premier p , voici un exemple. Soit $\mathcal{E}$ la surface elliptique définie par

$$\mathcal{E}: y^2 + y = x^3 + (13T - 1) \cdot x.$$

Elle admet une section d'ordre infini $P = (0, 0)$. Lorsque l'on spécialise à une fibre en posant T égal à un entier, on obtient une courbe $\mathcal{E}_T$ avec un point $P_T \in \mathcal{E}_T(\mathbb{Q})$. On aimerait analyser la variation de la hauteur 13-adique de P_T lorsque T varie dans les entiers. Déjà, il faut vérifier que chaque courbe $\mathcal{E}_T$ a bonne réduction ordinaire en $p = 13$; ce qui est le cas ici et, en plus, la réduction est constante. Puis, on aimerait utiliser la fonction sigma 13-adique de Mazur et Tate. Par chance, le point P_T sur $\mathcal{E}_T$ a bonne réduction en toute place pour tout $T \in \mathbb{Z}$. Puis on vérifie que $16P_T$ satisfait à $t(16P_T) \in 13 \cdot \mathbb{Z}_{13}$. Le calcul de la hauteur 13-adique donne le résultat suivant :

$$\frac{1}{13} \cdot h_{13}(P_T) = (6 \cdot 13 + \mathbf{O}(13^2)) + (11 + 8 \cdot 13 + \mathbf{O}(13^2)) \cdot T + (8 \cdot 13 + \mathbf{O}(13^2)) \cdot T^2 + \mathbf{O}(13^2)$$

pour tout entier $T \in \mathbb{Z}$. Il est maintenant facile de vérifier que la valuation de $h_{13}(P_T)$ est égale à 1 pour tout entier T qui n'est pas divisible par 13. En fait, ce calcul est un exemple du théorème suivant.

Théorème 4.1. *Soit $\mathcal{E}$ une équation de Weierstrass avec coefficients dans $\mathbb{Z}[T]$ et soit p un nombre premier impair tel que $\mathcal{E}_T$ ait bonne réduction ordinaire en p pour tout $T \in \mathbb{Z}$. On suppose que P est une section non-nulle dont un multiple Q a bonne réduction en toute place pour tout $T \in \mathbb{Z}$ et tel que $\gamma(Q, T) = 1$ pour tout $T \in \mathbb{Z}$. Alors $h_p(P_T)$ appartient à l'algèbre de Tate $\mathbb{Z}_p\{T\}$ des séries formelles dans $\mathbb{Z}_p[[T]]$ dont les coefficients convergent vers zéro.*

La condition $\gamma(Q, T) = 1$ est une restriction technique qui dit que le dénominateur du point Q_T s'obtient en remplaçant T dans l'expression polynomiale qui représente

le dénominateur de Q . Elle est vérifiée, par exemple, lorsque P a des coordonnées constantes. Pour les détails, ainsi que la preuve, nous renvoyons à [10].

Comme conséquence du théorème et du théorème de préparation de Weierstrass, on peut conclure que $h_{13}(P_T)$ ci-dessus n'a qu'un seul zéro $T_0 = 3 \cdot 13 + \mathbf{O}(13^2) \in \mathbb{Z}_{13}$ comme fonction en $T \in \mathbb{Z}_{13}$. On a alors vérifié la conjecture de Schneider pour toute courbe $\mathcal{E}_T$ de cette famille à l'exception peut-être d'une seule $\mathcal{E}_{T_0}$, mais il semble bien que T_0 n'appartienne pas à $\mathbb{Z}$. Ici aussi on peut énoncer plus généralement le théorème qui suit.

Théorème 4.2. *Soit $\mathcal{E}$ et p comme auparavant et soit $P^{(1)}, \dots, P^{(g)}$ des sections qui satisfont les conditions du théorème précédent. Alors soit que la fonction $T \mapsto \text{Reg}_p(P_T^{(1)}, \dots, P_T^{(g)})$ est constante nulle, soit qu'elle n'a qu'un nombre fini de zéros en $\mathbb{Z}$.*

On peut en déduire d'autres résultats comme le fait qu'il existe des hauteurs p -adiques arbitrairement petites, comme par exemple en approximant T_0 :

$$\begin{array}{ll} T \equiv 0 \pmod{13} & h_{13}(P_T) \equiv 0 \pmod{13^2} \\ T \equiv 3 \cdot 13 \pmod{13^2} & h_{13}(P_T) \equiv 0 \pmod{13^3} \\ \dots & \dots \end{array}$$

Ceci montre aussi que l'on peut trouver des courbes pour lesquelles il y a des hauteurs p -adiques non-canoniques très proches de la hauteur canonique qui sont dégénérées. Ainsi la preuve de la conjecture de Schneider passe probablement par un argument subtil de transcendance.

English extended abstract. Let E be an elliptic curve defined over $\mathbb{Q}$ and p a prime such that E has good and ordinary reduction at p . The p -adic version of the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer conjecture relates the order of vanishing of a certain p -adic L -function at $s = 1$ to the rank r of the Mordell-Weil group $E(\mathbb{Q})$. Moreover it predicts what the leading coefficient should be in terms of certain invariants associated to E such as the p -adic regulator of E . The latter is defined using the canonical p -adic height $h_p: E(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}_p$ constructed and considered by Schneider, Perrin-Riou, Mazur and Tate. Unfortunately it is not even known whether the bilinear form associated to the p -adic height is non-degenerate except for special cases.

We propose a conjecture concerning the values of the p -adic regulators as p varies among the ordinary primes for a fixed elliptic curve E . It predicts that the valuations of the p -adic regulator should hardly ever be different from the rank r if p is a non-anomalous prime for E or from $r - 2$ if p is anomalous. This first conjecture can be used to formulate a related conjecture about the ranks of the Mordell-Weil group of E over the cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ -extensions of $\mathbb{Q}$ as p varies. In fact, the rank should hardly ever be bigger than the rank r over $\mathbb{Q}$.

The second part of this article concerns the other possible variation. This time we fix the prime p and we consider the variation of the p -adic height in a family of elliptic curves all having good and ordinary reduction at p . Let $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}^1$ be an elliptic surface and P a section of $\mathcal{E}$. Under certain conditions one obtains that the function $T \mapsto h_p(P_T)$ as T varies in $\mathbb{Z}$ can be written as a power series in $\mathbb{Z}_p[[T]]$ whose coefficients tend to zero.

In particular the p -adic height is either constant zero or it admits only a finite number of integer values T for which $h_p(P_T)$ is zero. This is illustrated with a concrete example.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Batut, D. Bernardi, H. Cohen, M. Olivier et K. Belabas, *PARI/GP*, 1999 (<http://pari.math.u-bordeaux.fr/>).
2. D. Bernardi, *Hauteur p -adique sur les courbes elliptiques*, Seminar on Number Theory, Paris (1979–80), 1–14; Progr. Math., vol. 12, Birkhäuser, Boston, Mass., 1981.
3. D. Bertrand, *Valeurs de fonctions θ et hauteurs p -adiques*, Seminar on Number Theory, Paris 1979–80, Progr. Math. (1979–80), 1–11; Progr. Math., vol. 22, Birkhäuser, Boston, Mass., 1981.
4. K. Kato, *p -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular curves*, Astérisque **295** (2004), 117–290.
5. B. Mazur et J. Tate, *The p -adic sigma function*, Duke Math. J. **62** (1991), 663–688.
6. B. Mazur, J. Tate et J. Teitelbaum, *On p -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math. **84** (1986), 1–48.
7. A. Néron, *Hauteurs et fonctions θ* , Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **46** (1976), 111–135.
8. B. Perrin-Riou, *Descente infinie et hauteur p -adique sur les courbes elliptiques à multiplication complexe*, Invent. Math. **70** (1982/83), 369–398.
9. P. Schneider, *p -adic height pairings. I*, Invent. Math. **69** (1982), 401–409.
10. C. Wuthrich, *On p -adic heights in families of elliptic curves*, J. London Math. Soc. (2) **70** (2004), 23–40.

C. WUTHRICH

SECTION DE MATHÉMATIQUES CSAG

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE

1015 LAUSANNE

SUISSE

COURRIEL : christian.wuthrich@epfl.ch