

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRINOMIALES

KAOUTAR LAMRINI UAHABI ET MOHAMMED ZAOUI

RÉSUMÉ. Nous étudions les solutions des équations trinomiales

$$z^n = \alpha z^k + (1 - \alpha),$$

où z est un nombre complexe, n et k sont deux entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n-1$ et α est un réel quelconque. Elles permettent notamment le coloriage du disque unité. Une étude systématique de ces familles de courbes solutions des équations trinomiales est établie. Du fait qu'elles constituent des fractals, elles illustrent un autre exemple de lien entre la géométrie fractale et la théorie des nombres, comme le fait l'ensemble triadique de Cantor.

ABSTRACT. We study the solutions of the trinomial equations

$$z^n = \alpha z^k + (1 - \alpha),$$

where $z = \rho e^{i\theta}$ is a complex number, n and k are two integers verifying $k < n$ and α is a real number. One systematic study of these families of arc solutions of the trinomial equations is investigated. Taking α any real number, we point out all solutions of the trinomial equation, i.e., the sixteen types of families of trinomial arcs.

1. Introduction. Dans ce travail, nous nous proposons d'étudier l'équation trinomiale

$$(1.1) \quad z^n = \alpha z^k + (1 - \alpha)$$

où z est un nombre complexe, n et k sont des entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n-1$ et α est un paramètre réel.

En fait, les travaux sur les équations trinomiales remontent à la fin du dix-neuvième siècle, mais ce n'est qu'en 1980 qu'une première discussion complète de ces équations a été réalisée par H. Fell [5]. Elle est arrivée à établir une large description de toutes les trajectoires des racines de l'équation (1.1). Ces trajectoires, appelées arcs trinomiaux, sont des arcs continus correspondants à un paramètre α qui est soit entre 0 et 1, ou entre 1 et $+\infty$ ou encore entre $-\infty$ et 0. Chacun de ces arcs peut être exprimé en coordonnées polaires (ρ, θ) par une fonction $\rho(\theta)$, où θ satisfait certaines conditions. Cependant, Fell n'a pas pu résoudre le problème de la monotonie de la fonction $\rho(\theta)$. Par la suite,

Reçu le 22 septembre 2003 et, sous forme définitive, le 31 janvier 2005.

cette question de monotonie a été résolue en 1996 par S. Dubuc et M. Zaoui [3] pour certaines familles d'arcs associées au cas $0 < \alpha < 1$. Quant à notre travail, il a consisté à régler le problème de la monotonie des arcs trinomiaux dans sa totalité.

D'autre part, un lien entre la géométrie fractale et la théorie des nombres, bien que ces deux disciplines paraissent éloignées l'une de l'autre, a été établi par S. Dubuc et A. Malik [2] en 1992, concernant le coloriage du disque unité, qui est déduit directement de certaines familles d'arcs trinomiaux solutions de l'équation (1.1) dans le cas où $0 < \alpha < 1$. D'ailleurs, il existe d'autres exemples de lien entre ces deux disciplines, quoiqu'on s'en tiendra par la suite à l'exemple de l'ensemble triadique de Cantor.

2. Coloriage du disque unité. Dans [2], Dubuc et Malik remarquent que l'enveloppe convexe des puissances entières $1, z, z^2, z^3, \dots$ d'un nombre complexe z du disque unité est un polygone. Aussi, définissent-ils la couleur de z comme étant le nombre de sommets de ce polygone. Une partition dénombrable du disque, induite par ce coloriage, représenté par la Figure 1, est mise en évidence. Ils établissent notamment que l'ensemble Γ des points où la couleur change est la réunion des arcs spécifiques suivants: Posons $z = \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \rho \leq 1$.

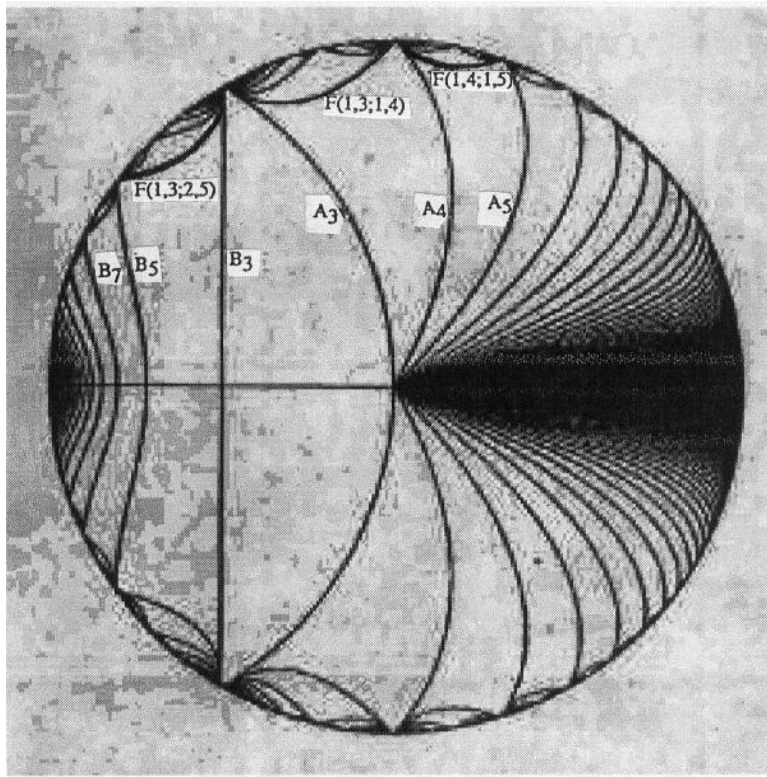


Figure 1. Coloriage du disque unité

- Soient A_m , $m = 3, 4, 5, \dots$ les arcs trinomiaux formés des solutions de l'équation (1.1), où $0 < \alpha < 1$, $n = m$, $k = m - 1$ et $\theta \in [\pi/(m - 1), 2\pi/m]$.
- Soient B_m , $m = 3, 5, 7, \dots$ les arcs trinomiaux formés des solutions de l'équation trinomiale (1.1), où $0 < \alpha < 1$, $n = m$, $k = m - 2$ et $\theta \in [\pi - \pi/m, \pi]$.

• Soient $F(p, q; r, s)$, les arcs de Farey, où p, q, r et s sont des entiers vérifiant $ps - qr = \pm 1$ et $s > q > 2$, les arcs trinomiaux formés des solutions de (1.1), où $0 < \alpha < 1$ et θ est compris entre $2\pi p/q$ et $2\pi r/s$.

Sachant que ce dernier type d'arcs trinomiaux $F(p, q; r, s)$ est défini grâce aux suites de Farey, qui est une notion de la théorie des nombres, et puisque Γ est un ensemble fractal, ces familles d'arcs trinomiaux illustrent un exemple de lien entre la géométrie fractale et la théorie des nombres.

3. Monotonie des arcs trinomiaux. Dans cette section, il s'agit de définir la totalité des arcs trinomiaux solutions de l'équation

$$(3.1) \quad z^n = \alpha z^k + (1 - \alpha)$$

où $z = \rho e^{i\theta}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, et de donner les principaux résultats de l'étude de monotonie de la fonction $\rho(\theta)$ pour toutes ces familles d'arcs.

L'équation de trajectoire des racines reliant uniquement ρ et θ est donc

$$\rho^{n-k} \sin n\theta - \rho^n \sin(n-k)\theta = \sin k\theta.$$

D'après Fell [5], on distingue les trois cas suivants:

- $\alpha < 0$: $\text{signe}(\sin n\theta) = -\text{signe}(\sin k\theta) = \text{signe}(\sin(n-k)\theta)$;
- $0 < \alpha < 1$: $\text{signe}(\sin n\theta) = \text{signe}(\sin k\theta) = -\text{signe}(\sin(n-k)\theta)$;
- $1 < \alpha$: $\text{signe}(\sin n\theta) = \text{signe}(\sin k\theta) = \text{signe}(\sin(n-k)\theta)$.

Définition 3.1. Un angle θ est (n, k) -admissible s'il vérifie l'une des égalités de signes ci-dessus.

Remarque 3.2. Les demi-plans supérieur et inférieur étant symétriques, on se restreindra au demi-plan supérieur.

De façon générale, la technique utilisée pour montrer la monotonie de la fonction $\rho(\theta)$ consiste à supposer que $d\rho/d\theta = 0$. On obtient donc le système

$$\begin{cases} R(\theta) \cdot \rho^{n-k} = N_1(\theta), \\ R(\theta) \cdot \rho^n = N_2(\theta), \end{cases}$$

où

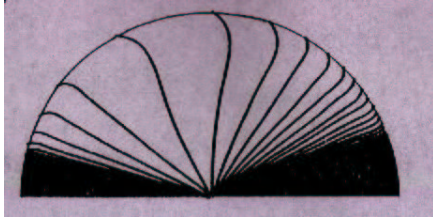
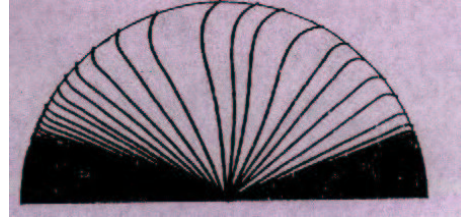
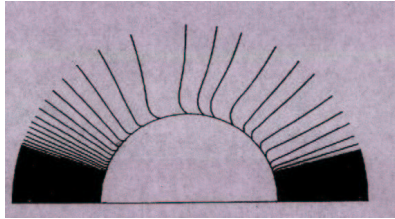
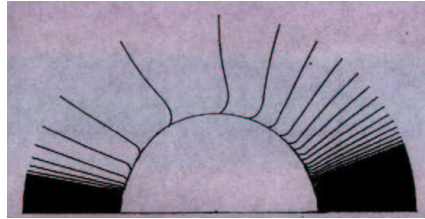
$$\begin{cases} R(\theta) = (n-k) \sin k\theta - k \cos n\theta \sin(n-k)\theta, \\ N_1(\theta) = (n-k) \sin n\theta - n \sin(n-k)\theta \cos k\theta, \\ N_2(\theta) = (n-k) \sin n\theta \cos k\theta - n \sin(n-k)\theta. \end{cases}$$

Et par la suite, il s'agit de contredire l'hypothèse $d\rho/d\theta = 0$ dans le cas de chaque type d'arcs trinomiaux.

3.1. Arcs trinomiaux solutions de l'équation (3.1) dans le cas $\alpha > 1$.

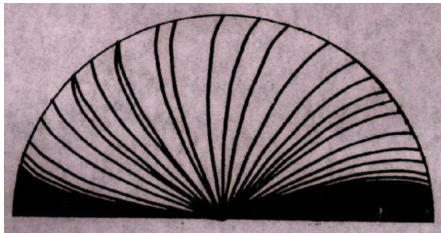
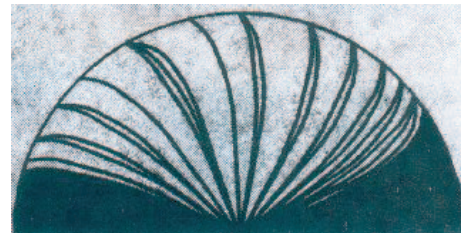
• Les arcs $D_1(p, k, r, n)$ sont formés des racines de (3.1) où $\alpha > 1$ et les angles admissibles appartiennent à $[(2r+1)\pi/n, 2\pi p/k[$ où $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, $p, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ($r \geq p$) et $k \in \mathbb{N}$ où $pn/(r+1) < k < 2pn/(2r+1)$ (voir Figure 2). Pour ce type d'arcs, la fonction $\rho(\theta)$ est croissante.

- Les arcs $D_2(p, k, r, n)$ sont formés des racines de (3.1) où $\alpha > 1$ et les angles admissibles $]2\pi p/k, (2r+1)\pi/n[$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 4, p, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} (r \geq p)$ et $k \in \mathbb{N}$ où $2pn/(2r+1) < k < pn/r$ (voir Figure 3). La fonction $\rho(\theta)$ est décroissante.
- Les arcs $D_3(p, n-k, r, n)$ sont formés des solutions de (3.1) où $\alpha > 1$ et $\theta \in]2\pi p/(n-k), (2r+1)\pi/n[$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 4, p, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} (r \geq p)$ et $k \in \mathbb{N}$ où $(r-p)n/r < k < [2(r-p)+1]n/(2r+1)$ (voir Figure 4). La fonction $\rho(\theta)$ est croissante.
- Les arcs $D_4(p, n-k, r, n)$ sont formés des solutions de (3.1) où $\alpha > 1$ et $\theta \in](2r+1)\pi/n, 2\pi p/(n-k)[$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 5, p, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} (r \geq p)$ et $k \in \mathbb{N}$ où $[2(r-p)+1]n/(2r+1) < k < (r-p+1)n/(r+1)$ (voir Figure 5). Dans ce cas, la fonction $\rho(\theta)$ est décroissante.

Figure 2. Arcs $D_1(p, k, r, n)$ Figure 3. Arcs $D_2(p, k, r, n)$ Figure 4. Arcs $D_3(p, n-k, r, n)$ Figure 5. Arcs $D_4(p, n-k, r, n)$

3.2. Arcs trinomiaux solutions de l'équation (3.1) dans le cas $0 < \alpha < 1$.

- Les arcs $A_1(p, k, r, n)$ sont formés des racines de (3.1) où $0 < \alpha < 1$ et les angles admissibles appartiennent à $]2\pi r/n, (2p+1)\pi/k[$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 5, p \in \mathbb{N}, \{0\} (r \geq p+1)$ et $k \in \mathbb{N}$ où $(2p+1)n/(2r+1) < k < (2p+1)n/2r$ (voir Figure 6). Dans ce cas, la fonction $\rho(\theta)$ est décroissante.

Figure 6. Arcs $A_1(p, k, r, n)$ Figure 7. Arcs $A_2(p, k, r, n)$

• Les arcs $A_2(p, k, r, n)$ sont formés des solutions de (3.1) où $0 < \alpha < 1$ et $\theta \in](2p+1)\pi/k, 2\pi r/n[$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 3, p \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ($r \geq p+1$) et $k \in \mathbb{N}$ où $(2p+1)n/2r < k < (2p+1)n/(2r-1)$ (voir Figure 7). La fonction $\rho(\theta)$ est croissante.

• Les arcs $B_1(p, k, r, n)$ sont formés des solutions de (3.1) où $0 < \alpha < 1$ et $\theta \in]2\pi r/n, (2p+1)\pi/k[$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 3, k = (2p+1)n/(2r+1)$ est un entier naturel, $p \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ où $r \geq p+1$ (voir Figure 8). La fonction $\rho(\theta)$ est décroissante.

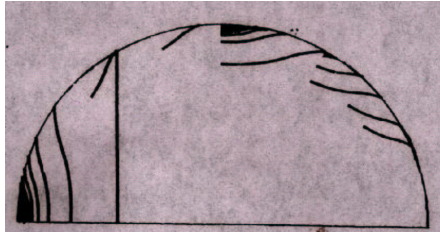


Figure 8. Arcs $B_1(p, k, r, n)$



Figure 9. Arcs $B_2(p, k, r, n)$

• Les arcs $B_2(p, k, r, n)$ sont formés des solutions de (3.1) où $0 < \alpha < 1$ et $\theta \in](2p+1)\pi/k, 2(r+1)\pi/n[$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 3, k = (2p+1)n/(2r+1)$ est un entier, $p \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ où $r \geq p+1$ (voir Figure 9). La fonction $\rho(\theta)$ est croissante.

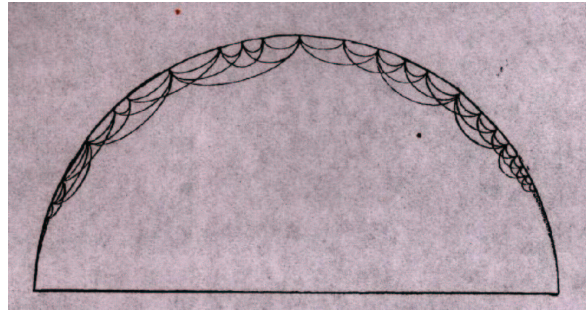


Figure 10. Arcs trinomiaux $F_1(p, n-k, r, n)$ et $F_2(p, n-k, r, n)$

• Les arcs $F_1(p, n-k, r, n)$ sont formés des racines de (3.1) où $0 < \alpha < 1$ et $\theta \in]2\pi p/(n-k), 2\pi r/n[$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 5, p, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ($r \geq p+1$) et $k \in \mathbb{N}$ où $[2(r-p)-1]n/(2r-1) < k < (r-p)n/r$ (voir Figure 10). Dans ce cas, la fonction $\rho(\theta)$ est unimodale.

• Les arcs $F_2(p, n-k, r, n)$ sont formés des racines de (3.1) où $0 < \alpha < 1$ et $\theta \in]2\pi r/n, 2\pi p/(n-k)[$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 4, p, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ($r \geq p$) et $k \in \mathbb{N}$ où $(r-p)n/r < k < [2(r-p)+1]n/(2r+1)$ (voir Figure 10). La fonction $\rho(\theta)$ est unimodale.

3.3. Arcs trinomiaux solutions de l'équation (3.1) dans le cas $\alpha < 0$.

• Les arcs $A'_1(p, n - k, r, n)$ sont formés des racines de (3.1) où $\alpha < 0$ et les angles admissibles appartiennent à $]2\pi r/n, (2p+1)\pi/(n-k)[$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 5, p \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} (r \geq p+1)$ et $k \in \mathbb{N}$ où $[2(r-p) - 1]n/2r < k < 2(r-p)n/(2r+1)$ (voir Figure 11). Dans ce cas, la fonction $\rho(\theta)$ est croissante.

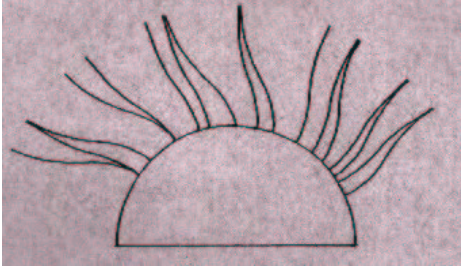


Figure 11. Arcs $A'_1(p, n - k, r, n)$

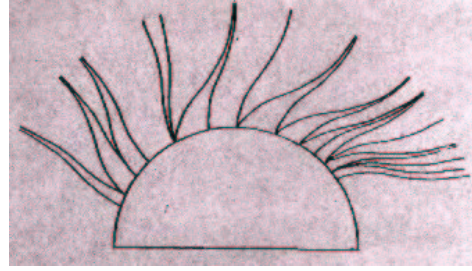


Figure 12. Arcs $A'_2(p, n - k, r, n)$

• Les arcs $A'_2(p, n - k, r, n)$ sont formés des solutions de (3.1) où $\alpha < 0$ et $\theta \in](2p+1)\pi/(n-k), 2\pi r/n[$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 3, p \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} (r \geq p+1)$ et $k \in \mathbb{N}$ où $2(r-p-1)n/(2r-1) < k < [2(r-p) - 1]n/2r$ (voir Figure 12). Pour ce type d'arcs, la fonction $\rho(\theta)$ est décroissante.

• Les arcs $B'_1(p, n - k, r, n)$ sont formés des solutions de (3.1) où $\alpha < 0$ et $\theta \in]2\pi r/n, (2p+1)\pi/(n-k)[$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 3, k = 2(r-p)n/(2r+1)$ est un entier, $p \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ où $r \geq p+1$ (voir Figure 13). La fonction $\rho(\theta)$ est croissante.

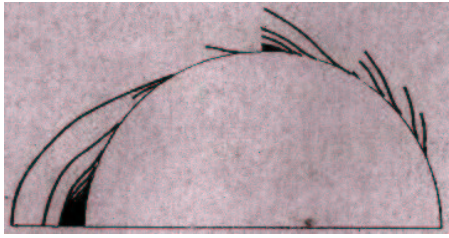


Figure 13. Arcs $B'_1(p, n - k, r, n)$

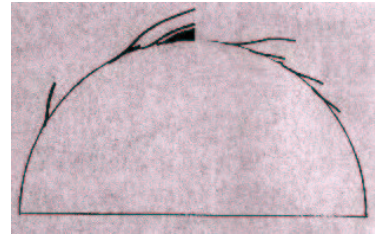


Figure 14. Arcs $B'_2(p, n - k, r, n)$

• Les arcs $B'_2(p, n - k, r, n)$ sont formés des solutions de (3.1) où $\alpha < 0$ et $\theta \in](2p+1)\pi/(n-k), 2(r+1)\pi/n[$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 3, k = 2(r-p)n/(2r+1)$ est entier, $p \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ où $r \geq p+1$ (voir Figure 14). La fonction $\rho(\theta)$ est décroissante.

• Les arcs $F'_1(p, k, r, n)$ sont formés des racines de l'équation (3.1) où $\alpha < 0$ et $\theta \in]2\pi p/k, 2\pi r/n[$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 5, p, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} (r \geq p+1)$ et $k \in \mathbb{N}$ où $pn/r < k < 2pn/(2r-1)$ (voir Figure 15). Dans ce cas, la fonction $\rho(\theta)$ est unimodale.

• Les arcs $F'_2(p, k, r, n)$ sont formés des racines de (3.1) telles que $\alpha < 0$ et $\theta \in]2\pi r/n, 2\pi p/k[$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 4, p, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} (r \geq p)$ et $k \in \mathbb{N}$ où $2pn/(2r+1) < k < pn/r$ (voir Figure 15). La fonction $\rho(\theta)$ est unimodale.

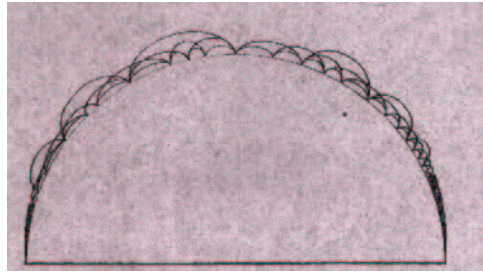


Figure 15. Arcs trinomiaux $F'_1(p, k, r, n)$ et $F'_2(p, k, r, n)$

Remarque 3.3. Les familles d'arcs trinomiaux sont des fractals. Suivant B. Mandelbrot [7], inventeur du mot « fractal », il s'agit d'objets mathématiques tels les ensembles de Cantor, les fonctions continues mais dérivables nulle part et de manière générale, des ensembles suffisamment « irréguliers » et « brisés » pour échapper totalement ou en partie au traitement des outils de la géométrie classique.

4. Exemple de fractals: l'ensemble triadique de Cantor. L'ensemble triadique de Cantor (voir Figure 16) illustre un exemple de fractals en théorie des nombres le plus révélateur qui soit. On l'obtient en ôtant de l'intervalle $[0, 1]$ le segment $]1/3, 2/3[$, donc centré au milieu et de longueur $1/3$. Il reste deux intervalles fermés $[0, 1/3]$ et $[2/3, 1]$ sur lesquels on répète la même opération, dans le même rapport $1/3$.

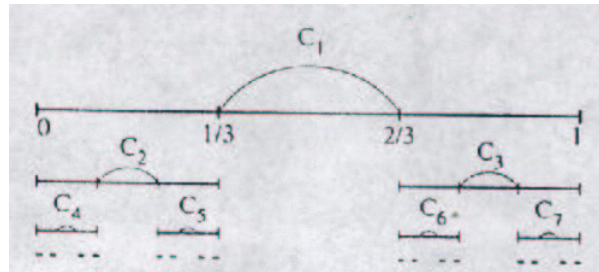


Figure 16. L'ensemble triadique de Cantor par divisions successives

Et ainsi de suite: à la n^{e} étape, on obtient une réunion de 2^n intervalles fermés disjoints de longueur 3^{-n} , à l'intérieur desquels on retire un intervalle ouvert appelé, suivant A. Denjoy [1], intervalle *contigu*, centré au milieu et de longueur 3^{-n-1} . Ainsi, on obtient un ensemble résiduel (poussière de Cantor) de mesure nulle, mais qui a la cardinalité du continu.

À chaque étape, on définit donc un nombre fini de contigus, notés C_i , mais comme il y a théoriquement une infinité d'étapes, cela donne finalement une famille dénombrable de contigus. D'après C. Tricot [8], c'est la manière de ranger les intervalles contigus qui détermine les propriétés topologiques de l'ensemble résiduel F . Mais, dans ce cas, la notation $C_1, C_2, \dots$ des contigus n'est pas commode puisqu'elle ne permet pas de déterminer la place exacte de C_n pour un entier n quelconque, par rapport aux autres contigus. Il faut donc renuméroter cette suite d'intervalles d'une autre façon. Le plus simple est d'utiliser un schéma dyadique. Par exemple, appelons C_1 le plus grand contigu. Ensuite, C_2 sera le plus grand contigu situé à gauche de C_1 , et C_3 le plus grand

à droite de C_1 . Et ainsi de suite: on place les contigus C_4 à C_7 , de taille maximale, de gauche à droite, à l'intérieur des 4 intervalles restants, etc . . . Ce type de rangement est symbolisé par l'arbre de la Figure 17, où de chaque sommet n , représentant le contigu C_n , partent deux segments, aboutissant à deux sommets, représentant deux contigus, à gauche et à droite de C_n . Le fait que les contigus soient à chaque fois, pris de taille maximale, assure qu'aucun contigu n'est oublié au cours de ce rangement.

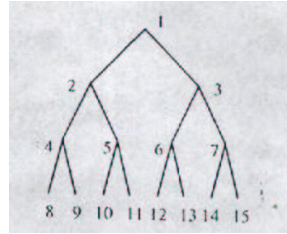


Figure 17. Arrangement des intervalles contigus de l'ensemble de Cantor

Remplaçons l'entier n par son développement en base 2. On retrouve ce développement sur les branches de l'arbre dyadique (Figure 18). Il suffit de faire correspondre, à chaque sommet n , la suite de 0 et de 1 du chemin qui part du premier sommet pour arriver au sommet n .

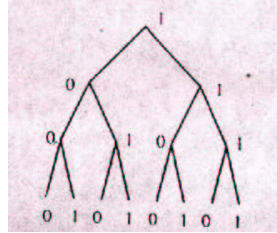


Figure 18. Arbre dyadique représentant l'ensemble de Cantor

Il est donc commode de noter les intervalles contigus

$$C(1), C(1, 0), C(1, 1), \dots, C(1, i_1, i_2, \dots, i_n) :$$

étant donné un contigu quelconque, on sait maintenant quelle est exactement sa place par rapport aux autres, par simple comparaison des suites. De plus, d'après C. Tricot [8], cette nouvelle notation permet de décider que l'ensemble triadique de Cantor est parfait, non-dénombrable et qu'il a la cardinalité du continu.

English extended abstract. In this paper, we study the solutions of the trinomial equations

$$z^n = \alpha z^k + (1 - \alpha),$$

where $z = \rho e^{i\theta}$ is a complex number, n and k are two integers verifying $k < n$ and α is a real number. One systematic study of these families of arc solutions of the trinomial equations is investigated. In fact, the problem of monotonicity of these arcs was discussed in [5] and partially solved in [3] for $0 < \alpha < 1$. In this work, taking α any

real number, we point out all solutions of the trinomial equation, i.e., the sixteen types of families of trinomial arcs. It is showed that those arcs are monotonic or quasi convex. And so the problem of monotonicity is completely solved. Moreover, it is established that those arcs induce a coloring in the sense introduced in [2] for the unit disk. The color of a complex number is defined as the number of vertices of the convex hull of the powers of that number. It is observed that there is a connection between the set of points where the color changes and some families of trinomial arcs. Since these families are fractals, they illustrate an example of connection between the fractal geometry and number theory. Besides, there exist others examples of connection between these two branches of mathematics, although we will restrict, in this paper, to the example of the middle third Cantor set.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Denjoy, *Les degrés de nullité dans la mesure des ensembles parfaits linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris **259** (1964), 4449–4451.
2. S. Dubuc et A. Malik, *Convex hull of powers of complex number, trinomial equations and the Farey sequence*, Numer. Algorithms **2** (1992), 1–32.
3. S. Dubuc et M. Zaoui, *Sur la quasi-convexité des arcs trinomiaux*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **45** (1996), 493–514.
4. K. J. Falconer, *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1990.
5. H. Fell, *The geometry of zeros of trinomial equations*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **29** (1980), 303–336.
6. K. Lamrini Uahabi, *Monotonie et dimension fractale des arcs trinomiaux*, Thèse de doctorat; Oujda, Maroc, Université Mohamed 1er, 2004.
7. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman and Co., San Fransisco, Calif., 1982.
8. C. Tricot, *Courbes et dimension fractale*, Springer-Verlag, Editions Sciences et Culture, Paris, France, 1993.
9. M. Zaoui, *Dimension fractale d'une réunion d'arcs trinomiaux*, Thèse de doctorat; Montréal, Université de Montréal, 1994.

K. L. UAHABI ET M. ZAOUI
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
 UNIVERSITÉ MOHAMED 1^{er}
 FACULTÉ DES SCIENCES
 B. P. 524, OUJDA, MAROC
 COURRIEL : kaoutar.lamrini@caramail.com
 zaouimoh@menara.ma