

SUR LA TOUR DES 2-CORPS DE CLASSES DE HILBERT DES CORPS QUADRATIQUES RÉELS

ALI MOUHIB

RÉSUMÉ. Soient k un corps quadratique réel, $C_{2,k}$ le 2-groupe de classes au sens large de k , et $C_{2,k}^+$ le 2-groupe de classes au sens restreint de k . On suppose que $\text{rang}_2(C_{2,k}) \in \{4, 5\}$. Alors on détermine une famille particulière de corps k dont la tour des 2-corps de classes est infinie. En particulier, on améliore les résultats de F. Lemmermeyer prouvant que si le 4-rang de $C_{2,k}^+$ est supérieur ou égal à 3, alors la tour de 2-corps de classes de k est infinie.

ABSTRACT. Let K be a real quadratic number field, $C_{2,k}$ the 2-class group of k , $C_{2,k}^+$ the 2-class group in the strict sense. We suppose that $\text{rank}_2(C_{2,k}) \in \{4, 5\}$. Then we show that k has an infinite 2-class field tower for some specific families of fields k . In particular, we strengthen F. Lemmermeyer's result that the 2-class field tower of k is infinite if $C_{2,k}^+$ has 4-rank ≥ 4 .

1. Introduction. Soient k un corps de nombres, p un nombre premier, k^1 (resp. k_p^1) le corps de classes de Hilbert (resp. le p -corps de classes de Hilbert) de k et pour n entier naturel, k^{n+1} (resp. k_p^{n+1}) le corps de classes de Hilbert de k^n (resp. le p -corps de classes de Hilbert de k^n). La suite $(k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(k_p^n)_{n \in \mathbb{N}}$) est appelée tour des corps de classes (resp. tour des p -corps de classes) de k . S'il existe un entier naturel n minimal tel que $k^n = k^{n+1}$ (resp. $k_p^n = k_p^{n+1}$), alors on dit que la tour des corps de classes de k (resp. tour des p -corps de classes de k) est finie de longueur n . Sinon, on dit que la tour des corps de classes de k (resp. tour des p -corps de classes de k) est infinie.

En 1964, E. Golod et I. Shafarevich ont prouvé l'existence de corps de nombres dont la tour des corps de classes est infinie. En effet, ils ont démontré que la tour des 2-corps de classes de

$$k = \mathbf{Q}(\sqrt{-3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19})$$

est infinie. De plus, ils ont donné un critère qui permet de démontrer que la tour des 2-corps de classes d'un corps de nombres est infinie.

Dans ce qui suit, on suppose que k est un corps quadratique. Soit k imaginaire. Alors $\text{rang}_2(C_{2,k}) \geq 5$ entraîne que la tour des 2-corps de classes de k est infinie. Dans [Haj-00], F. Hajir a démontré que si $C_{2,k}$ contient un sous-groupe isomorphe à

Reçu le 27 octobre 2003 et, sous forme définitive, le 31 janvier 2005.

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, alors la tour des 2-corps de classes de k est infinie. Dans [Be-01], E. Benjamin a démontré que si $\text{rang}_2(C_{2,k}) = 4$, le 4-rang de $C_{2,k}$ est supérieur ou égal à 2 et le discriminant de k est divisible exactement par un premier $q \equiv -1 \pmod{4}$, alors la tour des 2-corps de classes de k est infinie.

Soit k un corps quadratique réel. Si $\text{rang}_2(C_{2,k}) \geq 6$, alors la tour des 2-corps de classes de k est infinie. On sait que si $\text{rang}_2(C_{2,k}) \in \{2, 3\}$, alors la tour des 2-corps de classes de k peut être finie ou infinie et si $\text{rang}_2(C_{2,k}) = 1$, alors la tour des 2-corps de classes de k est finie de longueur 1. Dans le cas où $\text{rang}_2(C_{2,k}) \in \{4, 5\}$, jusqu'à présent, il n'existe aucun exemple de corps k dont la tour des 2-corps de classes de k est finie. Dans [Ma-96], C. Maire a démontré que si le 4-rang de $C_{2,k}$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, alors la tour des 2-corps de classes de k est infinie. F. Lemmermeyer a amélioré ce résultat, en démontrant qu'il suffit que le 4-rang de $C_{2,k}^+$ soit supérieur ou égal à 4 pour que la tour des 2-corps de classes de k soit infinie.

Dans cet article, on suppose que k est un corps quadratique réel tel que $\text{rang}_2(C_{2,k}) \in \{4, 5\}$. Alors, on détermine une famille de corps k dont la tour des 2-corps de classes est infinie. De plus, on améliore les résultats de C. Maire et de F. Lemmermeyer cités précédemment. Ainsi, on démontre les résultats principaux suivants :

(1) On suppose que $\text{rang}_2(C_{2,k}) = 5$; alors on a :

- Il suffit que $\text{rang}_4(C_{2,k}^+) \geq 3$ pour que la tour des 2-corps de classes de k soit infinie;
- Si le discriminant de k n'est pas somme de deux carrés et est divisible par au plus deux premiers congrus à -1 modulo 4, alors la tour des 2-corps de classes de k est infinie.

(2) On détermine une famille de corps quadratiques réels k dont la tour des 2-corps de classes est infinie et le groupe $C_{2,k}$ vérifie :

- (i) $\text{rang}_2(C_{2,k}) = 4$;
- (ii) $\text{rang}_4(C_{2,k}) = 0$, c'est-à-dire $C_{2,k}$ est élémentaire.

Notations.

- k : Corps de nombres;
- $k^{(*)}$: Corps de genres de k ;
- C_k : Groupe de classes au sens large de k ;
- C_k^+ : Groupe de classes au sens restreint de k ;
- $C_{2,k}$: 2-groupe de Sylow de C_k ;
- $C_{2,k}^+$: 2-groupe de Sylow de C_k^+ ;
- E_k : Groupe des unités de k .

Soit G un groupe abélien. On désigne par p -rang de G , qu'on note par $\text{rang}_p(G)$, la dimension de G/G^p vu comme un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel. Dans le cas où $p = 2$, on désigne par 4-rang de G , qu'on note par $\text{rang}_4(G)$, le 2-rang du groupe G^2 .

2. Rappels sur le symbole du reste normique. Soient k un corps de nombres, d un entier naturel sans facteurs carrés, r le nombre des premiers de k ramifiés dans $k(\sqrt{d})$ et e l'entier naturel définie par $2^e = [E_k : E_k \cap \mathcal{N}(k(\sqrt{d})^*)]$. Notre étude repose sur l'utilisation du symbole du reste normique dont voici quelques propriétés.

Soit f le conducteur de l'extension $k(\sqrt{d})/k$. Pour chaque idéal premier $\mathcal{P}$ de k , on désigne par $f_{\mathcal{P}}$ la plus grande puissance de $\mathcal{P}$ qui divise f ($\mathcal{P}$ fini ou infini). Soit $b \in k^*$ et $\mathcal{P}$ un idéal premier fini ou infini de k . À l'aide du théorème d'approximation, il existe un nombre b_0 vérifiant

$$b_0 \equiv b \pmod{f_{\mathcal{P}}} \quad \text{et} \quad b_0 \equiv 1 \pmod{\frac{f}{f_{\mathcal{P}}}}.$$

Si $(b_0) = \mathcal{P}^n I$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $(I, \mathcal{P}) = 1$ ($n = 0$ si $\mathcal{P}$ est infini), on pose

$$\left(\frac{b, k(\sqrt{d})}{\mathcal{P}} \right) = \left(\frac{k(\sqrt{d})}{I} \right)$$

où $\left(\frac{k(\sqrt{d})}{I} \right)$ désigne l'application d'Artin dans l'extension $k(\sqrt{d})/k$ appliquée à l'idéal I . Pour $b \in k^*$, on définit le symbole du reste normique par

$$\left(\frac{b, d}{\mathcal{P}} \right) = \frac{\left(\frac{b, k(\sqrt{d})}{\mathcal{P}} \right) (\sqrt{d})}{\sqrt{d}}$$

où $\mathcal{P}$ est un idéal premier de k . Si $\mathcal{P}$ ne divise pas le conducteur de $k(\sqrt{d})/k$, on pose

$$\left(\frac{d}{\mathcal{P}} \right) = \frac{\left(\frac{k(\sqrt{d})}{\mathcal{P}} \right) (\sqrt{d})}{\sqrt{d}}.$$

Remarque 2.1. La définition du symbole du reste normique qu'on a donnée pour une extension quadratique $k(\sqrt{d})/k$ peut être prolongée à une extension de la forme $k(\sqrt[m]{d})/k$ où m est un entier naturel et k contient les racines m -ièmes de l'unité (voir [Ha-30]).

Voici quelques propriétés du symbole du reste normique :

- (1) On a l'égalité $\left(\frac{b_1 b_2, a}{\mathcal{P}} \right)_m = \left(\frac{b_1, a}{\mathcal{P}} \right)_m \left(\frac{b_2, a}{\mathcal{P}} \right)_m$.
- (2) Si $\mathcal{P}$ ne divise pas le conducteur f de l'extension $k(\sqrt[m]{a})/k$ et apparaît avec un exposant e dans la décomposition de l'idéal (b) en produit de puissances d'idéaux premiers, alors

$$\left(\frac{b, a}{\mathcal{P}} \right) = \left(\frac{a}{\mathcal{P}} \right)_m^{-e}.$$

- (3) Si $\mathcal{P}$ n'apparaît pas dans la décomposition de f et dans la décomposition de l'idéal (b) en produit de puissances d'idéaux premiers, alors

$$\left(\frac{b, a}{\mathcal{P}} \right)_m = 1.$$

(4) On a l'égalité $\prod_{\mathcal{P}} \left(\frac{b, a}{\mathcal{P}} \right)_m = 1$.

(5) Pour tout $x \in k$, on a l'égalité $\left(\frac{-x, x}{\mathcal{P}} \right)_m = 1$.

Lemme 2.2. *Le rang du 2-groupe de classes de $k(\sqrt{d})$ est égal à $r - 1 - e$.*

Démonstration. Voir [Gr-73]. $\square$

Remarque 2.3. Si k est un corps quadratique réel et $\sqrt{d} \notin k$, alors l'entier $e \in \{0, 1, 2\}$.

Lemme 2.4. *Soient k un corps de nombres, d un entier naturel sans facteur carré et $u \in k^*$ tel que l'idéal engendré par u dans k est norme d'un idéal de $k(\sqrt{d})$. Alors u est norme dans $k(\sqrt{d})/k$ si et seulement si $\left(\frac{u, d}{\mathcal{P}} \right) = 1$ pour tout premier $\mathcal{P}$ de k qui se ramifie dans $k(\sqrt{d})$.*

Démonstration. Voir [Az-Mo-1]. $\square$

Lemme 2.5. *Soient k un corps de nombres contenant les racines m -ièmes de l'unité, $\bar{k}$ une extension finie de k , $\alpha \in k^*$ et $\beta \in k^*$. On note par $\mathcal{P}$ un idéal premier de k et par $\bar{\mathcal{P}}$ un idéal premier de $\bar{k}$ au-dessus de $\mathcal{P}$. Alors*

$$\prod_{\bar{\mathcal{P}}|\mathcal{P}} \left(\frac{\beta, \alpha}{\bar{\mathcal{P}}} \right)_m = \left(\frac{N_{\bar{k}/k}(\beta), \alpha}{\mathcal{P}} \right)_m,$$

où le produit est pris sur tous les premiers de $\bar{k}$ qui sont au-dessus de $\mathcal{P}$.

Démonstration. Voir [Ha-30]. $\square$

3. Position du problème. Dans toute la suite, on suppose que k est un corps quadratique réel.

- Dans le cas où $\text{rang}_2(C_{2,k}) \geq 6$, on a que la tour des 2-corps de classes de k est infinie (Golod et Shafarevich).
- Dans le cas où $\text{rang}_2(C_{2,k}) \leq 3$, il existe des exemples de corps k dont la tour des 2-corps de classes est finie.
- Par contre, dans le cas où $\text{rang}_2(C_{2,k}) = 4$ ou 5, jusqu'à présent, on n'a pas d'exemples de corps k dont la tour des 2-corps de classes est finie. En général, on ne peut pas dire si la tour des 2-corps de classes d'un corps k est finie ou infinie.

Voici quelques récentes contributions à ce sujet. On suppose que $\text{rang}_2(C_{2,k}) \in \{4, 5\}$.

- C. Maire a démontré que si $\text{rang}_4(C_{2,k}) \geq 4$, alors la tour des 2-corps de classes de k est infinie.
- F. Lemmermeyer a démontré que si $\text{rang}_4(C_{2,k}^+) \geq 4$, alors la tour des 2-corps de classes de k est infinie.

4. Résultats utilisés.

Résultat 1. [Ré-Re-66] Soit k un corps quadratique de discriminant d . Pour qu'il existe une extension cyclique L/k de degré 4 et non ramifiée pour tous les premiers finis il faut et il suffit qu'il existe une factorisation $d = d_1 d_2$ telle que d_1 et d_2 sont premiers entre eux et $\left(\frac{d_1}{p_2}\right) = \left(\frac{d_2}{p_1}\right) = 1$ pour tout $p_i | d_i$. Si de plus d est somme de deux carrés, alors L est réel si et seulement si $\left(\frac{d_1}{d_2}\right)_4 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)_4$.

Le deuxième résultat est un critère qui permet de démontrer que la tour des p -corps de classes d'un corps de nombres k est infinie.

Résultat 2. [Sc-86] Soient K/k une extension cyclique de degré premier p , ρ le nombre des premiers finis et infinis ramifiés dans l'extension K/k ; E_k et E_K sont respectivement les groupes des unités de k et K et H le sous-groupe de E_k formé des unités qui sont normes dans l'extension K/k . Alors la tour des p -corps de classes de K est infinie si

$$\rho \geq 3 + \text{rang}_p(E_k/E_k \cap H) + 2\sqrt{\text{rang}_p(E_K) + 1} \quad (*)$$

Le résultat suivant donne le nombre des classes ambiguës dans une extension cyclique.

Résultat 3. [Gr-73] Soient K/k une extension cyclique, $D_{K/k}$ le discriminant relatif de l'extension K/k , $e(p)$ l'indice de ramification du premier p de k dans K , E_k le groupe des unités de k , $h(k)$ le nombre des classes de k et $\mathcal{N}_{K/k}$ la norme dans l'extension K/k . Alors le nombre des classes ambiguës de l'extension K/k , noté $\text{Am}(K/k)$, est donné par la formule

$$\text{Am}(K/k) = [(K/k)^{(*)} : K] = \frac{h(k) \prod_{p|D_{K/k}} e(p)}{[K : k][E_k : E_k \cap \mathcal{N}_{K/k}(K^*)]}.$$

5. Quelques indications. Soient k un corps quadratique réel, $k^{(*)}$ le corps de genres de k et $(k^{(*)})^1$ le 2-corps de classes de Hilbert de $k^{(*)}$. On suppose que $\text{rang}_2(C_{2,k}) \in \{4, 5\}$.

Pour démontrer que la tour des 2-corps de classes de k est infinie, on raisonne comme suit : On détermine une sous-extension quadratique L/K de $(k^{(*)})^1/\mathbf{Q}$ vérifiant l'inégalité (*) (voir résultat 2). Ceci revient par un calcul sur le symbole du reste normique (voir chapitre 2) à calculer ou donner une bonne majoration de l'indice

$$[E_K : E_K \cap \mathcal{N}_{L/K}(L^*)] = 2^{\text{rang}_2(E_K/E_K \cap \mathcal{N}_{L/K}(L^*))}.$$

Ainsi, on a que la tour des 2-corps de classes de L est infinie et par suite, la tour des 2-corps de classes de $(k^{(*)})^1$ est infinie. Comme $(k^{(*)})^1/k$ est une extension non ramifiée, alors en conclusion la tour des 2-corps de classes de k est infinie.

6. Résultats démontrés. Dans ce qui suit, on suppose que $\text{rang}_2(C_{2,k}) = 5$. On a alors les résultats suivants.

Lemme 6.1. Soit k un corps quadratique réel. On suppose que $\text{rang}_2(C_{2,k}) = 5$ et que le discriminant de k n'est pas somme de deux carrés. Supposons qu'il existe trois premiers différents p_1, p_2 et p_3 divisant le discriminant et tels que $p_i \equiv 1 \pmod{4}$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ avec $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \left(\frac{p_1}{p_3}\right) = 1$. Alors la tour des 2-corps de classes de k est infinie.

Lemme 6.2. Soit k un corps quadratique réel. On suppose que $\text{rang}_2(C_{2,k}) = 5$ et que le discriminant de k est somme de deux carrés. Supposons qu'il existe trois premiers différents p_1, p_2 et p_3 divisant le discriminant et tels que $p_i \equiv 1 \pmod{4}$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ avec

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \left(\frac{p_1}{p_3}\right) = 1, \quad \left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4 \quad \text{et} \quad \left(\frac{p_1}{p_3}\right)_4 = \left(\frac{p_3}{p_1}\right)_4.$$

Alors la tour des 2-corps de classes de k est infinie.

Théorème 6.3. Soient k un corps quadratique réel dont le discriminant D n'est pas somme de deux carrés et soit $\text{rang}_2(C_{2,k}) = 5$.

- (i) On suppose qu'il existe au plus deux premiers congrus à -1 modulo 4 divisant D . Alors la tour des 2-corps de classes de k est infinie.
- (ii) On suppose qu'au moins trois premiers congrus à -1 modulo 4 divisent D . Alors pour que la tour des 2-corps de classes de k soit infinie, il suffit que $\text{rang}_4(C_{2,k}^+) \geq 3$.

Théorème 6.4. Soient k un corps quadratique réel, $k^{(*)}$ le corps de genres de k . On suppose que le discriminant de k est somme de deux carrés et que $\text{rang}_2(C_{2,k}) = 5$.

- (i) Pour que la tour des 2-corps de classes de k soit infinie, il suffit que $\text{rang}_4(C_{2,k}^+) \geq 3$.
- (ii) S'il existe un sous-corps biquadratique de $k^{(*)}$ dont le discriminant est divisible par trois premiers et le 2-rang du groupe de classes est égal à 3, alors la tour des 2-corps de classes de k est infinie.

Exemple 6.5. Soient $p_1 = 5, p_2 = 181$ et $p_3 = 229$ et soit $M = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2 p_3})$. Alors

$$\left(\frac{p_1}{p_i}\right)_4 = \left(\frac{p_i}{p_1}\right)_4$$

et $\text{rang}_2(C_{2,M}) = 3$. De plus, la tour des 2-corps de classes de tout corps quadratique de la forme

$$\mathbf{Q}(\sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6}),$$

où $p_i \not\equiv -1 \pmod{4}$ avec $4 \leq i \leq 6$, est infinie.

Dans le théorème qui suit, on détermine une famille de corps quadratiques réels dont le 2-groupe de classes est élémentaire d'ordre égal à 16 et dont la tour des 2-corps de classes est infinie.

Théorème 6.6. Soient p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 des nombres premiers différents et non congrus à -1 modulo 4 et soit

$$k = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5}).$$

Si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée, alors $C_{2,k}$ est élémentaire et la tour des 2-corps de classes de k est infinie :

- (i) $\mathcal{N}(\varepsilon_{p_1 p_2}) = -1$, $\left(\frac{p_i}{p_j}\right) = 1$ et $\left(\frac{p_i}{p_j}\right)_4 = \left(\frac{p_j}{p_i}\right)_4$ pour $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{3, 4\}$;
- (ii) $\mathcal{N}(\varepsilon_{p_1 p_2}) = -1$, $\left(\frac{p_1 p_2}{p_5}\right) = -1$, $\left(\frac{p_i}{p_j}\right) = 1$ et $\left(\frac{p_i}{p_3}\right)_4 \left(\frac{p_i}{p_4}\right)_4 = \left(\frac{p_3}{p_i}\right)_4 \left(\frac{p_4}{p_i}\right)_4$ pour $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{3, 4\}$.

7. Conclusion. En conclusion, une résolution totale du problème de la tour des 2-corps de classes de k tels que $\text{rang}_2(C_{2,k}) \in \{4, 5\}$ n'est pas encore réalisée. Vu les résultats démontrés, il est intéressant d'étudier le problème pour les corps k vérifiant $\text{rang}_2(C_{2,k}) = 5$ et $\text{rang}_4(C_{2,k}^+) \in \{0, 1, 2\}$. Comme suite de recherche, nous proposons :

- (i) Étudier le 2-rang du groupe de classes des corps biquadratiques et triquadratiques;
- (ii) Soit L/K une sous-extension de $k^{(*)}/\mathbf{Q}$ et l'application norme $\mathcal{N}_{L/K} : C_L \longrightarrow C_K$. On sait d'après [Je-79] que

$$\text{rang}_2(\text{Ker}(\mathcal{N}_{L/K})) \geq \rho - 1 - \text{rang}_2(E_K/E_K \cap \mathcal{N}_{L/K}(L^*)).$$

On aimerait comparer $\text{rang}_2(C_{2,L})$ et $\text{rang}_2(\text{Ker}(\mathcal{N}_{L/K}))$.

English extended abstract. Let k be a real quadratic number field with discriminant d . We will denote the 2-ideal class group of k by $C_{2,k}$ and the 2-ideal class group of k in the strict sense by $C_{2,k}^+$. By the Hilbert 2-class field tower of k we mean the sequence of fields $k = k_0 \subseteq k_1 \subseteq k_2 \subseteq \cdots \subseteq k_i \subseteq \cdots$ where k_{i+1} is the Hilbert 2-class field of k_i . If $k_{i+1} \neq k_i$ for each i , then we say that the Hilbert 2-class field tower of k is infinite. If n is the minimal integer such that $k_n = k_{n+1}$, then we say that the Hilbert 2-class field tower of k is finite of length n . In [Go-Sh], Golod and Shafarevich have shown that the field k has an infinite Hilbert 2-class field tower whenever the 2-rank of $C_{2,k}$ is ≥ 6 . If the 2-rank of $C_{2,k}$ is equal to 1, then by group theory, the Hilbert 2-class field tower of k is finite of length 1. If the 2-rank of $C_{2,k}$ is in $\{2, 3\}$, then there are examples of fields k with finite (resp. infinite) Hilbert 2-class field tower. In the case where the 2-rank of $C_{2,k}$ is in $\{4, 5\}$, no example of k with finite 2-class field tower has ever been exhibited.

In [Ma], C. Maire has shown that if the 4-rank of $C_{2,k}$ contains a subgroup of type $(4, 4, 4, 4)$, then the Hilbert 2-class field tower of k is infinite and in [Le], F. Lemmermeyer has shown that if the 4-rank of $C_{2,k}^+$ contains a subgroup of type $(4, 4, 4, 4)$, then the Hilbert 2-class field tower of k is infinite.

In this paper we suppose that k is a real quadratic number field such that the 2-rank of $C_{2,k}$ is equal to 5. Then using the inequality of Golod and Shafarevich, the quadratic reciprocity law and results on quadratic residue norm symbols, we prove the following results.

Theorem.

- (1) *If the 4-rank of $C_{2,k}$ is ≥ 3 , then the Hilbert 2-class field tower of k is infinite.*
- (2) *If d is not a sum of two squares and there exist at most two primes q and q' dividing d such that $q \equiv q' \equiv -1 \pmod{4}$, then the Hilbert 2-class field tower of k is infinite.*

In the next theorem, we suppose that d is a sum of two squares. We say that d has a C_4 -factorisation of the form $d = d_1 d_2$ if $(d_1, d_2) = 1$ and $\left(\frac{d_1}{p_2}\right) = \left(\frac{d_2}{p_1}\right) = 1$ for every prime p_i dividing d_i ($i = 1, 2$). It is known that if d_1 is prime, then the Hilbert 2-class field tower of k is infinite. Otherwise, if the 4-rank of $C_{2,k}^+$ is equal to 2, then we prove that there exists a C_4^+ -factorisation of the form $d = p_1 p_2 \cdot p_3 p_4 p_5 p_6$ where the integers p_i , $1 \leq i \leq 6$, are primes dividing d .

Theorem. *We suppose that d is a sum of two squares and the 4-rank of $C_{2,k}^+$ is equal to 2. Assume that d has a C_4^+ -factorisation of the form $d = p_1 p_2 \cdot p_3 p_4 p_5 p_6$. If $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1$, then the Hilbert 2-class field tower of k is infinite.*

BIBLIOGRAPHIE

- [Az-93] A. Azizi, *Capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$* , Thèse, Univ. Laval, Québec (1993).
- [Az-Mo-1] A. Azizi et A. Mouhib, *Sur le rang du 2-groupe de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ où $m = 2$ ou un premier $p \equiv 1 \pmod{4}$* , Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001); no. 7, 2741–2752.
- [Az-Mo-2] A. Azizi et A. Mouhib, *Sur le 2-groupe de classes du corps de genres de certains corps biquadratiques*, Ann. Sci. Math. Québec **27** (2003), 123–134.
- [Az-Mo-3] A. Azizi et A. Mouhib, *Capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés*, Acta Arith. **109** (2003); no. 1, 27–63.
- [Az-Mo-4] A. Azizi et A. Mouhib, *Capitulation des 2-classes d'idéaux de certains corps biquadratiques dont le corps de genres diffère du 2-corps de classes de Hilbert*, Pacific J. Math.; À paraître.
- [Be-01] E. Benjamin, *On imaginary quadratic number fields with 2-class group of rank 4 and infinite 2-class field tower*, Pacific J. Math. **201** (2001); no. 2, 257–266.
- [Go-Sh] E. S. Golod et I. R. Shafarevich, *On the class field tower*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. **28** (1964), 261–272 (in Russian); English translation in, AMS Transl. **48** (1965), 91–102.
- [Gr-73] G. Gras, *Sur les l -classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier l* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **23** (1973); no. 3, 1–48.
- [Haj-00] F. Hajir, *Correction to “On a theorem of Koch”*, Pacific J. Math. **196** (2000); no. 2, 507–508.
- [Ha-30] H. Hasse, *Neue Begründung der theorie der Normenrest symbols*, J. Reine Angew. Math. **162** (1930).
- [Ja-73] G. J. Janusz, *Algebraic number fields*, Pure and Applied Mathematics, vol. 55, Academic Press, New York-London, 1973.
- [Je-79] W. Jehne, *On knots in algebraic number theory*, J. Reine Angew. Math. **311/312** (1979), 215–254.
- [Le] F. Lemmermeyer, *The 4-class group of real quadratic number fields*; Prépublication.
- [Ma-96] C. Maire, *Un raffinement du théorème de Golod-Safarevic*, Nagoya Math. J. **150** (1998), 1–11.

- [Mo-01] A. Mouhib, *Sur le 2-groupe de classes de certains corps biquadratiques réels et capitulation des 2-classes d'idéaux*, Thèse de doctorat; Oujda, Université Mohamed I, 2001.
- [Ré-Re-66] L. Rédei et H. Reichardt, *Die anzahl der durch 4 teilbaren invarianten der klassen-gruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers*, J. Reine Angew. Math. **170** (1933), 69–74.
- [Sc-86] R. Schoof, *Infinite class field towers of quadratic fields*, J. Reine Angew. Math. **372** (1986), 209–220.

A. MOUHIB
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ MOHAMED 1^{er}
FACULTÉ DES SCIENCES
B. P. 524, OUJDA, MAROC
COURRIEL : mouhibali@yahoo.fr