

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES ET COMBINATOIRES DES β -ENTIERS

ZUZANA MASÁKOVÁ

RÉSUMÉ. On considère la représentation des nombres réels positifs en base β , appelée β -développements, où β est un entier algébrique. Les propriétés de telles représentations dépendent de «développement de Rényi $d_\beta(1)$ de 1». Pour les β dont $d_\beta(1)$ est ultimement périodique (par exemple, les nombres de Pisot), on étudie l'ensemble $\text{Fin}(\beta)$ des β -développements finis, et l'ensemble $\mathbb{Z}_\beta$ des β -développements entiers. L'ensemble $\mathbb{Z}_\beta$ définit naturellement un mot infini, dont on décrit certaines propriétés combinatoires. On étudie aussi les opérations arithmétiques sur $\text{Fin}(\beta)$, notamment les conditions sous lesquelles $\text{Fin}(\beta)$ est un anneau.

ABSTRACT. In this paper we consider numeration systems related to an irrational base $\beta > 1$. In particular, we expose the interesting combinatorial and arithmetical properties of integers in such a system and illustrate them with examples. We also list some related open problems. Every non-negative x has a unique expression in the form of its β -expansion. We study in particular the set $\mathbb{Z}_\beta$ of β -integers. If β is a rational integer, then $\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}$. For $\beta \notin \mathbb{Z}$, the set $\mathbb{Z}_\beta$ has certain peculiar properties. For example, not every finite sequence $x_k \cdots x_0$ of coefficients $x_i \in \{0, 1, \dots, [\beta]\}$ is a β -expansion of some $x > 0$. The admissibility of sequences of coefficients is given by the Parry condition using the Rényi development of 1. The set $\mathbb{Z}_\beta$ is interesting also from the arithmetical point of view. If $\beta \in \mathbb{Z}$, then $\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}$ is a ring. For other bases β , not only $\mathbb{Z}_\beta$ is not closed under addition and multiplication, but the result of summing and multiplying β -integers may even have an infinite β -expansion. We study the conditions under which the set $\text{Fin}(\beta)$ is a ring.

1. Introduction. On considère des représentations de nombres réels non-traditionnelles dans les systèmes de numération avec une base β , un nombre réel supérieur à 1. Une série convergente $\sum_{i=-\infty}^k x_i \beta^i$ d'entiers positifs ou nuls est appelée une β -représentation de x si

$$x = \sum_{i=-\infty}^k x_i \beta^i.$$

Si de plus pour tout $-\infty < \ell < k$ la somme satisfait

$$\sum_{i=-\infty}^{\ell} x_i \beta^i < \beta^{\ell+1},$$

Reçu le 15 septembre 2003 et, sous forme définitive, le 24 janvier 2005.

la série est dite le β -développement de x . Le β -développement est une généralisation de développement décadique ou binaire. On utilise la notation naturelle

$$\langle x \rangle_\beta = x_k x_{k-1} \cdots x_0 \bullet x_{-1} x_{-2} \cdots .$$

Les coefficients du β -développement de x sont calculés par l'algorithme glouton. Ceci implique que $x_i \in \{0, 1, 2, \dots, [\beta]\}$ pour $\beta \notin \mathbb{Z}$. Notons que si la base β du système de numération est un entier, $\beta \in \mathbb{Z}$, $\beta > 1$, les coefficients x_i du β -développement appartiennent à $\{0, 1, 2, \dots, \beta - 1\}$. De plus, toute suite de ces chiffres qui ne se termine pas par $(\beta - 1)^\omega$ correspond au β -développement d'un $x > 0$. Si $\beta \notin \mathbb{Z}$, la question sur les suites de chiffres interdits dans les β -développements est plus compliquée; elle sera traitée dans la section 2.

On peut introduire l'ordre lexicographique sur les β -représentations de la manière suivante. La β -représentation $x_n \beta^n + x_{n-1} \beta^{n-1} + \cdots$ est lexicographiquement supérieure à $x_k \beta^k + x_{k-1} \beta^{k-1} + \cdots$ si $k \leq n$ et les mots infinis correspondants satisfont

$$x_n x_{n-1} \cdots \succ \underbrace{00 \cdots 0}_{(n-k) \text{ fois}} x_k x_{k-1} \cdots ,$$

où le symbole $\prec$ dénote l'ordre lexicographique des mots dans un alphabet ordonné. La construction par l'algorithme glouton implique que le β -développement est lexicographiquement le plus grand parmi les β -représentations de x .

L'ensemble de tous les nombres x de β -développements finis, c'est-à-dire les $\langle |x| \rangle_\beta$ se terminant en une infinité de zéros, est noté

$$\text{Fin}(\beta) := \{x \in \mathbb{R} \mid \langle |x| \rangle_\beta = x_k x_{k-1} \cdots x_0 \bullet x_{-1} \cdots x_\ell\}.$$

Les nombres réels x , dont le β -développement de $|x|$ est de la forme $\sum_{i=0}^k x_i \beta^i$, sont appelés β -entiers. L'ensemble des β -entiers est noté

$$\mathbb{Z}_\beta := \{x \in \mathbb{R} \mid \langle |x| \rangle_\beta = x_k x_{k-1} \cdots x_0 \bullet\}.$$

Si $\beta \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des β -entiers coïncide avec les entiers rationnels : $\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}$. Par conséquent, $\mathbb{Z}_\beta$ est fermé sous l'addition et la multiplication. Dessinés sur la ligne droite, les β -entiers pour $\beta \in \mathbb{Z}$ forment une suite de points équidistants. Les propriétés mentionnées ne sont plus valables si $\beta \notin \mathbb{Z}$.

L'ordre lexicographique des β -développements correspond à l'ordre naturel des réels. On peut alors écrire $\mathbb{Z}_\beta$ comme une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ croissante. Cependant, seulement pour certaines bases β il y a un nombre fini de distances $e_{n+1} - e_n$ entre les éléments voisins de $\mathbb{Z}_\beta$; voir la section 2. Si c'est le cas, on peut noter les distances par symboles et associer naturellement aux β -entiers un mot infini. Les propriétés combinatoires de ces mots sont étudiées dans la section 3. L'ensemble $\mathbb{Z}_\beta$ n'est pas fermé sous l'addition et la multiplication. En général, la somme ou le produit de deux β -entiers peut même avoir un β -développement infini. Dans la section 4, on étudie le comportement des β -développements par rapport aux opérations arithmétiques.

2. La condition de Parry. Si $\beta \in \mathbb{Z}$, toutes les suites finies des chiffres $\{0, 1, \dots, \beta-1\}$ correspondent au β -développement d'un $x > 0$. Parmi les suites infinies, seulement celles qui se terminent en $(\beta-1)^\omega$ sont interdites. Quand la base β n'est pas entière, la situation est plus compliquée. Pour décider quelle suite de chiffres dans $\{0, 1, 2, \dots, [\beta]\}$ correspond à un β -développement, on utilise la condition de Parry [11]. Dans ce but, on définit le développement de Rényi $d_\beta(1)$ de 1. Soit $T_\beta(x) := \beta x - [\beta x]$. Alors

$$d_\beta(1) = t_1 t_2 t_3 \cdots, \quad \text{où} \quad t_i = \left[\beta T_\beta^{i-1}(1) \right] \quad \text{pour } i \geq 1.$$

Si parmi les t_i de $d_\beta(1)$ il y a infinité de coefficients non-nuls, on pose $d_\beta^*(1) = d_\beta(1)$. Si au contraire m est le plus grand indice d'un coefficient non-nul de $d_\beta(1)$, c'est-à-dire

$$1 = \frac{t_1}{\beta} + \frac{t_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{t_m}{\beta^m}, \quad t_m \neq 0,$$

alors on pose $d_\beta^*(1) = (t_1 t_2 \cdots t_{m-1} (t_m - 1)) (t_1 t_2 \cdots t_{m-1} (t_m - 1)) \cdots$. La suite $d_\beta^*(1)$ est ultimement périodique avec une période de longueur m .

Théorème 2.1. (PARRY) Soit $\sum_{i=-\infty}^k x_i \beta^i$ une β -représentation d'un nombre $x > 0$. Alors la série $\sum_{i=-\infty}^k x_i \beta^i$ est le β -développement de x si et seulement si pour tout $j \leq k$ la suite $x_j x_{j-1} x_{j-2} \cdots$ est lexicographiquement strictement inférieure à la suite $d_\beta^*(1)$, c'est-à-dire, formellement,

$$x_j x_{j-1} x_{j-2} \cdots \prec d_\beta^*(1).$$

Notez qu'un mot fini $c_k c_{k-1} \cdots c_0$ de chiffres entiers ou nuls satisfait la condition du Théorème 2.1 si

$$c_j c_{j-1} \cdots c_0 \prec d_\beta(1) \quad \text{pour tout } j = 0, 1, \dots, k.$$

Les mots satisfaisant la condition ci-dessus sont appelés *admissibles*. Un mot fini de chiffres entiers ou nuls est appelé *interdit* s'il n'est pas admissible. Comme $t_1 = [\beta]$, seulement les mots aux chiffres $0, 1, \dots, [\beta]$ sont admissibles.

Parmi les bases de numération, celles qui ont un développement de Rényi de 1 ultimement périodique sont remarquables. De tels nombres β sont appelés *bêta-nombres* ou *nombres de Parry* [11]. Il est facile de voir que chaque bêta-nombre β est racine d'une équation

$$(2.1) \quad x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1x - a_0 = 0, \quad a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent, β est un entier algébrique. On note ses conjugués par $\beta^{(2)}, \dots, \beta^{(d)}$, où d est le degré de β . Si on ne considère qu'un conjugué de β , on le dénote par β' . Les isomorphismes correspondants entre les corps $\mathbb{Q}(\beta)$ et $\mathbb{Q}(\beta^{(i)})$ (ou $\mathbb{Q}(\beta')$) associent $x \mapsto x^{(i)}$, x' respectivement.

Il est connu que tous les bêta-nombres sont des nombres de Perron, c'est-à-dire des entiers algébriques > 1 , dont tous les conjugués sont inférieurs à β en module.

Par contre, parmi les bêta-nombres on trouve tous les nombres de Pisot, c'est-à-dire les entiers algébriques > 1 dont tous les conjugués sont en module inférieurs à 1; voir [4,12]. La description complète des bêta-nombres n'est pas triviale. Pour d'autres résultats on renvoie aux travaux [5,6,13].

Les bêta-nombres ont des propriétés intéressantes comme les bases de numération. Par exemple, l'ensemble des distances entre les éléments voisins de $\mathbb{Z}_\beta$ est fini et peut être déterminé en connaissant les développements de Rényi $d_\beta(1)$ de 1 de la manière suivante [14].

Proposition 2.2. Soit $\beta > 1$, et soit $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ la suite croissante des β -entiers. Alors

$$e_{n+1} - e_n \in \{\Delta_j \mid j = 0, 1, 2, \dots\}, \quad \text{où } \Delta_j = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_{i+j}}{\beta^i} \text{ pour } j = 0, 1, 2, \dots$$

Il est évident que pour $d_\beta(1)$ ultimement périodique, les distances $e_{n+1} - e_n$ prennent un nombre fini de valeurs, soit $\{\Delta_0, \dots, \Delta_{k-1}\}$, dont la plus grande est

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{\beta^i} = 1.$$

Il est apparent qu'à l'ensemble des β -entiers on peut associer une suite de distances dans l'ordre correspondant à l'ordre des β -entiers sur la droite réelle. Comme $\mathbb{Z}_\beta$ est symétrique par rapport à l'origine, on ne considère que la partie non négative $\mathbb{Z}_\beta^+$, et on définit le mot infini dans l'alphabet de k symboles $\{a_0, \dots, a_{k-1}\}$ par

$$(2.2) \quad u_\beta = u_0 u_1 u_2 \dots, \quad \text{où } u_n = a_i \text{ si } e_{n+1} - e_n = \Delta_i.$$

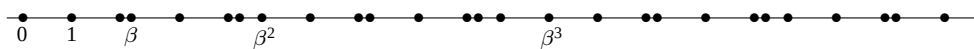
Exemple 2.3. Prenons l'exemple d'un système de numération où la base β est un bêta-nombre ayant le développement de 1 fini, $d_\beta(1) = 201$. Évidemment, β est un nombre de Pisot cubique complexe, racine de $x^3 = 2x^2 + 1$. Comme $[\beta] = 2$, les β -développements ont des chiffres $\in \{0, 1, 2\}$. De plus, la condition de Parry implique que les β -développements ne contiennent pas les mots

$$22, \quad 21, \quad 202, \quad 201.$$

On peut alors écrire l'ensemble $\mathbb{Z}_\beta^+$ dans l'ordre lexicographique

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_\beta^+ = \{ & 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, \\ & 200, 1000, 1001, 1002, 1010, 1011, 1012, 1020, 1100, 1101, \\ & 1102, 1110, 1111, 1112, 1120, 1200, 2000, 2001, 2002, 10000, \dots \} \end{aligned}$$

Dessiné sur la demi-droite réelle, $\mathbb{Z}_\beta$ a la forme



Les distances entre les éléments voisins de $\mathbb{Z}_\beta$ prennent trois valeurs différentes, notamment

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \frac{t_1}{\beta} + \frac{t_2}{\beta^2} + \frac{t_3}{\beta^3} = 1, & \bullet \text{---} \bullet \\ \Delta_1 &= \frac{t_2}{\beta} + \frac{t_3}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}, & \bullet \bullet \\ \Delta_2 &= \frac{t_3}{\beta} = \frac{1}{\beta}. & \bullet \bullet\end{aligned}$$

On considère alors un alphabet de trois symboles $\{a_0, a_1, a_2\} = \{a, b, c\}$ pour simplicité. Le mot u_β est alors donné par

$$u_\beta = a a b a a b c a a b a a b c a a a b a a b c a a b a a b c a a a b \dots$$

3. Propriétés combinatoires des mots u_β . Pour ce qui suit, il est utile d'introduire quelques notions de la combinatoire des mots. Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini de lettres (ou de chiffres). Un mot fini est une concaténation $w = w_1 \dots w_k$ de lettres de $\mathcal{A}$. L'ensemble $\mathcal{A}^*$ des mots finis avec le mot vide ε et muni de l'opération de concaténation est un monoïde libre. Un mot infini $u = u_0 u_1 u_2 \dots$ est une suite infinie de lettres de $\mathcal{A}$. L'ensemble des mots infinis est noté $\mathcal{A}^\mathbb{N}$. On dit qu'un mot w est un *facteur* de $v \in \mathcal{A}^*$ (resp. $\mathcal{A}^\mathbb{N}$), s'il existe des mots $w^{(1)} \in \mathcal{A}^*$, $w^{(2)} \in \mathcal{A}^*$ (resp. $w^{(2)} \in \mathcal{A}^\mathbb{N}$) tels que $v = w^{(1)} w w^{(2)}$. Le mot w est un *préfixe* de v si $w^{(1)} = \varepsilon$. Le mot w est un *suffixe* de v si $w^{(2)} = \varepsilon$. Un mot infini v est *ultimement périodique* s'il est de la forme $v = w z^\omega$, où w et z appartiennent à $\mathcal{A}^*$ et $z^\omega = z z z \dots$.

Un *morphisme* sur le monoïde libre $\mathcal{A}^*$ est une application $\varphi : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ qui satisfait $\varphi(wz) = \varphi(w)\varphi(z)$ pour tout w, z dans $\mathcal{A}^*$. Le morphisme φ est uniquement déterminé par $\varphi(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. Le morphisme φ est appelé *substitution* si $\varphi(a) \neq \varepsilon$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ et s'il existe une lettre $a \in \mathcal{A}$ telle que $|\varphi(a)| > 1$. Un mot infini v est dit un *point fixe* de la substitution φ , ou invariant par la substitution φ , si

$$(3.1) \quad \varphi(v_0)\varphi(v_1)\varphi(v_2)\dots = v_0 v_1 v_2 \dots$$

Ceci implique que $\varphi(v_0) = v_0 \tilde{v}$ et $\varphi^n(v) = v$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La longueur du mot $\varphi^n(v_0)$ monte vers l'infini avec n et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le mot $\varphi^n(v_0)$ est un préfixe du point fixe v . Formellement, on a

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(v_0).$$

Chaque système de numération où la base β est un bêta-nombre correspond à une substitution φ_β canonique [8]. Cette substitution engendre le mot u_β défini par (2.2), c'est-à-dire u_β est le point fixe de φ_β .

Soit $d_\beta(1) = t_1 t_2 \dots t_m$ fini. Les distances entre les éléments voisins de l'ensemble $\mathbb{Z}_\beta$ prennent alors m valeurs. Le mot u_β correspondant, étant dans l'alphabet $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$, est le point fixe $u_\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(a_0)$ de la substitution

$\varphi = \varphi_\beta : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ suivante :

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \varphi(a_0) & = & a_0^{t_1} a_1 \\ \varphi(a_1) & = & a_0^{t_2} a_2 \\ & \vdots & \\ \varphi(a_{m-2}) & = & a_0^{t_{m-1}} a_{m-1} \\ \varphi(a_{m-1}) & = & a_0^{t_m}. \end{array} \right.$$

Soit maintenant $d_\beta(1)$ infini ultimement périodique

$$d_\beta(1) = t_1 t_2 \dots t_m (t_{m-1} \dots t_{m+p})^\omega,$$

avec m, p minimaux. Les distances Δ_j entre les β -entiers voisins prennent $m+p$ valeurs différentes. Pour le mot u_β il faut alors considérer l'alphabet $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \dots, a_{m+p-1}\}$. La substitution $\varphi = \varphi_\beta : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ est donnée par

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \varphi(a_0) & = & a_0^{t_1} a_1 \\ \varphi(a_1) & = & a_0^{t_2} a_2 \\ & \vdots & \\ \varphi(a_{m+p-2}) & = & a_0^{t_{m+p-1}} a_{m+p-1} \\ \varphi(a_{m+p-1}) & = & a_0^{t_{m+p}} a_m. \end{array} \right.$$

Dans les deux cas, on a $u_\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(a_0)$.

La complexité d'un mot infini v est une fonction $\mathcal{C} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$\mathcal{C}(n) := \#\{v_i v_{i+1} \dots v_{i+n-1} \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}.$$

Il n'est pas difficile de démontrer qu'un mot infini u est ultimement périodique si et seulement s'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que sa complexité satisfait $\mathcal{C}(n) \leq n$. C'est pourquoi un mot apériodique le moins complexe possible doit avoir la complexité $\mathcal{C}(n) = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\mathcal{C}(1) = 2$, ces mots sont sur un alphabet binaire; ils sont appelés *sturmiens* ou *mots de Sturm*.

On trouve les mots sturmiens aussi parmi les mots u_β correspondant aux β -entiers, notamment pour β des nombres de Pisot quadratiques unitaires, c'est-à-dire racines de

$$\begin{cases} x^2 = tx + 1, & t \in \mathbb{N}, \\ x^2 = tx - 1, & t \in \mathbb{N}, \quad t \geq 3, \end{cases}$$

dont le développement de Rényi de 1 est $d_\beta(1) = t1$ et $d_\beta(1) = (t-1)(t-2)^\omega$ respectivement. À part les mots sturmiens correspondant aux systèmes de numérations, il y a un nombre indénombrable de mots de Sturm non-équivalents qui ne sont invariants par aucune substitution.

Dans [9] nous avons étudié des mots u_β pour le cas général où β est un bêta-nombre ayant $d_\beta(1)$ fini. En particulier, on a démontré le résultat suivant.

Théorème 3.1. Soit $d_\beta(1) = t_1 t_2 \cdots t_m$ tel que $t_1 = t_2 = \cdots = t_{m-1}$ ou $t_1 > \max\{t_2, t_3, \dots, t_{m-1}\}$. Alors la complexité du mot infini u_β satisfait

$$(m-1)n+1 \leq \mathcal{C}(n) \leq mn-1.$$

Si de plus $t_m = 1$, alors

$$\mathcal{C}(n) = (m-1)n+1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La formule explicite pour $\mathcal{C}(n)$ sous les conditions mentionnées dans le théorème est compliquée et nécessite d'autres définitions; elle est à trouver dans [9].

Exemple 3.2. Revenons à l'exemple du nombre de Pisot β avec $d_\beta = 201$ (exemple 2.3). Comme le développement de 1 est fini, la substitution canonique sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ est donnée par

$$\varphi_\beta(a) = aab, \quad \varphi_\beta(b) = c, \quad \varphi_\beta(c) = a.$$

Cette substitution a un point fixe unique, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_\beta^n(a) = u_\beta$, qu'on obtient par itération de la substitution, soit

$$\begin{aligned} a &\mapsto aab \mapsto aabaabc \mapsto aabaabcaabaabca \\ &\mapsto aabaabcaabaabcaabaabcaabaabcaabaabca \mapsto \cdots \end{aligned}$$

Notez que chaque itération a comme préfixe le mot précédent. D'après le théorème 3.1, la complexité du mot u_β est $\mathcal{C}(n) = 2n+1$, ce qui correspond au fait que les ensembles L_n des mots de longueur n sont

$$\begin{array}{ll} L_1 = \{a, b, c\}, & \mathcal{C}(1) = 3, \\ L_2 = \{aa, ab, ba, bc, ca\}, & \mathcal{C}(2) = 5, \\ L_3 = \{aaa, aab, aba, abc, baa, bca, caa\}, & \mathcal{C}(3) = 7, \\ L_4 = \{aaab, aaba, aabc, abaa, abca, baab, bcaa, caaa, caab\}, & \mathcal{C}(4) = 9, \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

4. Arithmétique sur les β -développements. Si $\beta \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des β -entiers coïncide avec les entiers rationnels : $\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}$. Par conséquent, $\mathbb{Z}_\beta$ est fermé sous l'addition et la multiplication. Si par contre $\beta \notin \mathbb{Z}$, la somme et le produit de deux β -entiers ne sont pas nécessairement des β -entiers.

Exemple 4.1. Soit $\beta > 2$ un nombre arbitraire, $\beta \notin \mathbb{Z}$. L'addition $x + y$ de deux β -entiers $x = [\beta]$, $y = 1$ n'est pas un β -entier. Comme $\beta > 1$, on a $[\beta] + 1 < 2\beta$. Pour $\beta > 2$, on a évidemment aussi $[\beta] + 1 < \beta^2$. Si alors $[\beta] + 1 \in \mathbb{Z}_\beta$, on a nécessairement $[\beta] + 1 = a_0 + \beta$ pour $a_0 \in \mathbb{Z}$ quelconque, ce qui contredit $\beta \notin \mathbb{Z}$. Par conséquent, $[\beta] + 1 \notin \mathbb{Z}_\beta$. Notons que la même chose est valable pour $\beta \in (1, 2)$, mais la démonstration est plus compliquée. Pour le cas $d_\beta(1) = 201$, on a $[\beta] = 2$. Dans la table suivante, on détermine le β -développement de $[\beta] + 1 = 3$. Pour mieux visualiser,

Théorème 4.3. Soit β un nombre de Pisot de degré d . Alors

$$\mathbb{Z}_\beta + \mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta + F_\oplus,$$

$$\mathbb{Z}_\beta \times \mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta + F_\otimes,$$

où les ensembles finis $F_\oplus$ et $F_\otimes$ sont donnés par

$$F_\oplus = \left\{ x = a_0 + a_1\beta + \dots + a_{d-1}\beta^{d-1} \mid a_j \in \mathbb{Z}, 0 \leq x < 1, |x^{(i)}| < 2H^{(i)} \right\},$$

$$F_\otimes = \left\{ x = a_0 + a_1\beta + \dots + a_{d-1}\beta^{d-1} \mid a_j \in \mathbb{Z}, 0 \leq x < 1, |x^{(i)}| < H^{(i)}(H^{(i)} + 1) \right\}.$$

Les β -développements des éléments de $F_\oplus$ et $F_\otimes$ jouent le rôle des parties fractionnaires de l'addition ou de la multiplication de deux β -entiers. Si tous les éléments de $F_\oplus$ ont un β -développement fini, alors l'ensemble $\text{Fin}(\beta)$ est fermé sous l'addition. La condition suffisante pour que $\text{Fin}(\beta)$ soit un anneau s'écrit alors de la manière suivante :

Corollaire 4.4. Soit β un nombre de Pisot de degré d . Si $F_\oplus \subset \text{Fin}(\beta)$, alors $\text{Fin}(\beta)$ est un anneau.

On peut aussi utiliser le théorème 4.3 pour dériver plus d'informations sur l'arithmétique des β -développements. En particulier, on peut déterminer une borne supérieure aux quantités $L_\oplus, L_\otimes$ qui donnent les nombres maximaux de chiffres fractionnaires qui résultent de la somme et le produit de deux β -entiers. Plus précisément, on définit

$$L_\oplus = L_\oplus(\beta) := \min \left\{ k \in \mathbb{N}_0 \mid x, y \in \mathbb{Z}_\beta \text{ et } x + y \in \text{Fin}(\beta) \implies x + y \in \beta^{-k}\mathbb{Z}_\beta \right\},$$

$$L_\otimes = L_\otimes(\beta) := \min \left\{ k \in \mathbb{N}_0 \mid x, y \in \mathbb{Z}_\beta \text{ et } xy \in \text{Fin}(\beta) \implies xy \in \beta^{-k}\mathbb{Z}_\beta \right\}.$$

Il est connu [7] que pour un nombre de Pisot β , les quantités $L_\oplus, L_\otimes$ sont finies.

Exemple 4.5. Soit β le nombre de Pisot cubique tel que $d_\beta(1) = 201$. Les racines $\beta^{(2)}, \beta^{(3)}$ conjuguées de β sont complexes; $\beta^{(2)} = \overline{\beta^{(3)}}$. Par conséquent, $H^{(2)} = H^{(3)}$. La valeur exacte de $H^{(2)}$ n'est pas facile à calculer. En utilisant une estimation, on obtient un sur-ensemble de $F_\oplus$. Les β -développements de tous ses éléments sont finis, et

$$\begin{aligned} F_\oplus \subset \{ & 0, 0 \bullet 1, 0 \bullet 2, 0 \bullet 01, 0 \bullet 02, 0 \bullet 11, 0 \bullet 12, 0 \bullet 001, 0 \bullet 011, \\ & 0 \bullet 101, 0 \bullet 102, 0 \bullet 111, 0 \bullet 112, 0 \bullet 0001, 0 \bullet 0011, 0 \bullet 0101, \\ & 0 \bullet 0111, 0 \bullet 1001, 0 \bullet 1011, 0 \bullet 1101, 0 \bullet 1111, 0 \bullet 00101, \\ & 0 \bullet 00111, 0 \bullet 01111, 0 \bullet 100101, 0 \bullet 200101, 0 \bullet 1200101 \} \end{aligned}$$

donc d'après le corollaire 4.4, $\text{Fin}(\beta)$ est un anneau. Il est clair que $F_\oplus \subset \beta^{-7}\mathbb{Z}_\beta$. Par conséquent, on a la borne supérieure $L_\oplus \leq 7$. Rappelons-nous que le β -développement de 3 est $\langle 3 \rangle_\beta = 10 \bullet 1111$, ce qui donne

$$4 \leq L_\oplus \leq 7.$$

Dans [3] nous avons donné d'autres méthodes de détermination de $L_\oplus$ et $L_\otimes$. On y dérive aussi d'autres conditions suffisantes pour que $\text{Fin}(\beta)$ soit un anneau.

5. Conclusion. Beaucoup de questions concernant la structure et les propriétés de l'ensemble $\mathbb{Z}_\beta$ des β -entiers restent ouvertes. Par exemple, la complexité des mots u_β correspondant aux β -entiers a été déterminée seulement pour $d_\beta(1)$ fini, et cela encore sous des conditions additionnelles. On a mentionné que si la base β est un nombre de Pisot quadratique unitaire, le mot u_β est un mot de Sturm, c'est-à-dire la complexité de u_β est $\mathcal{C}(n) = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Beaucoup de propriétés combinatoires sont connues pour des mots sturmiens, comme par exemple la structure des palindromes, les mots de retour, les balances, etc. La généralisation pour d'autres mots infinis n'a pas encore été étudiée.

Exceptées les conditions nécessaires et suffisantes pour la structure d'anneau de $\text{Fin}(\beta)$, les travaux [3], [10] donnent aussi des algorithmes pour des opérations arithmétiques sur les β -développements finis. Le logiciel qui utilise ces algorithmes est disponible; voir [2]. Au cas où β est un nombre de Pisot, il a été prouvé en [4] et [12] que tout élément $x \in \mathbb{Q}(\beta)$ a un β -développement fini ou ultimement périodique. Il serait intéressant de trouver des algorithmes pour des β -développements périodiques.

Pour un nombre de Pisot β , les valeurs $L_\oplus(\beta)$, $L_\otimes(\beta)$ sont finies. Les mêmes quantités peuvent être définies pour un nombre $\beta > 1$ arbitraire. Néanmoins, le comportement des β -développements par rapport aux opérations arithmétiques n'est pas clair en général. Est-ce qu'il existe une base β telle que $L_\oplus(\beta) = +\infty$, ou $L_\otimes(\beta) = +\infty$?

Remerciements. Cette recherche a été supportée par Czech Science Foundation GA ĆR 201/05/0169 et NĀLF.

English extended abstract. In this paper we consider numeration systems related to an irrational base $\beta > 1$. In particular, we expose some interesting combinatorial and arithmetical properties of integers in such a system and illustrate them with examples. In conclusion, we list some related open problems.

Every non-negative x has a unique expression in the form of its β -expansion, i.e. the convergent power series

$$x = \sum_{i=-\infty}^k x_i \beta^i, \quad \text{denoted by } \langle x \rangle_\beta = x_k x_{k-1} \cdots x_0 \bullet x_{-1} \cdots$$

where the coefficients x_i are integers $0 \leq x_i < \beta$ such that $\sum_{i=-\infty}^\ell x_i \beta^i < \beta^{\ell+1}$ for all $-\infty < \ell < k$. We study in particular the set $\mathbb{Z}_\beta$ of β -integers, i.e., numbers for which $|x| = \sum_{i=0}^k x_i \beta^i$, and *in extenso* the set $\text{Fin}(\beta) := \bigcup_{n=0}^\infty \beta^{-n} \mathbb{Z}_\beta$.

If β is a rational integer, then $\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}$. For $\beta \notin \mathbb{Z}$, the set $\mathbb{Z}_\beta$ has certain peculiar properties. For example, not every finite sequence $x_k \cdots x_0$ of coefficients $x_i \in \{0, 1, \dots, [\beta]\}$ is a β -expansion of some $x > 0$. The admissibility of sequences of coefficients is given by the Parry condition using the Rényi development of 1, defined by

$$d_\beta(1) = t_1 t_2 t_3 \cdots,$$

where $t_1 = [\beta]$ and $\sum_{n=2}^\infty t_n \beta^{-n}$ is the β -expansion of $1 - t_1 \beta^{-1}$. A number β , for which $d_\beta(1)$ is eventually periodic (finite), is called a (simple) beta-number.

The elements of $\mathbb{Z}_\beta$ determine a tiling of the real line. The distances between consecutive elements take values $\sum_{i=1}^\infty t_{i+n} \beta^{-i}$ for $n \in \mathbb{N}_0$. If β is a beta-number, they

are finitely many. In such a case the order of distances on the positive half-line can be coded by an infinite word $u_\beta = u_0 u_1 u_2 \dots$ in a finite alphabet $\mathcal{A}$ whose cardinality is determined by the lengths of pre-period and period of $d_\beta(1)$. The infinite word u_β has interesting combinatorial properties. For example, it is invariant under a primitive substitution. Using this fact, one can show that the complexity $\mathcal{C}(n)$ (the number of different factors of given length n) is sublinear. For a large class of simple beta-numbers β , we determine the first difference $\Delta\mathcal{C}(n) \in \{m, m-1\}$, where m is the number of letters in the alphabet $\mathcal{A}$.

The set $\mathbb{Z}_\beta$ is interesting also from the arithmetical point of view. If $\beta \in \mathbb{Z}$, then $\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}$ is a ring. For other bases β , not only $\mathbb{Z}_\beta$ is not closed under addition and multiplication, but the result of summing and multiplying β -integers may even have an infinite β -expansion. We study the conditions under which the set $\text{Fin}(\beta)$ is a ring. This question is in general very complicated. The necessary condition is that the base β of the numeration system is a Pisot number, i.e., an algebraic integer with all conjugates inside the unit disc. Some sufficient conditions are given in terms of the coefficients of the Renyi development of 1. If β is a Pisot number, it is shown that

$$\mathbb{Z}_\beta + \mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta + F_\oplus, \quad \mathbb{Z}_\beta \times \mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta + F_\otimes,$$

for finite sets $F_\oplus, F_\otimes \subset [0, 1)$. If the β -expansions of their elements are finite, then $\text{Fin}(\beta)$ is a ring, since they play the role of possible “ β -fractional parts” of sums and products of β -integers. Even in case that $\text{Fin}(\beta)$ is not closed under addition and multiplication, interesting information about the arithmetics in the β -numeration systems is given by the quantities

$$L_\oplus = L_\oplus(\beta) := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \forall x, y \in \mathbb{Z}_\beta, x + y \in \text{Fin}(\beta) \Rightarrow x + y \in \beta^{-n}\mathbb{Z}_\beta\},$$

$$L_\otimes = L_\otimes(\beta) := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \forall x, y \in \mathbb{Z}_\beta, xy \in \text{Fin}(\beta) \Rightarrow xy \in \beta^{-n}\mathbb{Z}_\beta\}.$$

They are the bounds on the length of the fractional parts arising in the addition and the multiplication of β -integers.

The notions presented in this paper have been in focus of numerous mathematicians in recent years; nevertheless, there remain many open questions concerning the structure of β -integers and other properties of the related non-standard numeration systems.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Akiyama, *Cubic Pisot units with finite beta expansions*, Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis (Graz, 1998), de Gruyter, Berlin, 2000, pp. 11–26.
2. P. Ambrož, *Computer program performing arithmetical operations on β -integers for a family of Pisot numbers*; <http://linux.fjfi.cvut.cz/~ampy/arithmic.html>.
3. P. Ambrož, C. Frougny, Z. Masáková et E. Pelantová, *Arithmetics on number systems with irrational bases*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **10** (2003), 641–659.
4. A. Bertrand, *Développements en base de Pisot et répartition modulo 1*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **285** (1977), 419–421.
5. D. W. Boyd, *On the beta expansion for Salem numbers of degree 6*, Math. Comp. **65** (1996), 861–875.
6. H. Hasse, *Salem numbers of degree four have periodic expansions*, Théorie des nombres/Number Theory (J.-M. De Koninck et C. Lévesque, eds.), de Gruyter, Berlin-New York, 1989, pp. 57–64.

7. L. S. Guimond, Z. Masáková et E. Pelantová, *Arithmetics on beta-expansions*, Acta Arith. **112** (2004), 23–40.
8. S. Fabre, *Substitution et β -systèmes de numération*, Theoret. Comput. Sci. **137** (1995), 219–236.
9. C. Frougny, Z. Masáková et E. Pelantová, *Complexity of infinite words associated with beta-expansions*, Theor. Inform. Appl. **38** (2004); no. 2, 163–185; Corrigendum in: Theor. Inform. Appl. **38** (2004); no. 3, 269–271.
10. Ch. Frougny et B. Solomyak, *Finite β -expansions*, Ergodic Theory Dynam. Systems **12** (1992), 713–723.
11. W. Parry, *On the β -expansions of real numbers*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **11** (1960), 401–416.
12. K. Schmidt, *On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers*, Bull. London Math. Soc. **12** (1980), 269–278.
13. B. Solomyak, *Conjugates of beta-numbers and the zero-free domain for a class of analytic functions*, Proc. London Math. Soc. **68** (1994), 477–498.
14. W. P. Thurston, *Groups, tilings, and finite state automata*, Preprint GCG 01, The Geometry Center, University of Minnesota, Minneapolis, 1989.

Z. MASÁKOVÁ

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

FACULTÉ DE GÉNIE NUCLÉAIRE ET DE PHYSIQUE DE L'INGÉNIEUR

UNIVERSITÉ POLYTECHNIQUE TCHÈQUE

TROJANOVA 13, 120 00 PRAHA 2

RÉPUBLIQUE TCHÈQUE

COURRIEL : masakova@km1.fjfi.cvut.cz