

CORPS CUBIQUES PURS DONT LE NOMBRE DE CLASSES EST EXACTEMENT DIVISIBLE PAR 3

MOULAY CHRIF ISMAILI ET RACHID EL MESAUDI

RÉSUMÉ. Soient $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$ un corps cubique pur, où n est un entier naturel sans facteur cubique, $k = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n}, j)$ sa clôture normale, $j = e^{2i\pi/3}$. Moyennant les propriétés arithmétiques de Γ et de son normalisé k , et en utilisant la théorie des groupes, la théorie des genres et les propriétés du symbole cubique, nous réalisons un grand pas vers la détermination de tous les corps cubiques purs dont le nombre de classes est exactement divisible par 3.

ABSTRACT. Let $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$ be a pure cubic field with n being a cubic-free natural number, and let $k = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n}, j)$ be the normal closure of k where $j = e^{2i\pi/3}$. Using the arithmetic of Γ and of its Galois closure k , and by means of group theory, genus theory and the properties of the cubic residue symbol, we exhibit good progress towards the determination of all pure cubic fields whose class number is divisible by 3.

1. Notations.

- La lettre p désignera un nombre premier congru à 1 (mod 3) et les lettres q et q_i , où $i \in \{1, 2, 3\}$, désigneront des nombres premiers congrus à -1 (mod 3);
- $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$: un corps cubique pur, où n est un entier naturel sans facteur cubique;
- $j = e^{2i\pi/3}$ et $k_0 = \mathbf{Q}(j)$;
- $k = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n}, j)$: la clôture normale de Γ ;
- E_k : le groupe des unités de k ;
- u : l'indice du sous-groupe E_0 engendré par les unités des corps intermédiaires de $k/\mathbf{Q}$ dans E_k ;
- h_Γ le nombre de classes de Γ , h_k celui de k ;
- $\langle \sigma \rangle = \text{Gal}(k/\mathbf{Q}(j))$ et $\langle \tau \rangle = \text{Gal}(k/\Gamma)$;
- $\mathcal{H}(k)$ le 3-groupe des classes d'idéaux de k ;
- $\left(\frac{c}{p}\right)_3 = 1 \Leftrightarrow X^3 \equiv c \pmod{p}$ est résoluble dans $\mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow c^{(p-1)/3} \equiv 1 \pmod{p}$ (critère d'Euler).

Reçu le 15 septembre 2003 et, sous forme définitive, le 24 janvier 2005.

2. Introduction. L'idée de déterminer tous les corps cubiques purs, dont le nombre de classes est exactement divisible par 3, trouve ses origines dans certains travaux réalisés par M. C. Ismaili dans sa thèse de doctorat à l'université Laval (voir [Is]), où il a établi que le 3-groupe de classes d'idéaux $\mathcal{H}(k)$ du normalisé k de Γ est de type $(3, 3)$, c'est-à-dire isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, si et seulement si 3 divise exactement h_Γ et $u = 3$. Il a aussi donné toutes les formes possibles de l'entier n lorsque $\mathcal{H}(k)$ est de type $(3, 3)$. Nous arrivons à montrer que ces dernières formes sont les seules possibles pour les corps cubiques purs que nous voulons déterminer. Pour ce faire, nous avons partitionné l'ensemble des corps cubiques purs en quatre types : A, B, C et D.

L'un des résultats les plus souvent utilisés, et qui met en évidence le lien entre l'arithmétique de Γ et de son normalisé k , est la proposition suivante; voir [B-C1].

Proposition 2.1.

- (1) Soit $u = [E_k : E_0]$. Alors il y a deux possibilités : ou bien $u = 1, E_k = E_0 = \langle \varepsilon, \varepsilon^\sigma, -j \rangle$, où ε est l'unité fondamentale de Γ , ou bien $u = 3, E_0 \neq E_k = \langle \eta, \eta^\sigma, -j \rangle$; où $\eta \in E_k$ et pour un $c \in \mathbb{Z}$ fixé modulo 3 on a $\eta^3 = j^c \varepsilon^{1-\sigma}$.
- (2) $h_k = h_\Gamma^2 \frac{u}{3}$.

3. Corps cubiques purs de type A.

Définition 3.1. Un corps cubique pur $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$ est dit de type A si n s'écrit sous l'une des formes suivantes :

- (i) $n = p^e$ avec $p \equiv 1 \pmod{3}$ et $e \in \{1, 2\}$;
- (ii) $n = 3^e p^{e_1}$ avec $p \equiv 4$ ou $7 \pmod{9}$ et $e, e_1 \in \{1, 2\}$;
- (iii) $n = p^e q^{e_1} \equiv \pm 1 \pmod{9}$ avec p ou $-q \equiv 4$ ou $7 \pmod{9}$ et $e, e_1 \in \{1, 2\}$.

Théorème 3.2. Soit $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$ un corps cubique pur de type A.

- (1) Si $n = 3^e p^{e_1}$, où $p \equiv 4$ ou $7 \pmod{9}$, $e \in \{0, 1, 2\}$ et $e_1 \in \{1, 2\}$, alors

$$\left(\frac{3}{p}\right)_3 \neq 1 \iff (3 \mid h_\Gamma \text{ et } u = 1).$$

- (2) Si $n = p^e q^{e_1} \equiv \pm 1 \pmod{9}$, où p ou $-q \equiv 4$ ou $7 \pmod{9}$ et $e, e_1 \in \{1, 2\}$, alors

$$\left(\frac{q}{p}\right)_3 \neq 1 \iff (3 \mid h_\Gamma \text{ et } u = 1).$$

Remarque 3.3. Dans le théorème précédent, on a exclu le cas $n = p^{e_1}$ avec $p \equiv 1 \pmod{9}$ et $e_1 \in \{1, 2\}$. Dans ce cas, on a trouvé des nombres premiers pour lesquels la divisibilité exacte par 3 du nombre de classes des corps cubiques purs $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{p^{e_1}})$ ne dépend pas du symbole cubique $(3/p)_3$ (voir Table 1).

p	$\left(\frac{3}{p}\right)_3$	h_Γ	p	$\left(\frac{3}{p}\right)_3$	h_Γ	p	$\left(\frac{3}{p}\right)_3$	h_Γ
19	$\neq 1$	3	577	1	15	2053	$\neq 1$	3
37	$\neq 1$	3	613	1	3	2089	$\neq 1$	3
73	1	3	631	$\neq 1$	3	2143	$\neq 1$	12
109	$\neq 1$	3	739	$\neq 1$	21	2161	$\neq 1$	9
127	$\neq 1$	3	757	1	3	2179	1	3
163	$\neq 1$	3	811	$\neq 1$	15	2251	1	3
181	$\neq 1$	3	829	$\neq 1$	3	2269	1	9
199	$\neq 1$	9	883	$\neq 1$	3	2287	1	3
271	1	9	919	1	9	2341	1	12
307	1	6	937	$\neq 1$	3	2377	$\neq 1$	9
379	$\neq 1$	3	1009	1	3	2467	$\neq 1$	45
397	$\neq 1$	3	1063	$\neq 1$	6	2503	$\neq 1$	3
433	$\neq 1$	6	1117	1	3	2521	$\neq 1$	6
487	$\neq 1$	18	1153	$\neq 1$	3	2539	$\neq 1$	3
523	1	9	1171	$\neq 1$	6	2557	$\neq 1$	3
541	$\neq 1$	9	1999	$\neq 1$	9	2593	$\neq 1$	9

TABLE 1

Exemples numériques. (1) Nous avons vérifié pour les nombres premiers $p = 7, 13, 31, 79, 97, 139, 175, 211, 223, 229, 241, 277$, que $\left(\frac{3}{p}\right)_3 \neq 1$, de sorte que d'après la partie (1) du théorème 3.2, $3||h_\Gamma$, où $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{p^e})$ avec $e \in \{1, 2\}$; de plus, l'indice $u = [E_k : E_0]$ vaut 1. Par suite, le groupe des unités E_k de $k = k_0(\sqrt[3]{p^e})$ est déterminé explicitement. À noter que les cas $p = 7, 13, 31, 43$ sont en accord avec les résultats donnés par Barrucand et Cohn dans [B-C1], où ils montrent que $u = 1$.

(2) Pour les mêmes nombres premiers cités dans (1), d'après la partie (2) du théorème 3.2, $3||h_\Gamma$ où $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{3^e p^{e_1}})$ avec $e, e_1 \in \{1, 2\}$ et $u = 1$; ainsi, le groupe des unités E_k de $k = k_0(\sqrt[3]{3^e p^{e_1}})$ est déterminé explicitement.

(3) Pour les entiers $n = 2 \cdot 13 = 26, 7 \cdot 4 = 28, 7 \cdot 5 = 35, 11 \cdot 13 = 143, 5 \cdot 43 = 215, 11 \cdot 31 = 341$, on a $\left(\frac{q}{p}\right)_3 \neq 1$, qu'on peut établir en utilisant le logiciel de calcul PARI. D'où $3||h_\Gamma$ et $u = [E_k : E_0] = 1$, où $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{p^{e_1} q^{e_2}})$ et $k = k_0(\sqrt[3]{p^{e_1} q^{e_2}})$ avec $e_1, e_2 \in \{1, 2\}$.

Conclusion. Soit $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$ un corps cubique pur de type A tel que n n'est pas de la forme $n = p^e$, où $p \equiv 1 \pmod{9}$ et $e \in \{1, 2\}$. On a :

$$\left(\frac{c}{p}\right)_3 \neq 1 \iff (3||h_\Gamma \text{ et } u = 1)$$

où c est un entier naturel qu'on détermine selon la forme de n .

4. Corps cubiques purs de type B.

Définition 4.1. Un corps cubique pur $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$ est dit de type B si n s'écrit sous l'une des formes suivantes :

- (i) $n = 3^e q_1^{e_1}$ avec $q_1 \equiv -1 \pmod{9}$ et $e, e_1 \in \{1, 2\}$;
- (ii) $n = q_1^{e_1} q_2^{e_2}$ avec $q_1 \equiv q_2 \equiv -1 \pmod{9}$ et $e_1, e_2 \in \{1, 2\}$;
- (iii) $n = 3^e q_1^{e_1} q_2^{e_2}$ si un $q_i \equiv 2$ ou $5 \pmod{9}$ avec $e_1, e_2 \in \{1, 2\}$, $e = 0, 1$ ou 2 et $n \not\equiv \pm 1 \pmod{9}$;
- (iv) $n = q_1^{e_1} q_2^{e_2} q_3^{e_3}$ si un $q_i \equiv 2$ ou $5 \pmod{9}$ avec $n \equiv \pm 1 \pmod{9}$ et $e_1, e_2, e_3 \in \{1, 2\}$.

Proposition 4.2. Soit $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$ un corps cubique pur de type B. Alors nous avons toujours $3|h_\Gamma$.

Remarque 4.3. Lorsque $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$ est un corps cubique pur de type B, on a trouvé des exemples d'entiers n pour lesquels la divisibilité par 3 du nombre de classes h_Γ ne dépend pas des diviseurs premiers de n , c'est-à-dire de la factorisation de n en nombres premiers (voir Table 2).

n	h_Γ	n	h_Γ
$3 \cdot 17 = 51$	3	$3 \cdot 2^2 \cdot 83 = 996$	36
$3^2 \cdot 17 = 153$	9	$3^2 \cdot 2 \cdot 83 = 1494$	6
$3 \cdot 107 = 321$	9	$3^2 \cdot 2^2 \cdot 83 = 2988$	9
$3^2 \cdot 107 = 963$	3	$3 \cdot 5 \cdot 59 = 885$	6
$17 \cdot 71 = 1207$	9	$3 \cdot 5^2 \cdot 59 = 4425$	54
$17^2 \cdot 71 = 20519$	3	$3^2 \cdot 5 \cdot 59 = 2655$	3
$17 \cdot 53 = 901$	6	$3 \cdot 5 \cdot 83 = 1245$	18
$17^2 \cdot 53 = 15317$	3	$3 \cdot 5^2 \cdot 83 = 6225$	6
$17 \cdot 89 = 1513$	9	$3^2 \cdot 5^2 \cdot 83 = 18675$	3
$17^2 \cdot 89 = 25721$	3	$3^2 \cdot 5 \cdot 83 = 3735$	18
$17 \cdot 179 = 3043$	21	$3 \cdot 5 \cdot 107 = 1605$	54
$17^2 \cdot 179 = 51731$	117	$3 \cdot 5^2 \cdot 107 = 8025$	126
$53 \cdot 71 = 3763$	9	$3^2 \cdot 5 \cdot 107 = 4815$	9
$53^2 \cdot 71 = 199437$	6	$3^2 \cdot 5^2 \cdot 107 = 24075$	54
$3 \cdot 5 \cdot 23 = 345$	3	$11^2 \cdot 17 \cdot 29 = 59653$	81
$3 \cdot 5^2 \cdot 23 = 1725$	18	$11 \cdot 17 \cdot 29^2 = 157267$	9
$3^2 \cdot 5^2 \cdot 23 = 5175$	18	$2 \cdot 17 \cdot 41 = 1394$	18
$3^2 \cdot 5 \cdot 23 = 1035$	6	$2 \cdot 17^2 \cdot 41 = 23698$	9
$3 \cdot 5 \cdot 41 = 615$	6	$5 \cdot 11 \cdot 17 = 935$	3
$3^2 \cdot 5 \cdot 41 = 1845$	3	$5^2 \cdot 11^2 \cdot 17 = 51425$	3
$3^2 \cdot 5^2 \cdot 41 = 9225$	18	$2^2 \cdot 11 \cdot 107 = 4708$	3
$3 \cdot 5^2 \cdot 41 = 3075$	9	$2 \cdot 11^2 \cdot 107 = 25894$	3

TABLE 2

5. Corps cubiques purs de type C.

Définition 5.1. Un corps cubique pur $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$ est dit de type C si n s'écrit sous l'une des formes suivantes :

- (i) $n = 3^e p^{e_1}$ avec $p \equiv 1 \pmod{9}$ et $e, e_1 \in \{1, 2\}$;
- (ii) $n = q^e p^{e_1}$ avec $-q \equiv p \equiv 1 \pmod{9}$ et $e, e_1 \in \{1, 2\}$;
- (iii) $n = p^e q_1^{e_1} q_2^{e_2}$ avec p ou $-q_1$ ou $-q_2 \equiv 4$ ou $7 \pmod{9}$, $n \equiv \pm 1 \pmod{9}$ et $e, e_1, e_2 \in \{1, 2\}$;
- (iv) $n = 3^e p^{e_1} q^{e_2}$ avec p ou $-q \equiv 4$ ou $7 \pmod{9}$, $e = 0, 1$ ou 2 , $e_2, e_1 \in \{1, 2\}$ et $n \not\equiv \pm 1 \pmod{9}$.

Soit $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$ un corps cubique pur de type C, où n est un entier naturel sans facteurs cubes. Soient p, q, q_1 , et q_2 des nombres premiers tels que $p \equiv -q \equiv -q_1 \equiv -q_2 \equiv 1 \pmod{3}$, et $\lambda = 1 - j \in k_0$.

Théorème 5.2. (1) Si $n = 3^e p^{e_1}$, où $p \equiv 1 \pmod{9}$ et $e, e_1 \in \{1, 2\}$, alors

$$\left(\frac{3}{p}\right)_3 \neq 1 \iff 3 \parallel h_\Gamma.$$

(2) Si $n = p^e q^{e_1}$, où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod{9}$ et $e, e_1 \in \{1, 2\}$, alors

$$\left(\frac{q}{p}\right)_3 \neq 1 \iff 3 \parallel h_\Gamma.$$

(3) Soit $n = p^e q_1^{e_1} q_2^{e_2}$, avec p ou $-q_1$ ou $-q_2 \equiv 4$ ou $7 \pmod{9}$, $n \equiv \pm 1 \pmod{9}$, et $e, e_1, e_2 \in \{1, 2\}$.

(i) Si $p \equiv 1 \pmod{9}$, on a

$$\left(\frac{q_1^{e_1} q_2^{e_2}}{p}\right)_3 \neq 1 \iff 3 \parallel h_\Gamma.$$

(ii) Soit $p \not\equiv 1 \pmod{9}$, on pose $p = \pi_1 \pi_2$, $\pi_3 = -q_1$ et $\pi_4 = -q_2$, où les π_i sont des premiers de k_0 congrus à 1 $\pmod{3\mathcal{O}_{k_0}}$.

(a) Si $\pi_3 \not\equiv 1 \pmod{\lambda^3}$ et $r = 1$ ou 2 est choisi tel que $\pi_1 \pi_3^r \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$, on a

$$\left(\frac{q_1^{e_1+r} q_2^{e_2}}{p}\right)_3 \neq 1 \iff 3 \parallel h_\Gamma.$$

(b) Si $\pi_3 \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$, et $r = 1$ ou 2 est choisi tel que $\pi_1 \pi_4^r \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$, on a

$$\left(\frac{q_1^{e_1} q_2^{e_2+r}}{p}\right)_3 \neq 1 \iff 3 \parallel h_\Gamma.$$

(4) Soit $n = 3^e p^{e_1} q^{e_2}$, où p ou $-q \equiv 4$ ou $7 \pmod{9}$, $n \not\equiv \pm 1 \pmod{9}$, $e \in \{0, 1, 2\}$ et $e_1, e_2 \in \{1, 2\}$.

(i) Si $p \equiv 1 \pmod{9}$, on a

$$\left(\frac{3^e q^{e_2}}{p}\right)_3 \neq 1 \iff 3 \parallel h_\Gamma.$$

(ii) Soit $p \not\equiv 1 \pmod{9}$.

(a) Si $e = 0$, alors

$$\left(\frac{q}{p}\right)_3 \neq 1 \iff 3 \parallel h_\Gamma.$$

(b) Si $e \neq 0$, $\pi = -q \not\equiv 1 \pmod{\lambda^3}$, et $r = 1$ ou 2 est choisi tel que $\pi_1 \pi^r \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$, alors

$$\left(\frac{q^{e_2+r} 3^e}{p}\right)_3 \neq 1 \iff 3 \parallel h_\Gamma.$$

(c) Si $e \neq 0$ et $\pi = -q \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$, alors

$$\left(\frac{q}{p}\right)_3 \neq 1 \iff 3 \parallel h_\Gamma.$$

Conclusion. Le problème de la divisibilité exacte par 3 du nombre de classes d'un corps cubique pur $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$ de type C est résolu complètement. Pour ce type, on a :

$$\left(\frac{c}{p}\right)_3 \neq 1 \iff 3 \parallel h_\Gamma$$

où c est un entier qu'on détermine selon la forme de n . Ceci veut dire aussi que nous avons un critère de divisibilité par 9 de h_Γ :

$$\left(\frac{c}{p}\right)_3 = 1 \iff 9 \mid h_\Gamma.$$

De plus, nous avons montré que

$$\left(\frac{c}{p}\right)_3 \neq 1 \implies u = 3$$

pour les corps cubiques purs de type C . Pour plus de détails voir [I-ELM1] ou [ELM].

6. Corps cubiques purs de type D.

Définition 6.1. Un corps cubique pur $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$ est dit de type D s'il n'est ni de type A, ni de type B, ni de type C.

Théorème 6.2. Soit $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$ un corps cubique pur de type D.

- (1) Si n est divisible par un premier $p \equiv 1 \pmod{3}$, alors $9 \mid h_\Gamma$.
- (2) Si n n'est divisible par aucun premier $p \equiv 1 \pmod{3}$, alors $9 \nmid h_\Gamma$ ou $(3, h_\Gamma) = 1$.

$n = 3p$	h_Γ	$n = 3p$	h_Γ
$3 \cdot 13633 = 40899$	12	$3 \cdot 15649 = 46947$	120
$3 \cdot 13669 = 41007$	12	$3 \cdot 15739 = 47217$	60
$3 \cdot 13711 = 41133$	3	$3 \cdot 15817 = 47451$	3
$3 \cdot 13729 = 41187$	6	$3 \cdot 15907 = 47721$	6
$3 \cdot 13759 = 41277$	3	$3 \cdot 15973 = 47919$	3
$3 \cdot 13831 = 41493$	6	$3 \cdot 16063 = 48189$	3
$3 \cdot 14107 = 42321$	6	$3 \cdot 16087 = 48261$	24
$3 \cdot 14173 = 42519$	6	$3 \cdot 16477 = 49431$	6
$3 \cdot 14197 = 42591$	3	$3 \cdot 16573 = 49719$	3
$3 \cdot 14323 = 42969$	12	$3 \cdot 16657 = 49971$	12
$3 \cdot 14341 = 43023$	30	$3 \cdot 16693 = 50079$	6
$3 \cdot 14407 = 43221$	3	$3 \cdot 17053 = 51159$	6
$3 \cdot 14533 = 43599$	3	$3 \cdot 17239 = 51717$	3
$3 \cdot 14557 = 43671$	3	$3 \cdot 17257 = 51771$	3
$3 \cdot 14629 = 43887$	12	$3 \cdot 17383 = 52149$	75
$3 \cdot 14731 = 44193$	6	$3 \cdot 17401 = 52203$	12
$3 \cdot 14821 = 44463$	3	$3 \cdot 17599 = 52797$	3
$3 \cdot 14827 = 44481$	6	$3 \cdot 17683 = 53049$	3
$3 \cdot 14929 = 44787$	6	$3 \cdot 17761 = 53283$	12
$3 \cdot 15091 = 45273$	6	$3 \cdot 17863 = 53589$	3
$3 \cdot 15187 = 45561$	12	$3 \cdot 17923 = 53769$	6
$3 \cdot 15271 = 45813$	3	$3 \cdot 17977 = 53931$	3
$3 \cdot 15313 = 45939$	3	$3 \cdot 18049 = 54147$	3
$3 \cdot 15361 = 46083$	30	$3 \cdot 18061 = 54183$	3

TABLE 3

Principaux moyens utilisés

- Les propriétés arithmétiques des corps cubiques purs, de leurs normalisés et du corps $\mathbf{Q}(j)$.
- Les propriétés des symboles cubiques dans le normalisé k , dans k_0 et dans $\mathbb{Z}$.
- La théorie des genres et la formule des classes ambiguës.
- Les travaux de G. Gras sur les l -classes d'idéaux (voir [Gr1] et [Gr2]).
- Les travaux de F. Gerth sur les 3-groupes de classes (voir [Ge1, Ge2, Ge3]).

Remarque 6.3. Pour tous les premiers $p \equiv 4$ ou $7 \pmod{9}$ et inférieurs à 18313 vérifiant $\left(\frac{3}{p}\right)_3 = 1$ (qui sont au nombre de 216), nous avons calculé le nombre de classes des corps cubiques purs $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$, où $n = p^e$ ou $n = 3^{e_1}p^{e_2}$, avec $e, e_1, e_2 \in \{1, 2\}$, et nous avons trouvé que $3 \parallel h_\Gamma$ en utilisant le logiciel de calcul PARI. Ceci nous a incités à formuler la conjecture suivante.

Conjecture. Soit $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$ un corps cubique pur, où $n = p^e$ ou $3^{e_1}p^{e_2}$, avec p un premier congru à 4 ou 7 $\pmod{9}$ et $e, e_1, e_2 \in \{1, 2\}$; alors $3 \parallel h_\Gamma$.

$n = 9p$	h_Γ	$n = 9p$	h_Γ
$9 \cdot 13633 = 122697$	6	$9 \cdot 15649 = 140841$	12
$9 \cdot 13669 = 123021$	3	$9 \cdot 15739 = 141651$	3
$9 \cdot 13711 = 123399$	12	$9 \cdot 15817 = 142353$	6
$9 \cdot 13729 = 123561$	3	$9 \cdot 15907 = 143163$	12
$9 \cdot 13759 = 123831$	30	$9 \cdot 15973 = 143757$	6
$9 \cdot 13831 = 124479$	6	$9 \cdot 16063 = 144567$	12
$9 \cdot 14107 = 126963$	3	$9 \cdot 16087 = 144783$	3
$9 \cdot 14173 = 127557$	3	$9 \cdot 16477 = 148293$	12
$9 \cdot 14197 = 127773$	12	$9 \cdot 16573 = 149157$	3
$9 \cdot 14323 = 128907$	3	$9 \cdot 16657 = 149913$	6
$9 \cdot 14341 = 129069$	3	$9 \cdot 16693 = 150237$	24
$9 \cdot 14407 = 129663$	3	$9 \cdot 17053 = 153477$	3
$9 \cdot 14533 = 130797$	12	$9 \cdot 17239 = 155151$	6
$9 \cdot 14557 = 131013$	6	$9 \cdot 17257 = 155313$	3
$9 \cdot 14629 = 131661$	3	$9 \cdot 17383 = 156447$	3
$9 \cdot 14731 = 132579$	6	$9 \cdot 17401 = 156609$	75
$9 \cdot 14821 = 133389$	3	$9 \cdot 17599 = 158391$	6
$9 \cdot 14827 = 133443$	3	$9 \cdot 17683 = 159147$	15
$9 \cdot 14929 = 134361$	3	$9 \cdot 17761 = 159849$	156
$9 \cdot 15091 = 135819$	3	$9 \cdot 17863 = 160767$	6
$9 \cdot 15187 = 136683$	12	$9 \cdot 17923 = 161307$	12

TABLE 4

Conclusion. Grâce à tous les résultats que nous avons établis, et dont les démonstrations sont dans [Is], [I-ElM1], [I-ElM2] et [ElM], nous pouvons affirmer que si le nombre de classes d'un corps cubique pur Γ est exactement divisible par 3, alors Γ est de type A, B ou C.

English extended abstract. Let $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$ be a pure cubic field, where n is a cube-free positive integer, $k = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n}, j)$ is its normal closure with $j = e^{2i\pi/3}$, E_k is the unit group of k , u is the index of the units generated by the intermediate fields of $k/\mathbf{Q}$ in the unit group E_k , and h_Γ is the class number of Γ . If p is a prime number $p \equiv 1 \pmod{3}$, for $c \in \mathbb{Z}$, the symbol $(c/p)_3 = 1$ means that the congruence $X^3 \equiv 1 \pmod{p}$ has a solution in $\mathbb{Z}$.

In this survey paper, by exploiting the arithmetic properties of Γ and of its normal closure k , and by using group theory, genus theory and the properties of the cubic symbol, we try to classify all the pure cubic fields whose class number is exactly divisible by 3. The first step is to classify all the pure cubic fields in four different types A, B, C and D, depending on the form of the integer n such that $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$.

A pure cubic field of type A is defined by $\Gamma = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{n})$, where n has one of the following forms involving the prime numbers p and q :

- (i) $n = p^e$ with $p \equiv 1 \pmod{3}$ and $e \in \{1, 2\}$,

- (ii) $n = 3^e p^{e_1}$ with $p \equiv 4$ or $7 \pmod{9}$ and $e, e_1 \in \{1, 2\}$,
- (iii) $n = p^e q^{e_1} \equiv \pm 1 \pmod{9}$ with p or $-q \equiv 4$ or $7 \pmod{9}$ and $e, e_1 \in \{1, 2\}$.

For this kind of pure cubic fields we have:

Theorem 3.2. *Let $\Gamma = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{n})$ be a pure cubic field of type A.*

- (1) *If $n = 3^e p^{e_1}$, where $p \equiv 4$ or $7 \pmod{9}$, $e \in \{0, 1, 2\}$ and $e_1 \in \{1, 2\}$, then*

$$\left(\frac{3}{p}\right)_3 \neq 1 \iff (3||h_\Gamma \text{ and } u = 1).$$

- (2) *If $n = p^e q^{e_1} \equiv \pm 1 \pmod{9}$, with p or $-q \equiv 4$ or $7 \pmod{9}$ and $e, e_1 \in \{1, 2\}$, then*

$$\left(\frac{q}{p}\right)_3 \neq 1 \iff (3||h_\Gamma \text{ and } u = 1).$$

The only information we have for the moment about pure cubic fields Γ of type B is that $3|h_\Gamma$.

The type C case is completely solved (see [I-ElM1]).

For the pure cubic fields Γ of type D, we have that either $9|h_\Gamma$ or $(3, h_\Gamma) = 1$.

Finally, if Γ is a pure cubic field whose class number is exactly divisible by 3, then we know that Γ is of type A, B or C.

BIBLIOGRAPHIE

- [B-C1] P. Barrucand et H. Cohn, *Remarks on principal factors in a relative cubic field*, J. Number Theory **3** (1971), 226–239.
- [B-C2] P. Barrucand et H. Cohn, *A rational genus, class number divisibility, and unit theory for pure cubic fields*, J. Number Theory. **2** (1970), 7–21.
- [Bl] N. Blackburn, *On a special class of p -groups*, Acta Math. **100** (1958), 45–92.
- [B-W-Z] B. D. Beach, H. C. Williams et C. R. Zarnke, *Some computer results on units in quadratic and cubic fields*, Proceedings of the Twenty-Fifth Summer Meeting of the Canadian Mathematical Congress (Lakehead Univ., Thunder Bay, Ont., 1971), Thunder Bay, Lakehead University, 1971, pp. 609–648.
- [ElM] R. El Mesaoudi, *Sur la divisibilité exacte par 3 du nombre de classes d'un corps cubique pur et problème de capitulation*, Thèse de doctorat; Oujda, Université Mohamed I^{er}, 2002.
- [Ge1] F. Gerth III, *On 3-class groups of cyclic cubic extensions of certain number fields*, J. Number Theory **8** (1976), 84–98.
- [Ge2] F. Gerth III, *On 3-class groups of pure cubic fields*, J. Reine Angew. Math. **278/279** (1975), 52–62.
- [Ge3] F. Gerth III, *Ranks of 3-class groups of non-Galois cubic fields*, Acta Arith. **30** (1976), 307–322.
- [Gr1] G. Gras, *Sur les l -classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier l* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **23**; no. 3 (1973), 1–48.
- [Gr2] G. Gras, *Sur les l -classes d'idéaux des extensions non galoisiennes de $\mathbb{Q}$ de degré impair l à clôture galoisienne diédrale de degré $2l$* , J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 677–685.
- [Ha1] H. Hasse, *Neue begründung und verallgemeinerung der theorie der normenrest Symbols*, J. Reine Angew. Math. **162** (1930), 134–143.

- [Ha2] H. Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Zweite, durchgesehene Auflage, Physica-Verlag, Würzburg-Vienna, 1965.
- [Ho] T. Honda, *Pure cubic fields whose class numbers are multiples of three*, J. Number Theory **3** (1971), 7–12.
- [Ish] M. Ishida, *The genus fields of algebraic number fields*, Lecture Notes in Math., vol. 555, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [Is] M. C. Ismaili, *Sur la capitulation des 3-classes d'idéaux de la clôture normale d'un corps cubique pur*, Thèse de doctorat; Québec, Université Laval, 1992.
- [I-ElM1] M. C. Ismaili et R. El Mesaoudi, *Sur la divisibilité exacte par 3 du nombre de classes de certains corps cubiques purs*, Ann. Sci. Math. Québec **25** (2001), 153–177.
- [I-ElM2] M. C. Ismaili et R. El Mesaoudi, *Sur la capitulation des 3-classes d'idéaux de la clôture normale de certains corps cubiques purs*, Ann. Sci. Math. Québec (à paraître).

M. C. ISMAILI ET R. EL MESAUDI
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
 UNIVERSITÉ MOHAMED 1^{er}
 FACULTÉ DES SCIENCES
 B. P. 524, OUJDA, MAROC
 COURRIEL : ismaili@sciences.univ-oujda.ac.ma