

UNE INTRODUCTION AUX ANNULATEURS ARITHMÉTIQUES

CORNELIUS GREITHER

RÉSUMÉ. Nous nous proposons de faire un tour d’horizon de quelques aspects concrets des annulateurs arithmétiques. En commençant par le théorème de Stickelberger, nous présentons les énoncés des conjectures de Brumer et de Brumer et Stark. Puis, nous indiquons une démarche qui s’appuie sur la théorie d’Iwasawa et annonçons quelques résultats récents. L’article ne contient pratiquement pas de démonstrations, et il n’explique pas les liens avec des sujets voisins importants, comme la K -théorie algébrique, les nombres équivariants de Tamagawa, et autres. Bref, cet article se veut seulement une invitation à en apprendre plus dans d’autres sources.

ABSTRACT. This paper offers a short tour of a few selected and concrete aspects of the subject in its title. We begin with Stickelberger’s classical theorem about the annihilation of ideal class groups and discuss a modified version dubbed Stickelberger-Stark (fewer annihilators, but a sharper notion of annihilation). A straightforward generalisation leads us to the statement of the conjectures of Brumer, and of Brumer and Stark. We explain in which sense these conjectures localize well. Then we describe an Iwasawa-theoretic setup which allows to prove affirmative results, under suitable assumptions. We obtain the validity of the p -part of the Brumer conjecture in two different (but overlapping) cases, and we conclude with a result on Brumer-Stark. This article contains practically no proofs, nor does it explain the link to important related subjects, for instance algebraic K-theory, equivariant Tamagawa numbers, equivariant main conjectures, and Rubin-Stark conjectures concerning higher-order zeros of abelian L -functions. In a word, this article is just an invitation to learn more about these things from the recent literature.

1. Le théorème de Stickelberger. Fixons un nombre naturel $N > 1$ non congru à 2 modulo 4, et posons $F = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\zeta_N)$, $G = \text{Gal}(K/F)$. On sait bien que G est canoniquement isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, moyennant l’application qui attache à $b \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ l’automorphisme σ_b donné par $\sigma_b(\zeta_N) = \zeta_N^b$.

Puisque G opère sur tous les objets arithmétiques attachés au corps K , tels les groupes additifs K et $\mathcal{O}_K$, les groupes multiplicatifs K^* et $\mathcal{O}_K^*$, et le groupe des classes Cl_K , tous ces objets arithmétiques deviennent des modules sur l’anneau de groupe $\mathbb{Z}[G]$.

Reçu le 10 septembre 2003 et, sous forme définitive, le 24 janvier 2005.

L'élément de Stickelberger associé au corps K est défini dans ce cadre par

$$\vartheta(K/F) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq N-1 \\ (a, N)=1}} a \cdot \sigma_a^{-1} \in \mathbb{Q}[G],$$

et on pose

$$J = J(K/F) := \vartheta(K/F)\mathbb{Z}[G] \cap \mathbb{Z}[G],$$

ce qui est un idéal dans $\mathbb{Z}[G]$. On peut vérifier que J est engendré par $N\vartheta(K/F)$ et la famille $(b - \sigma_b)\vartheta(K/F)$ où b parcourt les résidus modulo N coprimiers à N . Le théorème classique de Stickelberger (voir [Wa]) affirme :

Théorème 1.1. *J annule le $\mathbb{Z}[G]$ -module Cl_K ; plus succinctement : $J \cdot Cl_K = 0$.*

Pour voir un exemple non trivial mais bien maniable, prenons $N = 23$. Puisque le corps K est alors de degré 22, ce qui est un peu élevé, considérons plutôt son sous-corps quadratique $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{-23})$, avec son groupe G_0 de Galois sur $\mathbb{Q}$. Donc G_0 est une image épimorphe de G et consiste seulement en id et j (conjugaison complexe). Notons π l'épimorphisme canonique $\mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G_0]$. Alors $\pi(\sigma_b)$ vaut id ou j selon que b est un résidu quadratique modulo 23 ou non. Puisque $\pi(2 - \sigma_2) = 2 - 1 = 1$, nous trouvons que $J_0 := \pi(J)$ est engendré par $\vartheta_0 := \pi((2 - \sigma_2)\vartheta(K/F))$. Puisque l'application naturelle $Cl_K \rightarrow Cl_{K_0}$ est surjective, le théorème 1.1 entraîne que Cl_{K_0} est annulé par ϑ_0 . De plus, j agit sur Cl_{K_0} comme inversion (car $1 + j$ annule ce groupe de classes). Si χ dénote donc le caractère non trivial de G_0 , on trouve que ϑ_0 agit comme $\chi(\vartheta_0)$; en d'autres termes : $\chi(\vartheta_0)$ annule Cl_{K_0} . Un petit calcul montre que

$$(2 - \sigma_2)\vartheta(K/F) = \frac{1}{23} \sum_{a=1}^{22} (2a - [2a])\sigma_a^{-1} = \sum_{a=12}^{22} \sigma_a^{-1},$$

où $[2a]$ signifie le plus petit résidu non négatif de $2a$ modulo 23. En appliquant χ et en remarquant que $\chi(\pi(\sigma_a)) = \left(\frac{a}{23}\right)$ (le symbole de Legendre), on trouve :

$$\chi(\vartheta_0) = \sum_{a=12}^{22} \left(\frac{a}{23}\right) = - \sum_{a=1}^{11} \left(\frac{a}{23}\right) = n_- - n_+,$$

où n_+ (resp. n_-) désigne le nombre de résidus quadratiques (resp. résidus non quadratiques) mod 23 parmi les nombres $1, 2, \dots, 11$. Puisque 1, 2, 3, 4, 6, 8 et 9 sont résidus quadratiques et 5, 7, 10, 11 sont résidus non quadratiques, on trouve finalement que $\chi(\vartheta_0) = -3$. En effet, le nombre des classes $h(\mathbb{Q}(\sqrt{-23}))$ vaut 3, de sorte que l'annulation donnée par le théorème de Stickelberger est la meilleure possible.

On peut aussi bien regarder un sous-corps K_0 quelconque de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$, en posant $G_0 = \text{Gal}(K_0/\mathbb{Q})$ et J_0 l'image de J dans $\mathbb{Z}[G_0]$ comme ci-haut, et on peut se poser la question si J_0 est l'annulateur précis de Cl_{K_0} . Une question très proche est de se demander si Cl_{K_0} a le même ordre que le quotient $\mathbb{Z}[G_0]/J_0$. Ceci ne peut être vrai littéralement car dans la plupart des cas $\mathbb{Z}[G_0]/J_0$ n'est même pas fini. Mais si on considère seulement les parties moins, l'égalité a parfois lieu. Expliquons : soit j la conjugaison complexe dans G_0 ; pour tout $\mathbb{Z}[G_0]$ -module M , soit $M^- = \{x \in M : jx = -x\}$. Alors on peut démontrer (voir [Wa, Théorème 6.19] et [Si]) :

Proposition 1.2. *Si N est une puissance d'un nombre premier, alors les ordres de $Cl_{K_0}^-$ et de $(\mathbb{Z}[G_0]/J_0)^-$ coïncident, à un facteur puissance de 2 près.*

Ceci ne répond toujours pas à la question de l'annulateur précis. Mais un exemple montre que même dans la situation de la proposition 1.2, l'idéal de Stickelberger ne fournit pas l'annulateur précis en général. Remplaçons le premier 23 dans l'exemple ci-haut par le premier 3299 (K_0 étant alors le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-3299})$). Par calcul (sur ordinateur!) on trouve $\chi(\vartheta_0) = -27$, mais $Cl_{K_0} \cong \mathbb{Z}/9 \times \mathbb{Z}/3$ et j opère comme -1 sur ce groupe de classes tout entier. Donc l'annulateur de $Cl_{K_0}^-$ sur $\mathbb{Z}[G_0]$ est strictement plus grand que J_0 , et aussi strictement plus grand que $J_0 + (1+j)\mathbb{Z}[G_0]$. Des calculs ultérieurs montrent qu'il n'est pas du tout facile de déterminer l'annulateur précis même si on connaît l'idéal de Stickelberger. Il serait donc bon de trouver un invariant attaché aux groupes de classes qui soit relié à l'annulateur, mais moins erratique dans son comportement.

2. « Stickelberger-Stark ». Jetons un regard sur la démonstration du théorème de Stickelberger. Soit toujours $F = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\zeta_N)$ et $\vartheta := \vartheta(K/F)$. On prend une classe $[a] \in Cl_K$ et un entier a copremier à N et on doit établir que la puissance $\mathfrak{b} := \mathfrak{a}^{(a-\sigma_a)\vartheta}$ représente la classe triviale. On peut se borner au cas où $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$, un idéal premier de $\mathcal{O}_K$, copremier à N et de degré absolu 1 (pour justifier cette réduction, il faut invoquer le théorème de Tchebotarev). On exhibe de façon explicite un générateur de l'idéal $\mathfrak{b}$, au moyen d'une somme de Gauss : $\mathfrak{b} = x\mathcal{O}_K$ où

$$x = G(\chi, \psi)^{a-\sigma_a} \quad \text{avec} \quad G(\chi, \psi) = \sum_{c=1}^{p-1} \chi(c)\psi(c) \in \mathbb{Q}(\zeta_N, \zeta_p).$$

Dans cette formule, p dénote le premier rationnel au-dessous de $\mathfrak{p}$. Pour le choix des caractères χ (multiplicatif) et ψ (additif) nous renvoyons à la littérature, par exemple [Wa, chap. 6]. L'exposant $a - \sigma_a$ sert à éliminer ζ_p : la somme de Gauss est dans $\mathbb{Q}(\zeta_N, \zeta_p)$ mais on veut que x soit dans K .

Or il existe un exposant plus simple qui a le même effet : $y := G(\chi, \psi)^N$ se trouve aussi dans K . L'idéal principal engendré par y est $\mathfrak{p}^{N\vartheta}$. Puisque y possède, trivialement, une N -ième racine dans une extension abélienne de $\mathbb{Q}$, nous avons le résultat suivant, appelé pour l'instant « théorème de Stickelberger-Stark » :

Théorème 2.1. *Avec les notations du début, pour chaque idéal $\mathfrak{a} \neq 0$ dans K la puissance $\mathfrak{a}^{N\vartheta}$ possède un générateur $y \in K$ tel que $y^{1/N}$ engendre une extension de K qui est abélienne sur $F = \mathbb{Q}$.*

3. Brumer et Brumer-Stark. Passons maintenant à une situation plus générale. Soit F un corps de nombres totalement réel, et soit K/F une extension abélienne, de groupe G , telle que K est un corps CM, c'est-à-dire que K est totalement complexe et extension quadratique d'un sous-corps K^+ (d'ailleurs unique) qui est totalement réel. On veut trouver des substituts pour ϑ et pour J . Pour ce faire, fixons un ensemble S fini de places de F , contenant les places ramifiées dans K , et notons $\mathcal{A}$ l'annulateur du $\mathbb{Z}[G]$ -module μ_K (racines de l'unité contenues dans K). On peut maintenant définir

un élément $\vartheta(K/F, S) \in \mathbb{C}[G]$, que nous écrirons ϑ si le contexte le permet, par les conditions

$$\chi(\vartheta) = L_S(0, \chi^{-1}) \quad \text{pour tout caractère } \chi \text{ de } G.$$

La fonction L qui intervient est donnée par $L_S(s, \psi) = \sum_{(\mathfrak{a}, S)=1} \psi(\mathfrak{a}) N\mathfrak{a}^{-s}$ pour $\operatorname{Re}(s) > 1$ et par continuation méromorphe sur $\mathbb{C}$, pour tout caractère ψ de G . La somme s'étend sur tous les idéaux $\mathfrak{a} \neq 0$ dans $\mathcal{O}_K$ dont le support est disjoint de S , et par abus de notation, $\psi(\mathfrak{a})$ désigne la valeur de ψ à l'automorphisme de Frobenius attaché à l'idéal $\mathfrak{a}$.

Dans la situation du §1, ϑ redonne à quelques modifications banales près l'élément de Stickelberger, voir par exemple [Gr3]. On sait, grâce à [Ca] et [DR], que $J = J(K/F, S) := \mathcal{A}\vartheta$ est contenu dans $\mathbb{Z}[G]$, donc est un idéal de $\mathbb{Z}[G]$. C'est appelé l'idéal de Brumer. Nous sommes prêts à énoncer :

Conjecture B (BRUMER). *$J(K/F, S)$ annule le groupe Cl_K .*

La conjecture de Brumer-Stark, que nous allons introduire maintenant, est étroitement liée à la conjecture de Brumer. Pour l'énoncé, posons $w_K = |\mu_K|$, et pour tout diviseur w de w_K , appelons $y \in K^*$ un élément w -abélien si l'extension $K(y^{1/w})$ est abélienne sur F . (Elle est certainement abélienne sur K , d'après la théorie de Kummer.)

Conjecture BS (BRUMER-STARK). *Pour tout idéal $\mathfrak{a} \neq 0$ dans K , la puissance $\mathfrak{a}^{w_K \vartheta}$ admet un générateur y qui est w_K -abélien.*

Les deux conjectures qu'on vient d'énoncer sont vraies dans le cas $F = \mathbb{Q}$, comme conséquence des théorèmes de Stickelberger et de Stickelberger-Stark. (Il reste quelques détails à fournir, puisque pour N impair et $K = \mathbb{Q}(\zeta_N)$, le nombre w_K vaut $2N$, et non N .) Il faut signaler que d'habitude on ajoute à l'énoncé de BS la restriction que y est une « anti-unité »; la différence entre les deux versions n'est pas considérable.

Les deux conjectures se localisent dans un sens précis : B est équivalente à l'ensemble des énoncés B_p (p parcourant les nombres premiers), où B_p est obtenue de B en ajoutant l'hypothèse que la classe $[\mathfrak{a}]$ est dans la partie p -primaire de Cl_K . Pareillement, BS est équivalente à l'ensemble des énoncés BS_p , où BS_p est obtenue de BS en ajoutant la même condition que pour B_p et en remplaçant w_K par sa p -partie; voir [GRT].

Sous certaines hypothèses, B et BS sont équivalentes (dans le sens qu'on sait déduire l'une de l'autre directement), voir [GRT]. En général, BS entraîne B (voir [Po]), et BS est une conséquence de la validité d'une famille $(B_T)_T$ de conjectures de Brumer « renforcées », qui font intervenir des ensembles auxiliaires finis de places T , disjoints à S (voir plus loin et [Po]; les idées remontent à Tate, Stark et G. Robert, voir [Ta, p. 83]).

4. Méthodes et résultats.

4.1. Conjecture de Brumer. À part le cas absolument abélien, on ne sait pas donner de générateurs explicites pour les idéaux-puissances dont il s'agit dans la conjecture de Brumer. En conséquence, toutes les démarches à date pour la démontrer sont assez indirectes. Elles ont en commun que tôt ou tard il faut calculer plus qu'un annulateur, à savoir : un idéal de Fitting. Nous rappelons ce que c'est : Soit R un anneau commutatif quelconque, M un R -module de type fini. Pour toute présentation $R^a \xrightarrow{A} R^b \rightarrow M \rightarrow 0$

(où A est une matrice a par b), on peut prendre l'idéal engendré par les mineurs b par b de la matrice A . Il s'avère que cet idéal ne dépend pas de la présentation; il est donc un invariant du module M , et on l'appelle $\text{Fit}_R(M)$ (idéal de Fitting). Si $M \cong R/I$ est cyclique, on voit aisément que $\text{Fit}_R(M) = I$. Dans ce cas, $\text{Fit}_R(M)$ coïncide donc visiblement avec l'annulateur de M . En général, l'idéal de Fitting est toujours contenu dans l'annulateur. Prenons par exemple $R = \mathbb{Z}$ et $M = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$. Alors l'annulateur de M est engendré par le ppcm des nombres $n_1, \dots, n_k$, et l'on trouve facilement que $\text{Fit}_{\mathbb{Z}}(M) = n_1 \cdots n_k \mathbb{Z}$.

Nous allons décrire une première démarche qui provient de [Gr2, §2]. (Signalons en passant que Kurihara a obtenu des résultats prochainement reliés, voir [Ku].) Tout d'abord on fixe un nombre premier impair p , dans le but de démontrer B_p . La conjecture est facile à vérifier dans la partie plus, de sorte qu'on peut se borner à la partie moins de $Cl_K\{p\}$. Considérons l'extension p -cyclotomique $K_\infty = \bigcup_n K_n$ de K , et posons $G_n = \text{Gal}(K_n/F)$, $G_\infty = \text{Gal}(K_\infty/F)$. À chaque corps K_n , $n \geq 1$, on associe l'élément $\vartheta_n := \vartheta(K_n/F, S_p)$ comme ci-haut (ici S_p est la réunion de S avec l'ensemble de toutes les places au-dessus de p). Ces éléments se trouvent dans $\mathbb{Q}[G_n]$. Les ϑ_n sont compatibles par rapport aux normes relatives; pour tout $\beta \in \mathcal{A}_\infty := \text{Ann}_{\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]}(\limproj_n \mu_{K_n})$, les éléments $\beta\vartheta_n$ sont dans $\mathbb{Z}_p[G_n]$ et définissent un élément $\beta\vartheta_\infty \in \limproj_n \mathbb{Z}_p[G_n] = \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$. L'ensemble de ces $\beta\vartheta_\infty$ est un idéal J_∞ dans $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$, appelé l'idéal de Brumer-Stickelberger à niveau infini. Dans cette situation on est capable de démontrer que J_∞^- annule le module $X := \lim_n Cl_{K_n}\{p\}^-$.

Mais le vrai but de la preuve est une annulation au niveau de K : on veut que $J(K/F, S)^-$ annule $Cl_K\{p\}^-$. Pour pouvoir déduire cela de l'énoncé qui précède, il faut évidemment que les deux applications naturelles $\pi : J_\infty \rightarrow J(K/F, S)$ et $\nu : X \rightarrow Cl_K\{p\}$ soient les deux surjectives dans la partie moins, ce qui n'est pas le cas en général. Mais il s'avère qu'une même condition (AZT) assure les deux surjectivités dans la partie moins. Expliquons : L'extension K/F satisfait à (AZT) (= absence de zéros triviaux) si aucune place p -adique de K^+ ne se décompose dans K . Le nom de cette condition provient du fait que si au moins une place p -adique $\mathfrak{p}$ de K^+ se décompose dans K , alors il y aura des caractères impairs χ de G tels que $L_p(s, \chi\omega)$ s'annule en $s = 0$ pour la raison que le facteur eulérien appartenant à $\mathfrak{p}$ est nul, et il est courant d'appeler un tel zéro d'une fonction L p -adique un zéro trivial. Le résultat est le suivant (voir [Gr2, §2]) :

Théorème 4.1. *En plus de l'hypothèse (AZT) supposons que :*

- (1) *l'invariant μ d'Iwasawa est nul pour K et p ;*
- (2) *l'extension p -cyclotomique F_∞ est linéairement disjointe de K , et au moins un premier p -adique de K est totalement ramifié dans K_∞ .*

Alors la partie p -primaire B_p de la conjecture de Brumer est vraie pour K/F .

Nous ne donnerons pas la preuve, mais seulement quelques mots sur la partie au niveau infini de la démonstration. Comme nous le disions, on établit que J_∞^- annule X^- . Faute d'un raisonnement plus direct, on calcule l'idéal de Fitting de X^- et puis on montre qu'il contient J_∞^- , ce qui suffit.

Parmi les hypothèses du théorème 4.1, la condition (AZT) est, de loin, la plus gênante. D'après une ancienne conjecture d'Iwasawa, l'hypothèse (1) est toujours vraie. C'est connu depuis longtemps dans le cas absolument abélien (Ferrero-Washington). Tout récemment, Barsky a annoncé une preuve (même disponible comme prépublication) pour tous les corps totalement réels; malheureusement, ces corps sont sans intérêt dans le théorème qui précède, parce que la conjecture de Brumer s'occupe de la partie moins seulement. Les conditions énoncées en (2) sont techniques et servent plutôt la commodité que le besoin. Pour contourner (AZT), il y a une autre démarche, qui impose de nouvelles conditions sur K/F (encore un peu restrictives, il faut l'admettre), et ces conditions assurent que l'idéal J devient principal dans la partie moins, c'est-à-dire que J^- est principal sur $\mathbb{Z}_p[G]/(1+j)$. (Nous ne distinguons pas entre J et sa complétion p -adique.) Passons aux détails.

Définition. Une extension K/F comme ci-haut est appelée *agréable* (« nice extension ») si

- (1) (AZT) vaut pour K/F et tout premier rationnel q attaché à K/F , où on attache à K/F premièrement tous les q au-dessous de premiers qui se ramifient dans K/F et deuxièmement tous les q tels que $K^{cl} \subset (K^{cl})^+(\zeta_q)$ (ici K^{cl} désigne la clôture normale de K sur F),
- (2) la partie impaire du module μ_K est G -cohomologiquement triviale.

En dépit de la lourdeur de cette définition, il y a beaucoup d'exemples. Un exemple type est fourni par $F = \mathbb{Q}$ et K absolument abélien de conducteur une puissance d'un premier, mais même sur $\mathbb{Q}$ il y en a beaucoup d'autres. Pour des exemples avec $F \neq \mathbb{Q}$ nous renvoyons à [Gr1, p. 518]. Le résultat (théorèmes 4.10, 4.11 de loc. cit.) s'énonce de façon un peu plus élégante que dans le dernier théorème.

Théorème 4.2. *Pour n'importe quelle extension agréable K/F et tout premier $p \neq 2$, l'idéal de Fitting de $Cl_K\{p\}^-$ sur $R := \mathbb{Z}_p[G]/(1+j)$ est donné par $J(K/F, S)$ avec le choix minimal de l'ensemble S , et a fortiori, B_p est toujours vraie pour n'importe quel choix de S .*

Le point le plus délicat dans la démonstration de ce résultat est la descente de niveau infini vers K , en l'absence de la condition (AZT). On résout ce problème en s'appuyant sur une généralisation des méthodes développées par Wiles dans [Wi].

4.2. Conjecture de Brumer-Stark. Nous allons regarder les deux scénarios, celui du théorème 4.1 et celui du théorème 4.2. Quant au dernier, nous pourrions conclure rapidement, grâce au résultat suivant [GRT] qui a aussi été trouvé par Popescu.

Proposition 4.3. *Pour une extension agréable K/F et un premier $p \neq 2$, les conjectures B_p et BS_p sont équivalentes.*

Comme corollaire, on obtient que BS_p est aussi vraie dans le cas agréable.

D'autre part, il est aussi possible de démontrer le même résultat dans une situation sans zéros triviaux. Ce qui suit est pris dans [Gr2] et [Gr3]. Pour tout ensemble T de places finies de F , disjoint à S , posons

$$\vartheta(K/F, S, T) = \vartheta(K/F, S) \cdot \prod_{v \in T} (1 - Nv \text{ Fr}_v^{-1})$$

où $\text{Fr}_v \in G$ est le Frobenius de v . Si le seul élément de μ_K congru à 1 modulo toutes les places au-dessus de T est 1 (appelons T « convenable » dans ce cas), alors $\vartheta(K/F, S, T)$ appartient à $\mathbb{Z}[G]$. La conjecture modifiée B_T affirme alors :

Pour tout idéal $\mathfrak{a} \neq 0$ dans K dont le support est disjoint de T , la puissance $\mathfrak{a}^{\vartheta(K/F, S, T)}$ admet un générateur qui est congru à 1 modulo toutes les places au-dessus de T .

Les énoncés B_T (T parcourant les ensembles convenables) pris ensemble sont équivalents à la conjecture de Brumer-Stark pour K/F et S (voir par exemple [Po, Prop. 3.4]). L'idée est alors de démontrer B_T , ce qui fait encore intervenir des idéaux de Fitting, et une montée suivie d'une descente dans la tour cyclotomique. On a par contre besoin d'une hypothèse supplémentaire par rapport au théorème 4.1.

Théorème 4.4. *En plus de l'hypothèse (AZT) supposons que :*

- (1) *l'invariant μ d'Iwasawa est nul pour K et p ;*
- (2) *l'extension p -cyclotomique F_∞ est linéairement disjointe de K , et au moins un premier p -adique de K est totalement ramifié dans K_∞ ;*
- (3) *aucun premier au-dessus de p ne se ramifie sauvagement dans K/F .*

Alors la partie p -primaire B_p de la conjecture de Brumer-Stark est vraie pour K/F .

À titre d'illustration, citons quelques exemples avec F un corps quadratique réel et K/F de degré six. Posons $F = \mathbb{Q}(\sqrt{79})$ et K^+ égal au corps de classes de Hilbert pour F au sens ordinaire (pas de ramification à l'infini). Puisque le nombre des classes de F vaut 3, K^+/F est cubique abélienne. Prenons pour K le corps $K^+(\sqrt{-q})$ où $q \neq 79$ est un nombre premier congru à 3 modulo 4, que nous voudrions préciser de façon que K/F devienne une extension agréable. Aussitôt que $q > 3$, la partie impaire de μ_K sera triviale, et la deuxième partie de la définition d'une extension agréable sera automatiquement satisfaite. De même, les seuls premiers p attachés à K/F seront ceux au-dessous des premiers qui se ramifient; donc q est le seul nombre premier attaché à K/F . On veut donc que les premiers au-dessus de q ne se décomposent pas dans K/K^+ , ce qui revient à dire que les premiers de F au-dessus de q ne se décomposent pas dans $F(\sqrt{-q})$; mais c'est toujours satisfait, comme on le voit en regardant la ramification. Donc K/F est agréable. Par contre, (AZT) est satisfaite si et seulement si les places au-dessus de 3 sont non-décomposées dans $F(\sqrt{-q})/F$; puisque 3 est décomposé dans F , ceci revient à dire que 3 ne se décompose pas dans $\mathbb{Q}(\sqrt{-q})$. Donc, dans à peu près la moitié des choix pour q , l'extension $K^+(\sqrt{-q})/F$ ne satisfait pas à (AZT) pour le premier 3.

Par contre, on peut vérifier que $K = K^+(\zeta_3)$ (où K^+ est le même qu'auparavant) satisfait à toutes les hypothèses des théorèmes 4.1 et 4.4, pour $p = 3$, sans que K/F soit une extension agréable. Les deux cadres dans lesquels on a travaillé sont donc, en un sens, complémentaires. Bien sûr, il reste encore plein de cas qui ne sont pas couverts ni par l'une ni par l'autre démarche.

English extended abstract. For a natural number $N > 1$ not congruent to 2 mod 4, we consider $F = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\zeta_N)$, $G = \text{Gal}(K/F)$. The group G acts on all arithmetical objects attached to the field K , and these may therefore be considered as modules over

$\mathbb{Z}[G]$. Stickelberger's element attached to K is given by

$$\vartheta(K/F) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq N-1 \\ (a, N)=1}} a \cdot \sigma_a^{-1} \in \mathbb{Q}[G],$$

and we look at the ideal

$$J = J(K/F) := \vartheta(K/F)\mathbb{Z}[G] \cap \mathbb{Z}[G].$$

The classical result is now that J annihilates the class group Cl_K of K . It is known that J is not always the exact annihilator, not even if we complete at an odd prime p and take minus parts of all our objects. This motivates the search for an invariant of Cl_K which behaves more predictably than the annihilator, and one of course wants a wider scope than just abelian fields over the rationals. This leads to the conjectures of Brumer and Brumer-Stark. For brevity we only formulate the former: Let F be totally real and K/F abelian with group G such that K is a totally complex quadratic extension of a totally real subfield $K^+ \supset F$. Via L-functions, one can again construct a Stickelberger element ϑ attached to K/F , and an ideal $J(K/F, S)$ obtained by multiplying ϑ with the $\mathbb{Z}[G]$ -annihilator of μ_K .

Conjecture B (BRUMER). $J(K/F, S)$ annihilates Cl_K .

The Brumer-Stark conjecture says, roughly speaking, that a somewhat smaller ideal has a somewhat stronger annihilation property: the ideal powers in question are not only principal but admit a generator with an extra property called w_K -abelianness. Both conjectures hold true over $\mathbb{Q}$, as a consequence of Stickelberger's theorem, and both of them may be localized in a precise sense.

When trying to prove Brumer's conjecture, it has turned out practical to calculate a Fitting ideal instead of an annihilator. (The former is contained in the latter, properly in general.) We describe a setup dealt with in [Gr2, §2]. Let p be a fixed odd prime and let B_p denote Brumer's conjecture for the p -part $Cl_K\{p\}$ of Cl_K . The essential problem is the proof for the minus part of $Cl_K\{p\}$. We consider the p -cyclotomic tower $K_\infty = \bigcup_n K_n$, letting $G_n = \text{Gal}(K_n/F)$, $G_\infty = \text{Gal}(K_\infty/F)$. To each field K_n , $n \geq 1$, we associate an element $\vartheta_n := \vartheta(K_n/F, S_p)$ as above. For any $\beta \in \mathcal{A}_\infty := \text{Ann}_{\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]}(\limproj_n \mu_{K_n})$, we can take the limit $\beta\vartheta_\infty$ of the elements $\beta\vartheta_n$. The set of these elements defines the Brumer-Stickelberger ideal at infinite level in $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$, and it can be shown that this ideal annihilates $X := \lim_n Cl_{K_n}\{p\}^-$.

The real goal however is to obtain an annihilation statement at level K . We just state the outcome.

Theorem 4.1. *Let us assume condition (AZT) and furthermore:*

- (1) *The μ -invariant of K and p vanishes.*
- (2) *The p -cyclotomic extension F_∞ is linearly disjoint with K , and at least one p -adic place of K is totally ramified in K_∞ .*

Then B_p is valid for K/F .

Condition (AZT) (which has its name for “absence of trivial zeros”; we will not go into that however) means that no place above p is split in the extension K/K^+ .

We also have a result on so-called nice extensions (for the definition, we refer to the full version).

Theorem 4.2. *For any nice extension K/F and any prime number $p \neq 2$, the Fitting ideal of $Cl_K\{p\}^-$ over $R := \mathbb{Z}_p[G]/(1+j)$ is given by $J(K/F, S)$ where S is chosen minimal. In particular, B_p is true for all choices of S .*

By similar methods one obtains affirmative results on the Brumer-Stark conjecture, in the respective situations of the two theorems above, with minor extra hypotheses. The situations covered by the two theorems are different (neither including the other one), but they do overlap.

This short article is just an invitation to the reader; to learn about the details or related work by other authors, one should turn to the literature.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ca] P. Cassou-Noguès, *Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p -adiques*, Invent. Math. **51** (1979), 29–59.
- [DR] P. Deligne et K. Ribet, *Values of abelian L -functions at negative integers over totally real fields*, Invent. Math. **59** (1980), 227–286.
- [Gr1] C. Greither, *Some cases of Brumer’s conjecture for abelian CM extensions of totally real fields*, Math. Z. **233** (2000), 515–534.
- [Gr2] C. Greither, *Computing Fitting ideals of Iwasawa modules*, Math. Z. **246** (2004), 733–767.
- [Gr3] C. Greither, *Arithmetic annihilators and Stark-type conjectures. Stark’s conjectures: recent work and new directions*, Contemp. Math., vol. 358, Amer. Math. Soc., Providence, 2004, pp. 55–78.
- [GRT] C. Greither, X-F. Roblot and B. Tangedal, *The Brumer-Stark conjecture in some families of extensions of specified degree*, Math. Comp. **73** (2004), 297–315.
- [Ku] M. Kurihara, *Iwasawa theory and Fitting ideals*, J. Reine Angew. Math. **561** (2003), 39–86.
- [Po] C. Popescu, *On the Rubin-Stark conjecture for a special class of CM extensions of totally real number fields*, Math. Z. **247** (2004), 529–547.
- [Si] W. Sinnott, *On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field*, Invent. Math. **62** (1980/81), 181–234.
- [Ta] J. Tate, *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d’Artin en $s = 0$* ; Notes d’un cours à Orsay éditées par D. Bernardi et N. Schappacher, Progress in Mathematics, vol. 47, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1984.
- [Wa] L. C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 83, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Wi] A. Wiles, *On a conjecture of Brumer*, Ann. of Math. (2) **131** (1990), 555–565.

C. GREITHER

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK UND MATHEMATIK

UNIVERSITÄT DER BUNDESWEHR MÜNCHEN

85577 NEUBIBERG, ALLEMAGNE

COURRIEL : greither@informatik.unibw-muenchen.de