

ALGORITHME DE JACOBI-PERRON : NOMBRES DE PISOT, INTERRUPTIONS ET INDÉPENDANCE LINÉAIRE

EUGÈNE DUBOIS, AHMED FARHANE ET ROGER PAYSANT-LE ROUX

RÉSUMÉ. Nous présentons quelques résultats sur les possibilités de généraliser certaines propriétés des fractions continues à l'algorithme de Jacobi-Perron : interruptions, approximations, périodicité.

ABSTRACT. We give some results about the generalization of continued fractions properties to the Jacobi-Perron Algorithm: interruptions, approximations, periodicity.

1. Introduction. Partant d'un n -uplet de nombres réels $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, l'algorithme de Jacobi-Perron (AJP), introduit par C. G. J. Jacobi [10] et par O. Perron [12], détermine une suite de n -uplets réels $(\alpha_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)}, \dots, \alpha_n^{(\nu)})_{\nu \geq 0}$ et une suite d'entiers $(a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \dots, a_n^{(\nu)})$ définies pour tout $\nu \geq 0$ au moyen des formules de récurrence

$$\begin{cases} \alpha_i^{(0)} = \alpha_i & (1 \leq i \leq n); \\ \alpha_1^{(\nu)} = a_1^{(\nu)} + 1/\alpha_n^{(\nu+1)}; \\ \alpha_i^{(\nu)} = a_i^{(\nu)} + \alpha_{i-1}^{(\nu+1)}/\alpha_n^{(\nu+1)} & (2 \leq i \leq n, \nu \geq 0), \end{cases}$$

avec $a_i^{(\nu)} = [\alpha_i^{(\nu)}]$ ($1 \leq i \leq n$), à condition toutefois que $\alpha_1^{(\nu)} \notin \mathbb{Z}$. Lorsque $\alpha_1^{(\nu)}$ est entier, on dit que le développement admet une interruption et on continue l'algorithme avec le $(n-1)$ -uplet $\beta_1 = \alpha_2^{(\nu)}, \dots, \beta_{n-1} = \alpha_n^{(\nu)}$. Une interruption entraîne une relation de dépendance rationnelle entre $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Pour $n = 1$, l'AJP est l'algorithme des fractions continues. Le but de cette note est de donner quelques indications sur les généralisations possibles de certaines propriétés des fractions continues.

Définissons pour tout $\nu \geq 0$ les entiers $A_i^{(\nu)}$ au moyen des formules

$$\begin{cases} A_i^{(j)} = \delta_{ij} & (0 \leq i, j \leq n); \\ A_i^{(\nu+n+1)} = A_i^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \dots + a_n^{(\nu)} A_i^{(\nu+n)} & (0 \leq i \leq n, \nu \geq 0). \end{cases}$$

À un développement périodique $\alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+\ell)}$ ($1 \leq i \leq n$) de période minimale ℓ , Perron [12] associe un polynôme caractéristique, dont nous noterons ρ la plus grande racine, et qui détermine la qualité des approximations simultanées.

Reçu le 16 septembre 2003 et, sous forme définitive, le 17 février 2005.

Soient α un nombre réel, $(a^{(\nu)})_{\nu \geq 0}$ sa fraction continue et

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} = \frac{A_1^{(\nu+2)}}{A_0^{(\nu+2)}}$$

sa ν^e réduite. Les propriétés des fractions continues, dont nous discutons la généralisation à l'AJP, portent sur les points suivants :

- (1) La suite $(a^{(\nu)})_{\nu \geq 0}$ s'arrête si et seulement si $1, \alpha$ sont $\mathbb{Q}$ -linéairement liés.
- (2) On a $|q_\nu \alpha - p_\nu| < q_\nu^{-1}$ pour $\nu \geq 0$ et $q_\nu \alpha - p_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$.
- (3) La suite $(a^{(\nu)})_{\nu \geq 0}$ est périodique si et seulement si $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2$.

2. Résultats sur les interruptions. O. Perron [12] a démontré le résultat suivant :

Théorème 1. *Si le développement par l'AJP de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ admet m interruptions, alors il existe m relations indépendantes à coefficients entiers entre $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.*

En particulier, si $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants, l'AJP de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ n'a pas d'interruption. En étudiant la réciproque, nous obtenons dans [6] les résultats suivants.

Théorème 2. *Lorsque $n = 2$, l'AJP de deux nombres réels α_1, α_2 admet au moins une interruption si et seulement si $1, \alpha_1, \alpha_2$ sont $\mathbb{Q}$ -linéairement liés.*

Théorème 3. *Pour tout $n \geq 3$, il existe des réels $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ $\mathbb{Q}$ -linéairement liés pour lesquels le développement par l'AJP de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ n'admet pas d'interruption.*

L'idée de la démonstration du dernier théorème est d'expliciter des développements périodiques, et donc sans interruption, pour lesquels $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont $\mathbb{Q}$ -linéairement liés. Cela est possible avec des développements périodiques de longueur $\ell = 1$. Pour $n \geq 3$, on détermine des entiers naturels $a_1, \dots, a_n$ vérifiant les « conditions de Perron » et la condition

$$1 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n = (-1)^{n+1}.$$

Le développement périodique de longueur 1 défini par $a_i^{(\nu)} = a_i$ ($1 \leq i \leq n, \nu \geq 0$) admet un polynôme caractéristique ayant -1 pour racine, d'où on déduit une relation de dépendance entre $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Pour n fixé on peut trouver d'autres développements périodiques de longueur $\ell \geq 2$. Par exemple, pour $n = 3$, nous donnons dans [6] deux familles de développements périodiques de longueur 2 satisfaisant le théorème 3.

3. Résultats sur l'approximation. La qualité des approximations résultant d'un développement en fraction continue ($n = 1$) est parfaitement connue pour tout irrationnel α .

Théorème 4. *Pour tout $\alpha \notin \mathbb{Q}$, $|q_\nu \alpha - p_\nu| < q_\nu^{-1}$ pour $\nu \geq 0$.*

Lorsque $n \geq 3$, nous ne connaissons aucun résultat lorsque l'AJP n'est pas périodique. Par contre, lorsqu'il l'est, Perron [12] a montré que la qualité des approximations simultanées dépend des deux plus grandes racines du polynôme caractéristique. Il en résulte le résultat suivant prouvé en [8] :

Théorème 5. *On a*

- (1) $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \max_i |A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)}| = 0$ si et seulement si ρ est un nombre de Pisot.
- (2) $\mathbb{Q}(\rho) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est de degré $n + 1$ si et seulement si $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants.

Dans le cas $n = 2$, on a le résultat d'approximation général suivant [7] :

Théorème 6. *Lorsque $n = 2$, les suites $(A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)})_{\nu \geq 0}$ sont bornées pour tout développement par l'AJP de deux réels (α_1, α_2) . De plus, si un développement est périodique, nous avons $\lim_{\nu \rightarrow \infty} A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)} = 0$ ($i = 1, 2$) et ρ est un nombre de Pisot de degré 3.*

Pour $n \geq 4$, nous donnons en [7] une méthode pour trouver des exemples de développement où $A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)}$ ne tend pas vers 0.

Théorème 7. *Le polynôme caractéristique du développement périodique de longueur 1, (a_1, a_2, a_3) , est réductible si et seulement si $a_2 = a_3$ et $a_1 = 0$. Dans ce cas ρ est un nombre de Pisot de degré 3 (et non 4), $A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)}$ ne converge pas vers 0 et il existe une $\mathbb{Q}$ -dépendance entre $1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Dans tous les autres cas ($a_3 > a_2$ ou $a_1 \neq 0$), ρ est un nombre de Pisot de degré 4 et donc $\lim_{\nu \rightarrow \infty} A_i^{(\nu)} - \alpha_i A_0^{(\nu)} = 0$.*

4. Historique de la périodicité. Depuis un siècle beaucoup d'efforts ont été faits pour tenter de caractériser les n -uples admettant un développement par l'AJP périodique. Cette question reste ouverte. Plusieurs auteurs, dont L. Bernstein [3], C. Lévesque et G. Rhin [11], B. Adam et G. Rhin [1] et nous-mêmes [8], ont décrit des familles de développements périodiques. Les principaux résultats généraux sur la périodicité sont les suivants (voir [4,5,9]) :

Théorème 8. *Dans tout corps de nombres réels de degré $n + 1$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ admettant un développement périodique par l'AJP.*

En construisant un algorithme permettant de déterminer tous les couples (α_1, α_2) dont l'AJP est associé à une unité ρ fixée, B. Adam et G. Rhin [2] ont montré qu'il n'y a qu'un nombre fini de couples (α_1, α_2) ayant un développement purement périodique et conduisant à cette unité. Numériquement, ils ont constaté qu'il n'y avait aucun couple (α_1, α_2) conduisant à une unité qui n'est pas un nombre de Pisot. Ce constat a été le point de départ de notre étude et nous tenons à les en remercier.

English extended abstract. The Jacobi-Perron algorithm (JPA) is a generalization of the continued fraction algorithm introduced by Jacobi [10] and Perron [12]. This algorithm applied to a n -tuple $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ of real numbers gives rational simultaneous approximations. The crucial question of the characterization of periodicity is still open. We state, in paragraph 3, the existence of periodic development in each real number field.

We consider the case of n -tuples for which the algorithm either stops or continues with a shorter vector. In the latter case, we say that there are interruptions. The JPA of two real numbers (α_1, α_2) has interruptions if and only if $1, \alpha_1, \alpha_2$ are $\mathbb{Q}$ -linearly

dependent. But for $n \geq 3$ we can construct real numbers $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ which are $\mathbb{Q}$ -linearly dependent without interruptions in their periodic JPA expansion.

The quality of simultaneous approximation depends on the characteristic polynomial. We give some results on its reductibility and on the approximation of the α_i 's.

BIBLIOGRAPHIE

1. B. Adam et G. Rhin, *Algorithmes des fractions continues et de Jacobi-Perron*, Bull. Austral. Math. Soc. **53** (1996), 341–350.
2. B. Adam et G. Rhin, *Periodic Jacobi-Perron expansions associated to a unit*; Soumis.
3. L. Bernstein, *The Jacobi-Perron algorithm — its theory and application*, Lecture Notes in Math., vol. 207, 1971.
4. M. Bouhamza, *Algorithme de Jacobi-Perron dans les corps de nombres de degré 3*, Bull. Sci. Math. (2) **108** (1984), 101–111.
5. M. Bouhamza, *Algorithme de Jacobi-Perron dans les corps de nombres de degré 4*, Acta Arith. **44** (1984); no. 2, 141–145.
6. E. Dubois, A. Fahrane et R. Paysant-Le Roux, *Étude des interruptions dans l'algorithme de Jacobi-Perron*, Bull. Austral. Math. Soc. **69** (2004), 241–254.
7. E. Dubois, A. Fahrane et R. Paysant-LeRoux, *The Jacobi-Perron Algorithm and Pisot numbers*, Acta. Arith. **111** (2004); no. 3, 269–275.
8. E. Dubois et R. Paysant-LeRoux, *Développement périodique par l'algorithme de Jacobi-Perron et nombre de Pisot-Vijayaraghavan*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **272** (1971), A649–A652.
9. E. Dubois et R. Paysant-LeRoux, *Une application des nombres de Pisot à l'algorithme de Jacobi-Perron*, Monatsh. Math. **98** (1984), 145–155.
10. C. G. J. Jacobi, *Allgemeine Theorie der kettenbruchaehnlichen Algorithmen*, J. Reine Angew. Math. **69** (1869), 29–64.
11. C. Lévesque et G. Rhin, *Two families of periodic Jacobi algorithms with period lengths going to infinity*, J. Number Theory **37** (1991); no. 2, 173–180.
12. O. Perron, *Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus*, Math. Ann. **64** (1907), 1–76.

E. DUBOIS ET R. PAYANT-LE ROUX

LABORATOIRE NICOLAS ORESME

CNRS UMR N° 6139

UNIVERSITÉ DE CAEN

14032 CAEN CEDEX

FRANCE

COURRIEL : `eugene.dubois@math.unicaen.fr`

`Roger.Paysant-Leroux@math.unicaen.fr`

A. FARHANE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE SETTAT

MAROC

COURRIEL : `ahmed_farhane@yahoo.fr`