

EXTENSIONS PRESQUE MODULAIRES

MUSTAPHA CHELLALI ET EL HASSANE FLIOUET

RÉSUMÉ. Soit k un corps commutatif de caractéristique $p > 0$. On suppose que $[k : k^p]$ est fini. Soit K une extension purement inséparable de k . Soient m/k (resp. M/K) la plus petite extension telle que K/m (resp. M/k) est modulaire (voir [14]). On dira que K/k est lq -modulaire (resp. uq -modulaire) si m/k (resp. K/M) est finie. On caractérise ces deux notions au moyen d'invariants de K/k . On montre qu'une intersection quelconque portant sur k ou sur K préserve ces deux notions. Enfin, on donne des exemples d'extensions non lq -modulaires et d'extensions non uq -modulaires.

ABSTRACT. Let k be a commutative field of characteristic $p > 0$. Suppose that $[k : k^p]$ is finite. Let K be a purely inseparable extension of k . Let m/k (resp. M/K) be the smallest extension such that K/m (resp. M/k) is modular (see [14]). We say that K/k is lq -modular (resp. uq -modular) if m/k (resp. K/M) is finite. Those two notions are characterized by means of invariants of K/k . We show that any intersection with k or with K preserves these two notions. Finally we provide examples of extensions which are non lq -modular and of extensions which are non uq -modulaires.

1. Introduction. Soit k un corps commutatif de caractéristique $p > 0$. On suppose $[k : k^p]$ fini. Autrement dit, k est (essentiellement) (voir [2]) une extension algébrique d'un corps de fractions rationnelles $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$, avec P parfait. Soit K une extension purement inséparable de k . Le cas où K/k est finie est bien compris (voir [5,11,12,13,14]). Pour K/k infinie, peu de résultats ont été obtenus (voir [4,9]). Cette note s'inscrit dans cette direction. Soit m/k (resp. M/K) la plus petite extension telle que K/m (resp. M/k) est modulaire (voir [14]). On dira que K/k est lq -modulaire (resp. uq -modulaire) si m/k (resp. K/M) est finie. On rappelle à la section 4 la définition d'une extension modulaire. On caractérise ces deux notions au moyen d'invariants de K/k . On montre qu'une intersection quelconque portant sur k ou sur K préserve ces deux notions. On montre que la uq -modularité entraîne la lq -modularité et qu'une classe importante d'extensions sont lq -modulaires (voir les propositions 5.4, 5.5, 5.6 et le corollaire 5.8). Enfin, on donne des exemples d'extensions non lq -modulaires et d'extensions non uq -modulaires mais lq -modulaires. Au cours des sections 2, 3 et 4, on reprend, en les améliorant, les notations et résultats de [4], puisqu'ils sont utilisés dans toute leur force ici; sauf pour le théorème 2.8 qui est nouveau et qui caractérise la

Reçu le 15 septembre 2003 et, sous forme définitive, le 31 janvier 2005.

finitude du degré d'imperfection d'un corps commutatif k , par la finitude des chaînes descendantes d'extensions purement inséparables de k . Les sections 5 et 6 étudient respectivement les extensions lq -modulaires et uq -modulaires.

2. Degré d'imperfection relatif. Dans cette section, K/k désigne une extension de corps commutatifs de caractéristique $p > 0$.

Définition 2.1. Une partie G de K est dite r -générateur de K/k si $K = k(G)$; si de plus, $|G|$ est minimum, G est dite r -base de K/k . Une partie A de K est dite r -libre sur k si c'est une r -base de $k(A)/k$; dans le cas contraire, A est dite r -liée sur k .

Soit G une r -base de K/k . On note $\text{di}(K/k) = |G|$, et $\text{di}(K/k)$ sera appelé le degré d'irrationalité de K/k . Si K/k est finie, on montre (voir [11] par exemple) qu'une partie de K est une r -base de K/k si et seulement si c'est une r -base de $K/k(K^p)$. Ceci est la base de la propriété 3 du degré d'irrationalité décrite ci-bas. Les autres propriétés sont élémentaires (voir [4]) :

- Soit K/k une sous-extension finie d'une extension Ω/k , L un sous-corps de Ω . On a : $\text{di}(L(K)/L(k)) \leq \text{di}(K/k)$.
- Soient K_1/k et K_2/k des sous-extensions finies d'une extension K/k linéairement disjointes. On a :
 - $\text{di}(K_1(K_2)/K_2) = \text{di}(K_1/k)$;
 - $\text{di}(K_1(K_2)/k) = \text{di}(K_1/k) + \text{di}(K_2/k)$ si $K_1/k, K_2/k$ sont non séparables.
- Soit L/L' une sous-extension de K/k . On a : $\text{di}(L/L') \leq \text{di}(K/k)$.

Rappelons qu'on appelle le degré d'imperfection d'un corps commutatif k le cardinal d'une p -base de k (une r -base de k/k^p); on le notera $\text{di}(k)$. Supposons $\text{di}(k)$ fini et k non parfait. Alors pour toute extension finie K de k , on a (voir [4]) $\text{di}(K/k) \leq \text{di}(k)$. C'est le théorème de l'élément primitif généralisé. Ceci nous amène à regarder de près l'entier $\text{di}(k)$ (voir [12]).

Théorème 2.2. *Supposons $\text{di}(k)$ fini.*

- (1) *Si K/k est fini, alors $\text{di}(K) = \text{di}(k)$.*
- (2) *Si K/k est algébrique séparable, alors $\text{di}(K) = \text{di}(k)$.*
- (3) *Si K/k est purement inséparable infini, alors $\text{di}(K) < \text{di}(k)$.*

Corollaire 2.3. *Si K/k est algébrique, on a $\text{di}(K) \leq \text{di}(k)$.*

Une conséquence immédiate du théorème ci-dessus est la suivante : Soit $P = \bigcap_n k^{p^n}$ le sous-corps parfait maximal de k . On a $\text{di}(k) \leq d^o \text{tr}(k/P)$ avec l'égalité si k/P est de type fini. Il existe des contre-exemples à l'égalité; voir [4] et [11, page 72, remarque 1.85].

Un corps k est dit parfait si $k^p = k$; dans le même ordre d'idées, on dit que K/k est relativement parfaite si $k(K^p) = K$. On a :

- Si K/L et L/k sont relativement parfaites, alors K/k est relativement parfaite.
- Si K/k est relativement parfaite, alors LK/Lk est relativement parfaite.
- Si K_i/k ($i \in I$) sont relativement parfaites, alors $\prod_i K_i/k$ est relativement parfaite.

Par suite, il existe une plus grande sous-extension k_r/k de K/k relativement parfaite. On la notera $k_r = \text{rp}(K/k)$. On a les relations d'associativité-transitivité suivantes.

Proposition 2.4. *Soit L un corps intermédiaire de K/k . Alors*

$$\text{rp}(\text{rp}(K/L)/k) = \text{rp}(K/k) \quad \text{et} \quad \text{rp}(K/\text{rp}(L/k)) = \text{rp}(K/k).$$

Dans la suite il est commode de noter $[k, K]$ l'ensemble des corps intermédiaires d'une extension K/k .

Corollaire 2.5. *Supposons $\text{di}(k)$ fini et soit $L \in [k, K]$. Alors K/L finie entraîne $k_r \subset L$.*

En particulier, si K/k est relativement parfaite, alors K/L finie entraîne $L = K$. Schématiquement on a un *trou*

$$\begin{array}{ccc} k & \longrightarrow & K \\ & & \uparrow \\ & & \text{trou} \end{array}$$

et ce *trou* caractérise le fait que K/k est relativement parfaite. En effet, supposons que K/k vérifie le *trou* et soit B une p -base de K/k . Supposons $B \neq \emptyset$; soit $x \in B$ et $L = k(K^p)(B \setminus \{x\})$; on a K/L finie, donc $K = L$, ce qui est absurde.

Lemme 2.6. *Soit K/k une extension algébrique avec $\text{di}(k)$ fini. Alors nous avons :*

- (i) K est relativement parfaite sur une extension finie de k ;
- (ii) la suite décroissante $(K^{p^n}(k))_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire sur $k_1 = K^{p^{n_0}}(k)$; on a K/k_1 finie purement inséparable, et k_1/k est la plus grande sous-extension relativement parfaite de K/k .

On aura besoin aussi du résultat suivant :

Proposition 2.7. *Soit K/k une extension algébrique avec $\text{di}(k)$ fini. Soit $L \in [k, K]$. Alors $\text{rp}(L/k) = L \text{rp}(K/k)$.*

Le théorème qui suit joue un rôle important dans notre travail. Ici k désigne toujours un corps commutatif et on suppose que toutes les extensions de k sont des sous-extensions d'une même extension Ω/k .

Théorème 2.8. *Il est équivalent de dire :*

- (1) Toute suite décroissante d'extensions purement inséparables de k est stationnaire.
- (2) Tout ensemble d'extensions de k purement inséparables admet un élément minimal.
- (3) $\text{di}(k)$ est fini.

Corollaire 2.9. *Supposons $\text{di}(k)$ fini. Alors la propriété d'extensions purement inséparables de k est stable par intersection quelconque si et seulement si elle est stable par intersection finie.*

3. Exposants des extensions purement inséparables.

Définition 3.1. Soit K/k une extension purement inséparable finie de caractéristique $p \neq 0$, $x \in K$. Posons

$$o(x/k) = \inf\{m \in \mathbf{N} : x^{p^m} \in k\} \quad \text{et} \quad o_1(K/k) = \inf\{m \in \mathbf{N} : K^{p^m} \subset k\}.$$

Une r -base $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de K/k est dite canoniquement ordonnée si pour $j = 1, 2, \dots, n$, on a

$$o(a_j/k(a_1, a_2, \dots, a_{j-1})) = o_1(K/k(a_1, a_2, \dots, a_{j-1})).$$

Remarque 3.2. Toute r -base peut être canoniquement ordonnée.

Lemme 3.3. Si $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ une r -base canoniquement ordonnée de K/k , alors

$$o(a_s/k(a_1, \dots, a_{s-1})) = \inf\{m \in \mathbf{N} : \text{di}(k(K^{p^m})/k) \leq s-1\}.$$

Il en résulte immédiatement [12] le résultat suivant.

Théorème 3.4. Les entiers $o(a_i/k(a_1, \dots, a_{i-1}))$ ($1 \leq i \leq n$) sont indépendants du choix de la r -base canoniquement ordonnée $\{a_1, \dots, a_n\}$ de K/k .

On appellera $o(a_i/k(a_1, \dots, a_{i-1}))$ le i^{e} exposant de K/k et on le notera $o_i(K/k)$. On a

$$o_1(K/k) \geq o_2(K/k) \geq \dots \geq o_n(K/k).$$

On pose $o_i(K/k) = 0$ si $i > n$. Voici les principales propriétés des exposants; elles découlent du lemme ci-dessus.

Proposition 3.5.

- (i) Soit K et L des corps intermédiaires d'une extension Ω/k avec K/k purement inséparable fini. Alors pour tout entier j , on a $o_j(K(L)/k(L)) \leq o_j(K/k)$.
- (ii) Soit K/k une extension purement inséparable finie. Pour toute sous-extension L/L' de K/k et pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a $o_j(L/L') \leq o_j(K/k)$.
- (iii) Si K_1/k et K_2/k sont deux sous-extensions de K/k , alors K_1/k et K_2/k sont k -linéairement disjointes si et seulement si $o_j(K_1(K_2)/K_2) = o_j(K_1/k)$ pour tout $j \in \mathbf{N}$.

4. Extensions modulaires. On rappelle qu'une extension quelconque K/k est dite modulaire si et seulement si pour tout $n \in \mathbf{N}$, K^{p^n} et k sont $K^{p^n} \cap k$ -linéairement disjointes. Cette notion a été définie pour la première fois dans [13]. Le théorème suivant de Waterhouse joue un rôle important dans l'étude des extensions modulaires (voir [14, Théorème 1.1]).

Théorème 4.1. Soit K_i ($i \in I$) une famille quelconque de sous-corps d'un corps Ω , et soit K un autre sous-corps de Ω ; si K est linéairement disjoint de chaque K_i , alors K est linéairement disjoint de $\bigcap_i K_i$.

Corollaire 4.2.

- (i) Si K_i ($i \in I$) est modulaire sur k , alors $\bigcap_i K_i$ est modulaire sur k .
- (ii) Si K est modulaire sur chaque k_i , alors K est modulaire sur $\bigcap_i k_i$.

Comme conséquence immédiate de la modularité, on a le résultat suivant.

Proposition 4.3. Soient $m, n \in \mathbf{Z}$ avec $n \geq m$. Si K/k est modulaire, alors K^{p^m}/k^{p^n} est modulaire.

La condition $n \geq m$ assure $k^{p^n} \subset K^{p^m}$.

Remarque 4.4. Soient $K_1, K_2, \dots, K_m$ k -linéairement disjoints. Soient L_i des sous-corps de K_i , $L = \prod_i L_i$. Alors $LK_1, LK_2, \dots, LK_m$ sont Lk -linéairement disjoints.

Le résultat suivant est bien connu (voir [9]).

Proposition 4.5. Soit K/k une extension purement inséparable et modulaire; soit pour tout entier n , $k_n = k^{p^{-n}} \cap K$ et $K_n = K^{p^n}k$. Alors k_n/k , K_n/k , K/k_n et K/K_n sont modulaires.

Proposition 4.6. Soit L/k une sous-extension d'une extension modulaire finie K/k , avec $\text{di}(L/k) = \text{di}(K/k)$. Soit s le plus grand entier tel que $o_s(L/k) = o_n(L/k)$ avec $n = \text{di}(L/k)$. Alors il existe une r -base canoniquement ordonnée $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de L/k telle que $L = k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}) \otimes_k k(\alpha_s) \otimes_k \dots \otimes_k k(\alpha_n)$.

Corollaire 4.7. Soit K/k une extension purement inséparable et modulaire telle que $\text{di}(K/k) \leq 2$. Alors toute sous-extension L/k est modulaire.

Proposition 4.8. Soit K/k une extension purement inséparable finie (respectivement, et modulaire), et soit L/k une sous-extension de K/k (respectivement, et modulaire) avec $\text{di}(L/k) = s$. Si $K^p \subset L$, alors il existe une r -base canoniquement ordonnée (respectivement, et modulaire) $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de K/k , et $e_1, e_2, \dots, e_s \in \{1, p\}$ tels que $(\alpha_1^{e_1}, \alpha_2^{e_2}, \dots, \alpha_s^{e_s})$ soit une r -base canoniquement ordonnée (respectivement, et modulaire) de L/k . De plus, pour $1 \leq j \leq s$, ou bien on a $o_j(K/k) = o_j(L/k)$, auquel cas $e_j = 1$, ou bien $o_j(K/k) = o_j(L/k) + 1$, auquel cas $e_j = p$.

Proposition 4.9. Soit K/k une extension purement inséparable, relativement parfaite et modulaire (respectivement finie équiexponentielle). Pour tout entier n , posons $k_n = k^{p^{-n}} \cap K$; soit $t = \text{di}(K/k)$; soient $n, m \in \mathbf{N}$ avec $n \leq m$ (respectivement, $n \leq o(K/k)$). Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) $\text{di}(k_m/k_n) = t$; donc $[k_n, k] = p^{nt}$;
- (ii) k_m/k_n est équiexponentielle d'exposant $m - n$;
- (iii) $k_n^{p^{-(m-n)}} \cap K = k_m$ et $kk_m^{p^{m-n}} = k_n$.

On aura besoin en plus du résultat suivant.

Lemme 4.10. Soit K/k une extension purement inséparable, relativement parfaite et modulaire. Soit S/k une sous-extension de K/k relativement parfaite, L/k une sous-extension de S/k . Si S/L est modulaire, alors K/L est modulaire, (et en particulier, K/S est modulaire).

5. Extensions lower-quasi-modulaires. Soit K/k une extension purement inséparable avec $\text{di}(k)$ fini. Dans la suite, on note $U_s^j(K/k) = j - o_s(k^{p^{-j}} \cap K)$. Soit $k_j = k^{p^{-j}} \cap K$. Comme $k_{j+1}^p \subset k_j$, par la proposition 4.8, on a

$$o_s(k_j/k) \leq o_s(k_{j+1}) \leq o_s(k_j/k) + 1.$$

Il en résulte que pour tout entier s , la suite $(U_s^j)_{j \geq 1}$ est croissante. De plus, si $K_1 \subset K_2$, on a $U_s^j(K_2/k) \leq U_s^j(K_1/k)$.

Proposition 5.1. *Il est équivalent de dire :*

- (1) K est modulaire sur une extension finie de k .
- (2) Pour tout $s \in [1, t]$ avec $t = \text{di}(k) - \text{di}(K)$, la suite $(U_s^j)_{j \geq 1}$ est bornée.
- (3) Il existe un entier j tel que $K/k^{p^{-j}} \cap K$ est modulaire.

Théorème 5.2. *Soit K/k une extension purement inséparable avec $\text{di}(k)$ fini. Alors la plus petite sous-extension M/k de K/k telle que K/M est modulaire n'est pas triviale ($M \neq K$); plus précisément, si K/k est infinie, alors K/M est infinie.*

Les preuves complètes de ces deux résultats se trouvent dans [4].

Définition 5.3. Une extension purement inséparable K/k est dite lq -modulaire (lire lower-quasi-modulaire) si K est modulaire sur une extension finie de k .

D'après le théorème de Waterhouse, il existe un plus petit $m \in [k, K]$ tel que K/m est modulaire. Par suite, K/k est lq -modulaire si et seulement si m/k est finie.

Dans la suite, pour k et k' des sous-corps d'un même corps, on notera $k \sim k'$ si $k \subset k'$ et k'/k est finie, ou $k' \subset k$ et k/k' est finie.

Proposition 5.4. *Supposons $\text{di}(k)$ fini.*

- (i) Si K/k est lq -modulaire et $k' \sim k$ et $k' \subset K$, alors K/k' est lq -modulaire.
- (ii) Si K/k est lq -modulaire, $K \sim K'$ et $k \subset K'$, alors K'/k est lq -modulaire.

Proposition 5.5. *Soit K/k une extension purement inséparable et soit $L \in [k, K]$. Si K/k est lq -modulaire, alors K/L est lq -modulaire.*

Soit K/k une extension purement inséparable. Soit P le sous-corps parfait maximal de k . On a K/P modulaire; donc on peut espérer K/k lq -modulaire! Autrement dit, toute extension purement inséparable serait lq -modulaire. Cependant K/P est transcendante. Voici un exemple non évident d'extension purement inséparable et non lq -modulaire.

Soient k_0 un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et X, Z_1, Z_2 algébriquement indépendants sur k_0 . Soit $k = k_0(X, Z_1, Z_2)$. Posons $K_n = k(X^{p^{-2n}}, \theta_n)$ avec

$$\theta_n = Z_1^{p^{-1}} X^{p^{-2n}} + Z_1^{p^{-2}} X^{p^{-2n+1}} + \dots + Z_1^{p^{-n}} X^{p^{-n-1}} + Z_2^{p^{-n}}.$$

On a $\theta_{n+1}^p = Z_1 X^{p^{-2n-1}} + \theta_n$; donc $K_n \subset K_{n+1}$. Posons $K = \bigcup_n K_n$. L'extension $k(X^{p^{-\infty}})/k$ est la plus petite sous-extension m/k de K/k telle que K/m est modulaire. En effet, soit m/k la plus petite sous-extension de K/k telle que K/m est modulaire.

Supposons l'existence de $n \in \mathbf{N}$ tel que $X^{p^{-n+1}} \in m$ et $X^{p^{-n}} \notin m$; donc $(X^{p^{-n}}, 1)$ est libre sur $m \cap K^{p^n}$. Prolongeons ce système à une base B de $K^{p^n}/m \cap K^{p^n}$. Comme

$$[Z_1^{p^{-1}} X^{p^{-2n}} + \dots + Z_1^{p^{-n}} X^{p^{-n-1}} + Z_2^{p^{-n}}]^{p^n} = Z_1^{p^{n-1}} X^{p^{-n}} + \dots + Z_1 X^{p^{-1}} + Z_2$$

et comme K^{p^n} et m sont $m \cap K^{p^n}$ -linéairement disjoints (car K/m est modulaire), B est aussi une base de mK^{p^n}/m . Alors par identification, $Z_1^{p^{-1}} \in K$; donc $Z_2^{p^{-1}} \in K$. On aura

$$\text{di}(k(X^{p^{-1}}, Z_1^{p^{-1}}, Z_2^{p^{-1}})/k) = 3 \leq \text{di}(K/k) = 2,$$

ce qui est absurde.

Voici quelques exemples d'extensions lq -modulaires. Une extension K/k est dite w_0 -générée si K/k est infinie et si pour tout $L \in [k, K[$, L/k est finie (voir [6] et [4] pour des exemples non triviaux d'extension w_0 -générée).

Proposition 5.6. *Si $\text{di}(k)$ est fini, toute extension purement inséparable et w_0 -générée de k est lq -modulaire.*

Une extension algébrique K/k est dite simple si $K = k(\theta)$ ($\theta \in K$). Une généralisation naturelle de cette notion est de dire que K/k est q -simple si l'ensemble des corps intermédiaires de K/k est totalement ordonné (voir [4]); dans le cas purement inséparable, cela équivaut à ce que toute sous-extension finie de K/k est simple.

Soient $F/k, L/k$ des sous-extensions d'une extension Ω/k . On vérifie immédiatement, en se ramenant à des extensions simples, que nous avons les propriétés suivantes :

- si F/k est q -simple, alors LF/L est q -simple;
- si F/k est q -simple, alors $LF = L \otimes_{L \cap F} F$.

Une extension K/k est dite q -finie (lire quasi-finie) si elle est produit fini d'extensions q -simples.

Proposition 5.7. *Toute extension K/k purement inséparable et q -finie est produit tensoriel d'extensions q -simples sur une extension finie de k .*

Corollaire 5.8. *Toute extension purement inséparable q -finie est lq -modulaire.*

Pour la suite de cette section, on montre que comme pour la modularité, la lower-quasi-modularité est préservée par intersection.

Proposition 5.9. *Soit K/k une extension purement inséparable avec $\text{di}(k)$ fini. Soit (k_i) ($i \in I$) une famille de corps intermédiaires de K/k . Si K/k_i est lq -modulaire pour tout $i \in I$, alors $K/\bigcap_i k_i$ est lq -modulaire.*

Grâce au théorème 2.8, on se ramène à $|I| = 2$, auquel cas le résultat est immédiat.

Corollaire 5.10. *Soit K/k une extension purement inséparable avec $\text{di}(k)$ fini. Alors il existe une plus petite sous-extension m/k de K/k telle que K/m est lq -modulaire.*

On peut situer avec précision m . Notons $\text{lm}(K/k)$ la plus petite sous-extension m/k de K/k tel que K/m est modulaire, et $\text{lqm}(K/k)$ la plus petite sous-extension m/k de K/k tel que K/m est lq -modulaire.

Proposition 5.11. $\text{lqm}(K/k) = \text{rp}(\text{lm}(K/k)/k)$.

La préservation de la lower-quasi-modularité de K/k par intersection portant sur K semble beaucoup moins évidente. On aura besoin du lemme technique suivant.

Soient L/k et m/k des sous-extensions finies d'une extension K/k , avec L/k purement inséparable. Soit $B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ une r -base canoniquement ordonnée de L/k . Posons $e_i = o_i(L/k)$ et $e = o_1(m/k)$. On suppose qu'il existe un entier $s \in [1, n]$ tel que $e_{s-1} - e_s > e$, en particulier $e_s \neq e_{s-1}$. Il existe des constantes uniques $a_\xi \in k(L^{p^{e_{s+1}}})$ avec $\xi \in \{(i_1, i_2, \dots, i_{s-1}) \mid 0 \leq i_j \leq p-1\}$ telles que

$$\alpha_s^{p^{e_s}} = \sum_{\xi} a_\xi (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1})^{\xi p^{e_s}}.$$

Supposons de plus que $K^{p^{e_s}}$ et $k(m \cap K^{p^{e_s}})$ sont $m \cap K^{p^{e_s}}$ -linéairement disjoints; en particulier, ceci est vérifié si K/m est modulaire.

Lemme 5.12. *Sous les hypothèses ci-dessus, on a*

$$\forall \xi \in \{(i_1, i_2, \dots, i_{s-1}) \mid 0 \leq i_j \leq p-1\}, \quad a_\xi^{p^{-e_s}} \in k^{p^{-e_1+1}} \cap K.$$

Théorème 5.13. *Soient K_i/k ($i \in I$) une famille de sous-extensions lq -modulaires d'une extension Ω/k , avec $\text{di}(k)$ fini. Alors $\bigcap_i K_i/k$ est lq -modulaire.*

D'après le théorème 2.8, on se ramène à $|I| = 2$. On utilise alors un raffinement de la preuve du théorème de Waterhouse et le lemme ci-dessus.

Corollaire 5.14. *Soit K/k une extension purement inséparable avec $\text{di}(k)$ fini. Il existe une plus petite extension M/K telle que M/k est lq -modulaire.*

On ne sait pas situer avec précision M . Tout ce que l'on peut affirmer est que si $M = \text{ulqm}(K/k)$ et $M_1 = \text{um}(K/k)$, la plus petite extension M/K telle que M/k est modulaire, alors on a $\text{ulqm}(K/k) \subset \text{rp}(\text{um}(K/k)/K)$. Mais l'inclusion peut être stricte (voir l'exemple qui suit la Proposition 6.3).

6. Extensions upper-quasi-modulaires. Soit K/k une extension purement inséparable. Il existe une plus petite extension M/K telle que M/k est modulaire. Dans le même ordre d'idées, on dira que K/k est uq -modulaire (lire upper-quasi-modulaire) si M/K est finie, autrement dit, s'il existe une extension finie L/K telle que L/k est modulaire.

Proposition 6.1. *Si $\text{di}(k)$ est finie, K/k est uq -modulaire, $K' \sim K$ et $k \subset K'$, alors K'/k est uq -modulaire.*

Théorème 6.2. *Soit K/k une extension purement inséparable avec $\text{di}(k)$ fini. Il est équivalent de dire :*

- (1) K/k est uq -modulaire.
- (2) $\text{rp}(K/k)/k$ est modulaire.

La proposition qui suit montre que la quasi-modularité équivaut à la lower-quasi-modularité.

Proposition 6.3. *Toute extension purement inséparable uq -modulaire K/k , avec $\text{di}(k)$ fini, est lq -modulaire.*

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. Soit P un corps parfait de caractéristique $p \neq 0$. Soit (X, Y, Z) algébriquement libre sur P . Soit

$$k = P(X, Y, Z), \quad F_1 = k(X^{p^{-\infty}}), \quad F_2 = k\left((X^{p^{-2}}Y^{p^{-1}} + Z^{p^{-1}})^{p^{-\infty}}\right) \text{ et } K = F_1F_2.$$

Comme F_1, F_2 sont q -simples, selon le corolaire 5.8, K/k est lq -modulaire. Elle n'est pas uq -modulaire, car sinon, comme elle est relativement parfaite, d'après le théorème 6.2 elle serait modulaire. Mais alors posons $\theta = X^{p^{-2}}Y^{p^{-1}} + Z^{p^{-1}}$; on a $\theta^p = YX^{p^{-1}} + Z$; le système $(1, X^{p^{-1}})$ de K^p est libre sur $K^p \cap k$; prolongeons-le en une base de $K^p/k \cap K^p$. Comme K^p et k sont linéairement disjoints, c'est une base de kK^p/k ; par identification, $Y, Z \in K^p \cap k$; donc $Y^{p^{-1}}, Z^{p^{-1}} \in K$; donc $\text{di}(K/k) \geq \text{di}(k(X^{p^{-2}}, Y^{p^{-1}}, Z^{p^{-1}})/k) = 3$, ce qui est absurde.

Théorème 6.4. *Soit K/k une extension purement inséparable avec $\text{di}(k)$ fini. Alors il existe une plus petite extension M/K telle que M/k est uq -modulaire. Soit M_1 la plus petite extension de K telle que M_1/k est modulaire. On a $M = \text{rp}(M_1/K)$.*

Corollaire 6.5. *Soit K_i/k ($i \in I$) une famille de sous-extensions uq -modulaires d'une extension Ω/k , avec $\text{di}(k)$ fini. Alors $\bigcap_i K_i/k$ est uq -modulaire.*

Théorème 6.6. *Soit K/k une extension purement inséparable avec $\text{di}(k)$ fini. Alors il existe une plus petite extension m/k telle que K/m est uq -modulaire. Soit m_1 la plus petite extension de k telle que $\text{rp}(K/k)/m_1$ est modulaire. Alors on a $m = m_1$.*

Pour la preuve, on utilise de façon essentielle le théorème 5.2.

Corollaire 6.7. *Soit K/k_i ($i \in I$) une famille de sous-extensions uq -modulaires d'une extension purement inséparable K/k . Alors $K/\bigcap_i k_i$ est uq -modulaire.*

English extended abstract. Let k be a field of characteristic $p > 0$. Assume $[k : k^p]$ is finite. Let K be a purely inseparable field extension of k . The case where K/k is a finite extension is well understood: see [5,11,12,13,14]. For K/k infinite, few results were obtained (see [4,9]) and this note deals with this case. Let m/k (resp. M/K) be the smallest extension such that K/m (resp. M/k) is modular (see [14]). We say that K/k is lq -modular (resp. uq -modular) if m/k (resp. K/M) is finite.

To justify the terminology, let k and k' be subfields of a field K . Write $k \sim k'$ to mean that $k \subset k'$ and k'/k is finite, or $k' \subset k$ and k/k' is finite. If $k \cup k' \subset K$ and $k \sim k'$, then K/k is lq -modular if and only if K/k' is lq -modular. Similarly, if $k \subset K \cap K'$ and $K \sim K'$, then K/k is lq -modular (resp. uq -modular) if and only if K'/k is lq -modular (resp. uq -modular). We characterize these two concepts (uq -modularity and lq -modularity) by means of invariants of K/k .

- Let R/k the greatest subextension of K/k which is relatively perfect. Then we have:

K/k is uq -modular if and only if R/k is modular.

- Let $U_s^j(K/k) = j - o_s(k^{p^{-j}} \cap K/k)$ (see §3 for the definition of $o_s(K/k)$). Then we have:

K/k is lq -modular if only if $U_s^j(K/k)$ is bounded.

It turns out that the uq -modularity involves the lq -modularity. We exhibit an important class of extensions which are lq -modular (see Propositions 5.4, 5.5, 5.6 and Corollary 5.8).

- An extension K/k is said to be w_0 -generated if K/k is infinite and if for all $L \in [k, K[, L/k$ is finite (see [6] and [4] for examples of extensions which are w_0 -generated). It is shown in [4] that under the assumptions above, every extension K/k is composed by w_0 -generated extensions. We have the following:

If K/k is w_0 -generated, then K/k is lq -modular.

- An extension K/k is said to be q -simple if every finite subextension L/k of K/k is simple. An extension K/k is said to be q -finite if it is a finite product of q -simple extensions. We have the following:

If K/k is q -finite, then K/k is lq -modular.

We show that any intersection with k or with K preserves these two concepts. Hence there exists a least subextension m'/k (resp. M'/K) of K/k such that K/m' (resp. M'/k) is lq -modular. And also there exists a least subextension m''/k (resp. M''/K) of K/k such that K/m'' (resp. M''/k) is uq -modular. The case of K and lq -modularity seems very non-trivial. We use Theorem 2.8 which exhibits an equivalence of the fact that $[k : k^p]$ is finite with the fact that every decreasing sequence of purely inseparable field extension of k is stationary.

Finally we give examples of extensions which are not lq -modular and examples of lq -modular extensions which are not uq -modular.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. T. Becker and S. MacLane, *The minimum number of generators for inseparable algebraic extensions*, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 182–186.
2. M. Chellali, *Sur le degré d'imperfection d'un corps*; À paraître.
3. M. Chellali et E. Fliouet, *w_0 -generated field extensions*; À paraître.
4. M. Chellali et E. Fliouet, *Extensions purement inséparables d'exposant non borné*, Arch. Math. (Brno) **40** (2004), 129–159.
5. J. K. Deveney, *An intermediate theory for a purely inseparable Galois theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **198** (1974), 287–295.
6. J. K. Deveney, *w_0 -generated field extensions*, Arch. Math. (Basel) **47** (1986), 410–412.
7. J. K. Deveney et J. N. Mordeson, *Invariance in inseparable Galois theory*, Rocky Mountain J. Math. **9** (1979), 395–403.
8. J. K. Deveney et J. N. Mordeson, *Higher derivation Galois theory of inseparable field extensions*, Handbook of Algebra, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1996, pp. 187–220.
9. L. A. Kime, *Purely inseparable, modular extensions of unbounded exponent*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 335–349.

10. J. N. Mordeson et W. W. Shultz, *p-bases of inseparable field extensions*, Arch. Math. (Basel) **24** (1973), 44–49.
11. J. N. Mordeson and B. Vinograd, *Structure of arbitrary purely inseparable extension fields*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 173, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
12. G. Pickert, *Inseparable Körperweiterungen*, Math. Z. **52** (1949), 81–136.
13. M. E. Sweedler, *Structure of inseparable extensions*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 401–410.
14. W.C. Waterhouse, *The structure of inseparable field extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **211** (1975), 39–56.

M. CHELLALI ET EL H. FLIOUET

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ MOHAMED 1^{er}

FACULTÉ DES SCIENCES

B. P. 524, OUJDA, MAROC

COURRIEL : `chellali@sciences.univ-oujda.ac.ma`

`fliouet@yahoo.fr`