

CRITÈRE DE KRASNER POUR LE PROLONGEMENT D'UNE VALUATION À UNE EXTENSION D'ANNEAUX À DIVISION

M'HAMMED BOULAGOUAZ

RÉSUMÉ. On présente le critère de Marc Krasner donnant le prolongement d'une valuation à un anneau à division.

ABSTRACT. One describes a criterion of Marc Krasner for the extension of a valuation to a division ring.

1. Introduction. Pour une extension de corps (commutatifs) E/F , il est bien connu que toute valuation de F a au moins un prolongement en une valuation de E . Pour une extension d'anneaux à division (corps non nécessairement commutatifs) E/D , il est aussi connu que toute valuation de D a au plus un prolongement en une valuation de E . Cohn et Mahdavi-Hezavehi [2] ont établi un critère de prolongement pour une valuation à un anneau à division. Ils mentionnent l'existence d'un autre critère de prolongement dû à Marc Krasner. Selon Mahdavi-Hezavehi et Cohn, ce critère de Krasner est malheureusement très peu connu dans la littérature. Nous nous proposons donc de présenter ce critère de Krasner pour le prolongement d'une valuation à un anneau à division afin d'en faire profiter ceux qui sont intéressés.

2. Caractérisation des anneaux de valuation.

Lemme 2.1. Soient D un anneau à division et A un sous-anneau de D , D_A le plus petit sous-anneau à division de D contenant A , et supposons que A contient tous les commutateurs de D_A . Alors pour un idéal premier P de A , les éléments de D_A de la forme ab^{-1} où $a \in A$ et $b \in A \setminus P$ forment un anneau A_P qui coïncide avec celui des éléments $b^{-1}a$ où $a \in A$ et $b \in A \setminus P$ et PA_P est l'unique idéal maximal propre de A_P tel que $PA_P \cap A = P$ avec $A \setminus P = \{x \in A \mid x \notin P\}$.

Définition 2.2. Un sous-anneau A d'un anneau à division D est appelé un anneau de valuation si pour tout $d \in D$ on a $d \in A$ ou $d^{-1} \in A$.

Lemme 2.3. Soient A un sous-anneau d'un anneau à division D qui contient tous les commutateurs de D et $\alpha \in D$. Alors tout produit des puissances entières de α et d'éléments de A peut être ramené à la forme $a\alpha^i$, $i \in \mathbb{Z}$, et tout idéal de A est bilatère.

Reçu le 25 septembre 2003 et, sous forme définitive, le 31 janvier 2005.

Théorème 2.4. Si A est un sous-anneau d'un anneau à division D tel que :

- (1) A contient tous les commutateurs de D ;
- (2) l'unique idéal maximal de A est l'idéal $\mathcal{P}$ formé de tous ses éléments non inversibles;
- (3) Il n'existe aucun suranneau A' de A , dans D , tel que $\mathcal{P}A' \cap A = \mathcal{P}$,

alors A est un anneau de valuation de D .

Démonstration. D'une part, soit A' un suranneau de A contenu dans D . L'idéal $\mathcal{P}A'$ de A' est bilatère; donc $\mathcal{P}A' \cap A$ est un idéal bilatère de A contenant $\mathcal{P}$ strictement, d'où $\mathcal{P}A' \cap A = A$ et alors $\mathcal{P}A'$ contient 1_D . On a alors $1 \in A'$, ce qui montre que $A' = D$.

D'autre part, pour que A soit un anneau de valuation il faut et il suffit que pour tout $\alpha \in D$ on ait α ou $\alpha^{-1} \in A$. Supposons qu'il existe $\alpha \in D$ tel que α et $\alpha^{-1} \notin A$. Alors $A[\alpha] \neq A$, $A[\alpha^{-1}] \neq A$ et $A[\alpha]$, $A[\alpha^{-1}]$ sont deux suranneaux de A contenus dans D . Donc $1 \in \mathcal{P}A[\alpha]$ et $1 \in \mathcal{P}A[\alpha^{-1}]$, et d'après le lemme ci-dessus,

$$1 = \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i \text{ et } 1 = \sum_{j=0}^m b_j \alpha^{-j}$$

avec $a_i, b_j \in P$. Dans les expressions de 1 ci-dessus, choisissons m, n minimaux, c'est-à-dire les plus petits entiers possibles, et supposons que $m \leq n$, quitte à échanger α par α^{-1} dans le cas contraire. Alors

$$1 - b_0 = \sum_{i=1}^m b_i \alpha^{-i}$$

avec $b_0 \in P$ et $1 \notin P$; donc $1 - b_0 \in P$ et alors $1 - b_0$ est inversible dans A . D'où

$$\sum_{i=1}^m (1 - b_0)^{-1} b_i \alpha^{-i} = 1.$$

Posons $c_i = (1 - b_0)^{-1} b_i$ ($1 \leq i \leq m$). Alors

$$\alpha^n = \sum_{i=1}^m c_i \alpha^{n-i}.$$

Donc $0 \leq n - m \leq n - i \leq n$ et

$$1 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i + a_n \sum_{i=1}^m c_i \alpha^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} d_i \alpha^i$$

avec $d_i = a_i + a_n c_{n-i}$ ou $d_i = a_i$, selon que $i \geq n - m$ ou $i < n - m$, de sorte que n n'est plus minimal. On a donc une situation contradictoire. $\square$

Théorème 2.5. *Si A est un sous-anneau maximal d'un anneau à division D contenant tous les commutateurs de D , alors A est un anneau de valuation de D .*

Démonstration. Si A est un corps, il est l'anneau de l'hypervaluation triviale, sinon il existe $a \in A^*$ tel que $aA \neq A$; aA est alors un idéal à droite de A et il est donc bilatère. En appliquant le lemme de Zorn, il existe un idéal maximal P de A qui sera premier. Par suite, A_P existe, PA_P est son unique idéal maximal et $PA_P \cap A = P$; puisque $A_P \supseteq A$, on a $A_P = A$. Si $A_P = D$ alors $PA_P = PD = D$ et de même pour tout $A' \supset A$, $A' = D$, donc $PA' \cap A = A \neq P$ et alors A vérifie les hypothèses du théorème précédent. Donc A est un anneau de valuation. $\square$

Théorème 2.6. *Soient D un anneau à division, A un sous-anneau de D , P un idéal premier de A et C l'ensemble des commutateurs de D . Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une valuation v de D telle que $A \subset A_v$ et $M_v \cap A = P$ est $PA[C] \cap A = P$, où A_v et M_v désignent respectivement l'anneau et l'idéal de valuation de v .*

Démonstration. La condition est bien nécessaire, car pour tout commutateur c , on a $v(c) = 0$. Montrons que la condition est suffisante. Considérons la famille des anneaux A^* de D contenant $A[C]$ et vérifiant $P'A^* \cap A' = P$, avec $P' = PA[C]$. On a $PA^* \cap A \subseteq (P'A^* \cap A') \cap A \subset pA' \cap A = P$. Ordonnons cette famille par inclusion : elle est inductive et d'après le lemme de Zorn, il existe un élément maximal. Soit $\dot{A}$ un tel élément de cette famille. Ici $P\dot{A}$ est un idéal bilatère; considérons maintenant la famille de tous les idéaux $\dot{P}$ de $\dot{A}$ tels que $\dot{P} \cap A = P$. Cette famille ordonnée par inclusion est encore inductive; elle a donc un élément maximal contenant $P\dot{A}$. Soit $\dot{p}$ cet élément maximal; c'est un idéal premier de $\dot{A}$, vu que $\dot{A} \supset A' \supset C$, $\dot{A}_{\dot{p}}$ existe; $\dot{P}\dot{A}_{\dot{p}}$ en est l'idéal maximal. De plus $\dot{P}\dot{A}_{\dot{p}} \cap \dot{A} = \dot{P}$ entraîne que $P\dot{A}_{\dot{p}} \cap A = \dot{P} \cap A = P$. Or $\dot{A}$ est maximal; on a donc $\dot{A}_{\dot{p}} = \dot{A}$ et $\dot{P}\dot{A}_{\dot{p}} = \dot{P}$. Si $A^* \supseteq \dot{A}$ et $\dot{P}A^* \cap \dot{A} = \dot{P}$, on aura $PA^* \cap A \subseteq (\dot{P}A^* \cap \dot{A}) \cap A = \dot{P} \cap A = P$. D'où $A^* = \dot{A}$. Ceci prouve que $\dot{A}$ est un anneau de valuation de D contenant A . Donc $a \in A$ vérifie $v(a) \geq 0$. Ainsi $v(a) > 0$ et $a \in A$ est équivalent à $a \in A \cap \dot{P} = P$. $\square$

3. Extensions valuées. Étant donné un anneau à division valué (D, v) et E un suranneau à division de D , on dira que E est une extension valuée de (D, v) s'il existe une valuation w de E telle que w restreinte à D est v .

Lemme 3.1. *Soit un anneau à division valué (D, v) d'anneau de valuation A_v et d'idéal maximal M_v . Soit E un suranneau à division de D et w une valuation sur E telle que A_v est un sous-anneau de l'anneau de valuation de w . Alors pour que A_v soit l'anneau de valuation de la restriction de w à D il faut et il suffit que*

$$\mathcal{P} = \{\alpha \in D \mid w(\alpha) > 0\}.$$

Théorème 3.2. (CRITÈRE DE KRASNER) *Soit E un suranneau à division de l'anneau à division D , v une valuation sur D dont A_v et M_v sont respectivement l'anneau et l'idéal maximal de la valuation v et C l'ensemble des commutateurs de E . Alors la valuation v de D est prolongeable en une valuation w de E si et seulement si $M_v A_v[C] \cap A_v = M_v$.*

Démonstration. Grâce au lemme précédent une valuation w de E prolonge une valuation v de D si et seulement si $[\alpha \in A_v]$ entraîne $[w(\alpha) \geq 0 \text{ et } (0 < w(\alpha) \text{ si et seulement si } \alpha \in M_v)]$. L'existence d'une telle valuation est vérifiée si et seulement si $M_v A_v[C] \cap A_v = M_v$. $\square$

Conséquence. Si E est commutatif, toute valuation de D est prolongeable à E .

4. Extensions algébriques. Étant donnée une extension E/D d'anneaux à division telle que D contient tous les commutateurs de E , un $\alpha \in E$ sera dit *algébrique* sur D s'il existe un polynôme $0 \neq f(X) \in D[X]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Dans le cas contraire α sera dit *transcendant* sur D . L'extension E/D sera dite une *extension algébrique* si tout $\alpha \in E$ est algébrique sur D . Soient Γ' un surgroupe de Γ , et $\gamma \in \Gamma'$; γ est dit *rationnel* sur Γ s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\gamma^n \in \Gamma$. De plus, Γ' est rationnel sur Γ si pour tout $\gamma \in \Gamma'$, γ est rationnel sur Γ .

Proposition 4.1. Soit E/D une extension algébrique valuée d'anneaux à division dont Γ_E (resp. Γ_D) est le groupe de valuation de E (resp. de D). Alors Γ_E est rationnel par rapport à Γ_D .

Conséquence. Soit E une extension d'anneaux à division D . On a :

- (1) si D est valué alors E l'est aussi;
- (2) si E est valuée et est algébrique sur D , alors $\text{rg}(\Gamma_E) = \text{rg}(\Gamma_D)$.

5. Un critère d'existence.

Théorème 5.1. (KRASNER) Soient D un sous-anneau à division d'un anneau à division E , A un sous-anneau de D , P un idéal premier de A et C l'ensemble des commutateurs de E . Alors pour qu'il existe une valuation de E au dessus de (A, P) (c'est-à-dire $[(a \in A \Rightarrow 0 \leq v(a))]$ et $[(a \in A \text{ et } 0 < v(a)) \Leftrightarrow a \in P]$) il faut et il suffit qu'il existe un suranneau maximal A' de $D(C)$ contenant $A[C]$ tel que $PA' \cap A = P$.

Démonstration. Dans la famille (E^*, A^*) , où $E^* \supset D$ et A^* est un anneau maximal de E^* contenant $iA_v[C]$ et $M_v A^* \cap A_v = M_v$, on considère l'ordre défini par $(E_1^*, A_1^*) < (E_2^*, A_2^*)$ si $A_1^* \subset A_2^*$. Cette famille est inductive. Soit $(\dot{E}, \dot{A})$ un élément maximal de cette famille. Alors $\dot{A}$ est l'anneau de valuation de $\dot{E}$, et pour la valuation correspondante on a :

$$[a \in A \Rightarrow 0 \leq v(a)] \quad \text{et} \quad [(a \in A \text{ et } 0 < v(a)) \Leftrightarrow a \in P].$$

Si $\dot{E} = E$ c'est fini. Sinon, pour tout $E^* \supset \dot{E}$, il n'existe aucune valuation de E^* prolongeant celle de $\dot{E}$, et on aura une contradiction avec le fait que $(\dot{E}, \dot{A})$ est maximal. Soit $t \in E \setminus \dot{E}$. Si t est algébrique sur D , il existe une valuation de $\dot{E}(t)$ prolongeant celle de $\dot{E}$; donc $\dot{E}(t) = \dot{E}$, ce qui est absurde. Soit t transcendant, et soit μ arbitraire dans $\Gamma(\dot{E})$; pour $f(t) = h(t)/g(t)$ dans $\dot{E}(t)$, on pose $w(f(t)) = v(h(t))/v(g(t))$, avec $v(h(t)) = \inf_i v(\alpha_i) \mu^i$ si $h(t) = \sum \alpha_i X^i \in \dot{E}[t]$. Alors w est une valuation de $\dot{E}(t)$ prolongeant la valuation v de $\dot{E}$. $\square$

English extended abstract. Let $(\Gamma, +, \leq)$ be a totally ordered group and let Γ_∞ designate the set $\Gamma \cup \{\infty\}$ provided with the same operation $+$ of Γ subject to the following conditions:

- (i) the element $\infty \notin \Gamma$,

- (ii) $\infty + \infty = a + \infty = \infty$ for all $a \in \Gamma$,
- (iii) $a \leq \infty$ for all $a \in \Gamma$.

Let D be a division ring and Γ a totally ordered additive group. A valuation v on D with values in Γ is an application $v : D \longrightarrow \Gamma_\infty$ such that for all $x, y \in D$, we have:

- (1) $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$,
- (2) $v(xy) = v(x) + v(y)$,
- (3) $v(x + y) \geq \inf(v(x), v(y))$.

If D is a division ring, a ring extension E of D is a ring E containing D , in which case we speak of the division ring extension E/D . Considering a valued division ring (D, v) and a division ring extension E/D , among the questions classically studied, let us mention the following ones:

- (1) Existence of valuations on E , which, once restricted, to D give v .
- (2) Characterization of the existence of such a valuation.
- (3) Number of these valuations on E , and, when they exist, their description.

The answers to these questions are different according to whether or not E is commutative. Indeed, if E is commutative, then such an extension always exists, and the number together with the description of these extensions are known. If E is not commutative, then the existence is not always guaranteed, though when it exists it is unique. The goal of this note is to describe a criterion for the existence of such an extension as established by M. Krasner (and known already in 1979) in the case of division ring extensions.

Theorem 3.2. (KRASNER CRITERION) *Let E/D be an extension of division rings and v a valuation on D for which A_v and M_v are respectively the valuation ring and the ideal of the valuation v . Designate by C_E the commutator subgroup of the multiplicative group E^* . Then the valuation v can be extended to a valuation on E if and only if $M_v A_v [C_E] \cap A_v = M_v$.*

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Krasner, *Introduction à la théorie des valuations*, Cours de DEA de M. Krasner, Faculté des Sciences de Paris VI (1979-80); rédigé par M. Boulagouaz.
2. P. M. Cohn et M. Mahdavi-Hezavehi, *Extensions of valuations on skew fields*, Ring theory, Antwerp, 1980 (Proc. Conf., Univ. Antwerp, Antwerp, 1980), Lecture Notes in Math., vol. 825, Springer, Berlin, 1980, pp. 28–41.

M. BOULAGOUAZ

UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES - SAÏS

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

B. P. 2202, FÈS, MAROC

COURRIEL : boulag@rocketmail.com