

SUR LE 2-GROUPE DE CLASSES DE CERTAINS CORPS DE NOMBRES

ABDELMALEK AZIZI

RÉSUMÉ. Soient $\mathbf{k}$ un corps de nombres et $\mathbf{K}$ une extension quadratique de $\mathbf{k}$. Le but de cet article est de donner une formule générale du 2-rang du groupe de classes de $\mathbf{K}$ relativement à $\mathbf{k}$ et de l'appliquer aux corps biquadratiques.

ABSTRACT. Let $\mathbf{k}$ be an algebraic number field and let $\mathbf{K}$ be a quadratic extension of $\mathbf{k}$. The purpose of the paper is to exhibit a general formula for the 2-rank of the class group of $\mathbf{K}$ with respect to $\mathbf{k}$ and to apply it to the case of biquadratic fields.

1. Introduction. Soient $\mathbf{k}$ un corps de nombres et $\mathbf{K}$ une extension galoisienne de degré un nombre premier p sur $\mathbf{k}$ et dont le groupe de Galois est noté par G . On désigne par

$A_{\mathbf{k}}$ (resp. $A_{\mathbf{K}}$) : l'anneau des entiers de $\mathbf{k}$ (resp. de $\mathbf{K}$);

C_0 (resp. C) : le p -groupe de classes au sens ordinaire de $\mathbf{k}$ (resp. de $\mathbf{K}$);

$E_{\mathbf{k}}$ (resp. $E_{\mathbf{K}}$) : le groupe des unités de $\mathbf{k}$ (resp. de $\mathbf{K}$);

$N_{K/k}$: la norme arithmétique de K/k ;

$j_{K/k}$: l'homomorphisme qui associe à un idéal I de $\mathbf{k}$ l'idéal IA_K de $\mathbf{K}$;

σ : un générateur de G ;

$H : C^{1-\sigma}$;

$C_0^j : j_{K/k}(C_0)$.

De plus, par définition, l'homomorphisme $\mathcal{N}$ associe à la classe d'un idéal I de $\mathbf{K}$ la classe de l'idéal $j_{K/k}(N_{K/k}(I))$.

On sait, d'après la théorie des corps de classes, que si l'extension $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ est ramifiée en au moins une place de $\mathbf{k}$, alors la norme $N_{K/k}$ est surjective et par suite on a

$$\mathcal{N}(C) = j_{K/k}(C_0) = C_0^j.$$

Soit C^G le sous-groupe de C des classes qui sont fixes par tout élément de G (dites classes ambiguës). Dans le cas où G est cyclique, le théorème suivant nous donne une formule pour calculer l'ordre du sous-groupe des classes ambiguës, connue sous le nom de *formule des classes ambiguës*.

Reçu le 10 octobre 2003 et, sous forme définitive, le 22 janvier 2005.

Théorème 1.1. *On suppose que le groupe G est cyclique de degré un nombre premier p . Alors on a*

$$|C^G| = |C_0| \frac{\prod_{P \in S} e(P)}{[\mathbf{K} : \mathbf{k}][E_{\mathbf{k}} : E_{\mathbf{k}} \cap N_{K/k}(\mathbf{K}^*)]},$$

où S est l'ensemble des idéaux premiers de $\mathbf{k}$ ramifiés dans $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ (finis et infinis) et $e(P)$ est l'indice de ramification de l'idéal P de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{K}/\mathbf{k}$.

Démonstration. Voir [7]. $\square$

Le théorème suivant de Hasse nous donne l'ordre du sous-groupe des classes ambiguës en fonction d'autres invariants et est équivalent au théorème précédent.

Théorème 1.2. *On suppose que l'extension $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ est cyclique de degré un nombre premier p . Soient C^G le sous-groupe de C des classes ambiguës, t le nombre des idéaux premiers de $\mathbf{k}$ ramifiés dans $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ (finis et infinis), $V_{\mathbf{k}}$ l'ensemble des unités de $E_{\mathbf{k}}$ qui sont normes d'éléments de $\mathbf{K}$, q^* tel que $[V_{\mathbf{k}} : E_{\mathbf{k}}^p] = p^{q^*}$ et r le rang de la partie libre de $E_{\mathbf{k}}$. Alors l'ordre de C^G est égal à*

$$h_0 p^{t+q^*-(r+1+c)} = h_0 p^{r_d},$$

où h_0 est la p -partie du nombre de classes de $\mathbf{k}$ et $c = 1$ si $\mathbf{k}$ contient une racine primitive p -ième de l'unité et $c = 0$ sinon.

Démonstration. En utilisant la formule des classes ambiguës, on trouve facilement ce résultat. En effet, il suffit de voir que

$$[E_{\mathbf{k}} : E_{\mathbf{k}} \cap N_{K/k}(\mathbf{K}^*)] = \frac{|E_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}}^p|}{|E_{\mathbf{k}} \cap N_{K/k}(\mathbf{K}^*)/E_{\mathbf{k}}^p|}.$$

Comme $|E_{\mathbf{k}}/E_{\mathbf{k}}^p| = p^{c+r}$, alors

$$[E_{\mathbf{k}} : E_{\mathbf{k}} \cap N_{K/k}(\mathbf{K}^*)]^{-1} = p^{q^*} \times p^{-(r+c)}.$$

Par suite, on a le résultat. $\square$

On trouve une autre preuve de ce résultat dans [5], paragraphe 13, Satz 13.

Corollaire 1.3. *On suppose que $\mathbf{K}$ est un corps CM et que $\mathbf{k}$ est son sous-corps réel maximal; alors l'ordre de C^G est égal à $h_0 \times 2^{t_0+q^*-1}$ où t_0 est le nombre des idéaux premiers finis ramifiés dans $\mathbf{K}/\mathbf{k}$.*

Remarques 1.4. (1) On trouve dans [7] une formule des classes ambiguës au sens restreint. Pour l'obtenir, il suffit de remplacer, dans la formule du théorème 1, le groupe des unités par celui des unités totalement positives et l'ensemble des idéaux premiers ramifiés par l'ensemble des idéaux premiers ramifiés finis seulement.

(2) L'ordre du groupe des classes fortement ambiguës est obtenu de la formule du Théorème 1.2, en remplaçant q^* par q défini par $[V'_{\mathbf{k}} : E_{\mathbf{k}}^p] = p^q$ où $V'_{\mathbf{k}}$ est l'ensemble des unités de $E_{\mathbf{k}}$ qui sont normes d'éléments de $E_{\mathbf{K}}$.

2. Rang du groupe de classes de certains corps de nombres. Soient p un nombre premier et $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ une extension cyclique de degré p . Les notations sont les mêmes que dans la section précédente.

Lemme 2.1. *On suppose que $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ est ramifié en au moins une place. Soit $H = C^{1-\sigma}$ où σ est un générateur du groupe de Galois G de $\mathbf{K}/\mathbf{k}$. Alors on a*

$$C^p H = C_0^j H.$$

Démonstration. Soit σ un générateur du groupe de Galois G de $\mathbf{K}/\mathbf{k}$. Soit $c \in C$, alors

$$c^p = c^{(1-\sigma)+(1-\sigma^2)+\dots+(1-\sigma^{p-1})} \times c^{(1+\sigma+\sigma^2+\dots+\sigma^{p-1})}.$$

Comme

$$c^{(1-\sigma)+(1-\sigma^2)+\dots+(1-\sigma^{p-1})} \in H,$$

alors $c^p \in j_{\mathbf{K}/\mathbf{k}}(C_0)H = C_0^j H$ et $N_{\mathbf{K}/\mathbf{k}}(c) \in C^p H$. On sait que, dans notre cas, $N_{\mathbf{K}/\mathbf{k}}(C) = j_{\mathbf{K}/\mathbf{k}}(C_0)$. Par suite, on a $C^p H = j_{\mathbf{K}/\mathbf{k}}(C_0)H = C_0^j H$. $\square$

Remarque 2.2. On pose $C^{p-N_{\mathbf{K}/\mathbf{k}}} = H_N$. On vérifie facilement que

$$C^p H_N = C^p C_0^j = C_0^j H_N.$$

Si $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ est une extension quadratique, alors $H = H_N$ et

$$C^2 H = C^2 C_0^j = C_0^j H.$$

Théorème 2.3. *On suppose que $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ est une extension quadratique ramifiée en au moins une place. Soit C_{20}^j le sous-groupe de C_0^j des éléments dont l'ordre est un diviseur de 2. Alors le 2-rang de C est égal à*

$$r_d + s_0^* + r_0^* + \alpha - \lambda$$

où

$$\begin{cases} |C_0|2^{r_d} \text{ est l'ordre de } C/H; \\ 2^{s_0^*} = [C_0^j : C^2 \cap C_0^j]; \\ 2^{r_0^*} = [C_0^j : (C_0^j)^2]; \\ 2^\alpha = |\text{Ker}(j_{\mathbf{K}/\mathbf{k}})|, \quad 2^\lambda = [C_{20}^j : C_0^j \cap H]. \end{cases}$$

Démonstration. D'après la remarque précédente, on a

$$C^2 H = C^2 C_0^j = C_0^j H.$$

Soit r le 2-rang de C ; alors $2^r = [C : C^2]$. D'une part, on a

$$\begin{aligned} [C : C^2] &= [C : C_0^j H][C^2 H : C^2] = \frac{[C : H]}{[C_0^j H : H]} [C^2 H : C^2]; \\ [C_0^j H : H] &= [C_0^j : C_0^j \cap H]; \\ [C : H] &= |C_0| 2^{r_d}; \\ 2^{s_0^*} &= [C^2 H : C^2] = [C^2 C_0^j : C^2] = [C_0^j : C^2 \cap C_0^j]. \end{aligned}$$

D'autre part, si on désigne par C_{20}^j le sous-groupe de C_0^j des éléments dont l'ordre est un diviseur de 2, alors on a :

- $|C_0| = |C_0^j| |\text{Ker}(j_{\mathbf{K}/\mathbf{k}})|$.
- $[C_0^j : C_{20}^j] = |C_0^{j^2}|$ (ceci résulte de l'application du premier Théorème d'isomorphisme à l'endomorphisme de C_0^j qui associe à un élément b l'élément b^2). Par suite, on a

$$|C_{20}^j| = [C_0^j : (C_0^j)^2] = 2^{r_0^*}.$$

Ainsi,

$$[C_0^j : C_{20}^j] = \frac{|C_0|}{2^{r_0^*} 2^\alpha}$$

où $2^\alpha = |\text{Ker}(j_{\mathbf{K}/\mathbf{k}})|$.

- Soit σ un générateur du groupe de Galois G de $\mathbf{K}/\mathbf{k}$. Alors C_{20}^j contient $C_0^j \cap H$, car un élément de C_0^j est laissé fixe par σ tandis que l'image d'un élément b de H par σ est égale à b^{-1} . On pose alors $[C_{20}^j : C_0^j \cap H] = 2^\lambda$. Alors on a

$$[C_0^j H : H] = [C_0^j : C_0^j \cap H] = [C_0^j : C_{20}^j] [C_{20}^j : C_0^j \cap H] = \frac{|C_0|}{2^{r_0^*} 2^\alpha} 2^\lambda.$$

Par conséquent, on a

$$2^r = 2^{r_d + s_0^* + r_0^* + \alpha - \lambda}.$$

Ainsi on a la valeur de r . $\square$

Remarque 2.4. La formule du 2-rang de $\mathbf{K}$ est une généralisation de celle donnée par Hasse dans [6] et corrigée par Lemmermeyer dans [9], dans le cas où $\mathbf{K}$ est un corps CM et $\mathbf{k}$ est le sous-corps réel maximal de $\mathbf{K}$.

3. Applications aux corps biquadratiques. Soit $\mathbf{K}$ un corps biquadratique. On note K^* le corps de genres de $\mathbf{K}$ et $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{K}$. On suppose que C_2 , le 2-groupe de classes de $\mathbf{K}$, est d'ordre 4. On distingue les trois cas suivants :

$$(1) K^* = \mathbf{K}; \quad (2) K^* = K_2^{(1)}; \quad (3) [K^* : \mathbf{K}] = 2.$$

3.1. Cas où $K^* = \mathbf{K}$. Soit G un 2-groupe fini et $G' = [G, G]$ le groupe des commutateurs de G . Si G/G' est de type (2,2), alors G' est cyclique. En particulier, si on prend $G = \text{Gal}(K_2^{(1)}/\mathbf{Q})$, alors $G/G' = \text{Gal}(K^*/\mathbf{Q})$ et $G' = \text{Gal}(K_2^{(1)}/K^*)$. En effet, G/G' est le plus grand quotient abélien de G . Par conséquent, si $K^* = \mathbf{K}$, alors G/G' est de type (2,2) et par suite G' est cyclique. Ainsi C_2 est isomorphe à $\text{Gal}(K_2^{(1)}/K)$.

3.2. Cas où $K^* = K_2^{(1)}$. On a que C_2 est isomorphe à $\text{Gal}(K_2^{(1)}/K) = \text{Gal}(K^*/K)$. Comme $K^*/\mathbf{Q}$ est une extension abélienne de type (2, 2, 2, 2) et comme l'ordre de C_2 est 4, alors C_2 est de type (2, 2).

3.3. Cas où $[K^* : \mathbf{K}] = 2$.

3.3.1. Si $\mathbf{K}$ contient un sous-corps $\mathbf{k}$ de nombre de classes impair, alors en appliquant le théorème 2.3 à l'extension $\mathbf{K}/\mathbf{k}$, on trouve que le rang du 2-groupe de classes de $\mathbf{K}$ est égal à r_d .

3.3.2. Supposons que tous les sous-corps $\mathbf{k}$ de $\mathbf{K}$ ont un 2-nombre de classes divisible par 2. Alors en appliquant le théorème 2.3 à une extension $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ bien choisie, on arrive à trouver les corps K qui sont de type $(2, 2)$ et ceux qui sont cycliques. Dans le cas où $\mathbf{K}$ contient un sous-corps $\mathbf{k}$ de nombre de classes impair, on a déterminé :

- ▷ Tous les corps $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$ de type $(2, 2)$, ainsi que ceux qui sont cycliques.
- ▷ Tous les corps $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2})$ de type $(2, 2)$, ainsi que ceux qui sont cycliques.
- ▷ Tous les corps réels $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{2})$ de type $(2, 2)$, ainsi que ceux qui sont cycliques.
- ▷ Tous les corps réels $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{p})$ où p est un premier congru à 1 modulo 4, qui sont de type $(2, 2)$, ainsi que ceux qui sont cycliques.

Dans le cas contraire, on exhibe deux familles d'exemples.

Première famille d'exemples. Soit $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-p_0})$ où p_0 est un premier congru à 5 modulo 8, $d = p_0 p$, $p \equiv 5 \pmod{8}$ et $\left(\frac{p}{p_0}\right) = -1$, $\mathbf{k} = \mathbf{Q}(\sqrt{-p_0})$ et l la partie impaire du nombre de classes de $\mathbf{K}$. En appliquant le théorème 2.3 à l'extension $\mathbf{K}/\mathbf{k}$, on trouve que $t = 1$, $q^* = 1$, $r = 0$ et $c = 1$; par suite $r_d = 0$. De plus, soit I l'idéal au-dessus de 2 dans $\mathbf{k}$. On vérifie facilement d'une part que la classe de l'idéal I^l est d'ordre 2, que I^l ne capitule pas dans $\mathbf{K}$ et que I^l se décompose dans $\mathbf{K}$ en produit de deux idéaux. Ainsi $(I^l) = P_1^l P_2^l$. D'autre part, P_1^l et P_2^l sont conjugués; donc leurs classes ont un même ordre et elles sont différentes. Donc cet ordre ne peut être que 2. Par suite, on a $s_0 = 1$, $r_0^* = 1$, $\alpha = 0$ et $\lambda = 0$. On conclut alors que le 2-rang de la 2-partie du groupe de classes de $\mathbf{K}$ est égal à 2.

Deuxième famille d'exemples. Soit $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-p})$ où p est un premier congru à 5 modulo 8, $d = 2pq$, $q \equiv 3 \pmod{8}$ et $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$. Dans ce cas, le 2-rang de la 2-partie du groupe de classes de $\mathbf{K}$ est aussi égal à 2. En effet, $r_d = 1$, $s_0 = 1$, $r_0^* = 1$, $\alpha = 1$ et $\lambda = 0$. Par suite, le rang est égal à 2. De la même façon que dans l'exemple précédent, on trouve que C_0 est engendré par la classe de l'idéal I . On va montrer que I capitule dans $\mathbf{K}$. Pour cela, on montre que -2ε est un carré dans $\mathbf{K}$ où ε est l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{2pq})$. Soit $\varepsilon = r + s\sqrt{2pq}$, où r et $s \in \mathbf{Z}$. On a $r^2 - 2pqs^2 = 1$, c'est-à-dire $(r+1)(r-1) = 2pqs^2$. De plus, le plus grand diviseur commun de $(r+1)$ et $(r-1)$ divise 2. Il s'ensuit qu'il existe $i, j, k \in \{0, 1\}$ tels que $2^i p^j q^k (r+1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$.

Supposons que $\sqrt{(r+1)}$ appartient à $\mathbf{N}$. Alors il existe deux entiers n et m tels que

$$\begin{cases} r+1 = n^2, \\ r-1 = 2pqm^2. \end{cases}$$

Ceci implique que $2 = n^2 - 2pqm^2$ ou encore $2p \equiv (pn)^2 \pmod{q}$. Donc

$$\left(\frac{2}{q}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) = +1,$$

d'où une contradiction.

On a la même contradiction si $2pq\sqrt{(r+1)}$ appartient à $\mathbf{N}$.

Supposons que $\sqrt{2(r+1)}$ appartient à $\mathbf{N}$. Alors il existe deux entiers n et m tels que

$$\begin{cases} r+1 = 2n^2, \\ r-1 = pqm^2. \end{cases}$$

Ceci entraîne que $2\varepsilon = (n\sqrt{2} + m\sqrt{pq})^2$, et par suite $\sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{2}(2n + m\sqrt{2pq}) \in \mathbf{Q}(\sqrt{2pq})$. Ceci contredit le fait que ε soit l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{2pq})$.

Il en est de même si $pq(r+1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$.

Montrons que $p(r+1)$ n'est pas un carré dans $\mathbf{N}$. Sinon, il existe $n, m \in \mathbf{N}$ tels que

$$\begin{cases} r+1 = pn^2, \\ r-1 = 2qm^2. \end{cases}$$

Ceci implique que $2 = pn^2 - 2qm^2$ ou encore $2p \equiv (pn)^2$ modulo q . Donc

$$\left(\frac{2p}{q}\right) = -\left(\frac{p}{q}\right) = +1,$$

d'où une contradiction.

Montrons que $q(r+1)$ n'est pas un carré dans $\mathbf{N}$. Sinon, il existe $n, m \in \mathbf{N}$ tels que

$$\begin{cases} r+1 = qn^2, \\ r-1 = 2pm^2. \end{cases}$$

D'où $2 = qn^2 - 2pm^2$ et par suite $-4p \equiv (2pm)^2$ modulo q , c'est-à-dire

$$\left(\frac{-4p}{q}\right) = -\left(\frac{p}{q}\right) = +1,$$

ce qui est absurde.

De la même façon, on montre que $2p(r+1)$ n'est pas un carré dans $\mathbf{N}$.

Supposons que $2q(r+1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$. Donc il existe $n, m \in \mathbf{N}$ tels que

$$\begin{cases} r+1 = 2qn^2, \\ r-1 = pm^2. \end{cases}$$

Ceci entraîne que $2\varepsilon = (n\sqrt{2q} + m\sqrt{p})^2$. Par suite, $-2\varepsilon = (n\sqrt{-2q} + m\sqrt{-p})^2$. Ainsi,

$$I^2 A_{\mathbf{K}} = 2A_{\mathbf{K}} = (n\sqrt{-2q} + m\sqrt{-p})^2 A_{\mathbf{K}}.$$

D'où $IA_{\mathbf{K}} = (n\sqrt{-2q} + m\sqrt{-p})A_{\mathbf{K}}$ et donc I capitule dans $\mathbf{K}$.

4. Remarques finales. Pour construire le 2-groupe de classes d'un corps biquadratique de type $(2, 2)$, on détermine les classes non triviales de $\mathbf{K}$ provenant des idéaux ramifiés et si ses classes n'engendrent pas le 2-groupe de classes de $\mathbf{K}$, on complète par les classes des idéaux au-dessus des premiers de $\mathbf{Q}$ qui se décomposent complètement

dans $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ et qui restent inertes dans une extension quadratique de $\mathbf{K}$, incluse dans le corps de genres de $\mathbf{K}$.

Le théorème 2.3 sert aussi à déterminer les différents invariants qui apparaissent dans la formule du rang, si le rang est déterminé par une autre méthode. Par exemple, si le corps biquadratique est le 2-corps de classes de Hilbert d'un corps quadratique de type $(2, 2)$, alors son 2-groupe de classes est cyclique (d'après la théorie des corps de classes de Hilbert).

Soit $\mathbf{k}$ un corps quadratique dont le corps de genres $\mathbf{k}^*$ est de degré 2 sur $\mathbf{k}$. Soient $\mathbf{k}_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert du 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{k}$, et G le groupe de Galois de $\mathbf{k}_2^{(2)}/\mathbf{Q}$. Alors le groupe de Galois de $\mathbf{k}^*/\mathbf{Q}$ est isomorphe à G/G' et donc il est de type $(2, 2)$. De plus, G' est le groupe de Galois de $\mathbf{k}_2^{(2)}/\mathbf{k}^*$. Or on sait que si G/G' est de type $(2, 2)$, alors G' est cyclique. Par suite, le 2-groupe de classes de $\mathbf{k}^*$ est cyclique.

English extended abstract. Let $\mathbf{k}$ be a number field, $\mathbf{K}$ be a quadratic extension of $\mathbf{k}$ and G be its Galois group. We use the following notations:

$A_{\mathbf{k}}$ (resp. $A_{\mathbf{K}}$) : the ring of integers of $\mathbf{k}$ (resp. of $\mathbf{K}$),

C_0 (resp. C) : the 2-class group of $\mathbf{k}$ (resp. of $\mathbf{K}$),

$E_{\mathbf{k}}$ (resp. $E_{\mathbf{K}}$) : the unit's group of $\mathbf{k}$ (resp. of $\mathbf{K}$),

$N_{K/k}$: the arithmetic norm of K/k ,

$j_{K/k}$: the map that associates to an ideal I of $\mathbf{k}$ the ideal IA_K of $\mathbf{K}$,

$\mathcal{N}$: the map associating to the class of an ideal I of $\mathbf{K}$,
the class of the ideal $j_{K/k}(N_{K/k}(I))$ in $\mathbf{K}$,

σ : a generator of G ,

H : the group $C^{1-\sigma}$,

C_0^j : the ideal $j_{K/k}(C_0)$.

One knows, by class field theory, that if the extension $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ is ramified in at least one place of $\mathbf{k}$, then the norm $N_{K/k}$ is surjective and one has

$$\mathcal{N}(C) = j_{K/k}(C_0) = C_0^j.$$

Let C^G be the subgroup of C of the classes that are fixed by every element of G (ambiguous classes). In this paper, we give a summary of the useful results to determine the class group of number fields and we prove the following theorem (the result appears in [9] in the case where $\mathbf{K}$ is an imaginary number field and $\mathbf{k}$ is the maximal real subfield of $\mathbf{K}$).

Theorem 2.3. *Let $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ be a quadratic extension ramified in at least one place. If C_{20}^j is the subgroup of C_0^j generated by the classes that are of order 2, then the 2-rank of C is equal to*

$$r_d + s_0^* + r_0^* + \alpha - \lambda$$

where

$$\begin{cases} |C_0|2^{r_d} \text{ is the order of } C/H, \\ 2^{s_0^*} = [C_0^j : C^2 \cap C_0^j], \\ 2^{r_0^*} = [C_0^j : (C_0^j)^2], \\ 2^\alpha = |\text{Ker}(j_{\mathbf{k}/\mathbf{k}})|, \\ 2^\lambda = [C_{20}^j : C_0^j \cap HS]. \end{cases}$$

With the help of this theorem, we determine the 2-class group structure of some families of biquadratic fields.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Azizi, *Sur le 2-groupe de classes d'idéaux de $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$* , Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **48** (1999), 71–92.
2. A. Azizi, *Unités de certains corps de nombres imaginaires et abéliens sur $\mathbf{Q}$* , Ann. Sci. Math. Québec **23** (1999); no. 1, 15–21.
3. A. Azizi, *Sur la capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbf{Q}(\sqrt{2pq}, i)$ où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod{4}$* , Acta Arith. **94** (2000); no. 4, 383–399.
4. A. Azizi et A. Mouhib, *Sur le rang du 2-groupe de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ où $m = 2$ ou un premier $p \equiv 1 \pmod{4}$* , Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001); no. 7, 2741–2752.
5. G. Gras, *Sur les l -classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier l* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **23** (1973); no. 3, 1–48.
6. H. Hasse, *Zahlbericht*, Dritte berichtigte Auflage, vol. 3, Phisica-Verlag, Wurzburg-Wien, 1970.
7. H. Hasse, *Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper*, Akademie-Verlag, Berlin, 1952.
8. R. Kučera, *On the parity of the class number of a biquadratic field*, J. Number Theory **52** (1995), 43–52.
9. F. Lemmermeyer, *On 2-class field towers of imaginary quadratic number fields*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 261–272.
10. T. M. McCall, C.J. Parry and R.R. Ranalli, *Imaginary bicyclic biquadratic fields with cyclic 2-class group*, J. Number Theory **53** (1995), 88–99.
11. T. M. McCall, C.J. Parry and R.R. Ranalli, *The 2-rank of the class group of imaginary bicyclic biquadratic fields*, Canad. J. Math. **49** (1997); no. 2, 283–300.

A. AZIZI

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ MOHAMED 1^{er}

FACULTÉ DES SCIENCES

B. P. 524, OUJDA, MAROC.

COURRIEL : azizi@sciences.univ-oujda.ac.ma