

AUTOMORPHISMES D'UN GROUPE ABÉLIEN SE RELEVANT À TOUTE PRÉ-IMAGE HOMOMORPHE

SEDDIK ABDELALIM ET HASSANE ESSANNOUNI

RÉSUMÉ. Dans un groupe quelconque G , tout automorphisme intérieur possède la propriété de s'étendre en un automorphisme de tout groupe contenant G comme sous-groupe. P. Schupp [4] a montré que dans la catégorie de tous les groupes, la propriété de l'extension caractérise les automorphismes intérieurs. M.R. Pettet [3] donne une démonstration plus simple du résultat de Schupp et montre par la même occasion que les automorphismes intérieurs d'un groupe G sont aussi caractérisés par la propriété duale de se relever à tout groupe dont G est une image homomorphe. Dans [1] sont caractérisés les automorphismes ayant la propriété de l'extension dans la catégorie des groupes abéliens. Dans [2] sont caractérisés les automorphismes ayant la propriété du relèvement dans la catégorie des p -groupes abéliens, mais la caractérisation dans la catégorie de tous les groupes abéliens est encore un problème ouvert. Dans le but d'approcher ce problème, nous étudions dans cet article deux propriétés moins fortes que celle du relèvement.

ABSTRACT. In [2] the automorphisms having the lifting property in the category of the abelian p -groups are characterized. But the problem remains open in the category of the abelian groups. For that we study some properties which are weaker than the lifting property, for approaching this problem.

1. Introduction. Dans un groupe quelconque G , tout automorphisme intérieur possède la propriété de s'étendre en un automorphisme de tout groupe contenant G comme sous-groupe. P. Schupp [8] a montré que dans la catégorie de tous les groupes, la propriété de l'extension caractérise les automorphismes intérieurs. M. R. Pettet [7] donne une démonstration plus simple du résultat de Schupp et montre par la même occasion que les automorphismes intérieurs d'un groupe G sont aussi caractérisés par la propriété duale de se relever à tout groupe dont G est une image homomorphe. Dans [1] sont caractérisés les automorphismes ayant la propriété de l'extension dans la catégorie des groupes abéliens. Dans [2] sont caractérisés les automorphismes ayant la propriété du relèvement dans la catégorie des p -groupes abéliens, mais la caractérisation dans la catégorie de tous les groupes abéliens est encore un problème ouvert. Dans le but d'approcher ce problème, nous étudions dans cet article deux propriétés moins fortes que celles du relèvement.

Reçu le 18 juin 2003 et, sous forme définitive, le 31 janvier 2005.

4 Automorphismes d'un groupe abélien se relevant à toute pré-image homomorphe

Pour tout groupe abélien A , définissons le groupe A^1 par

$$A^1 = \{x : x \in nA \text{ pour tout } n \geq 1\}.$$

Soit Γ une classe de groupes abéliens. Pour un groupe donné $A \in \Gamma$, considérons les propriétés suivantes :

- (L) Pour tout $B \in \Gamma$ et tout épimorphisme $s : B \longrightarrow A$ il existe $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(B)$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{s} & A \\ \tilde{\alpha} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{s} & A \end{array}$$

est commutatif.

- (L') Pour tout $B \in \Gamma$ et tout épimorphisme $s : B \longrightarrow A$, si la restriction de s à B^1 est un isomorphisme entre B^1 et A^1 , alors il existe $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(B)$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{s} & A \\ \tilde{\alpha} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{s} & A \end{array}$$

est commutatif.

- (L'') Pour tout $B \in \Gamma$ et tout épimorphisme $s : B \longrightarrow A$, s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que la restriction de s à mB est un isomorphisme entre mB et mA , alors il existe $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(B)$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{s} & A \\ \tilde{\alpha} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{s} & A \end{array}$$

est commutatif.

Dans toute la suite, le mot *groupe* signifie *groupe abélien* et nous adoptons les notations de la référence [6].

2. Caractérisation des automorphismes vérifiant (L').

Lemme 2.1. Soient A un p -groupe (p nombre premier) et $\alpha \in \text{Aut}(A)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) α vérifie (L') dans la classe des p -groupes;
- (ii) $\alpha = \pi \text{id}_A + \rho$ où π est un nombre p -adique inversible et $\rho \in \text{Hom}(A, A^1)$.

Démonstration. (i) $\implies$ (ii). On peut supposer A non divisible. Soit $x \in A$ tel que $\langle x \rangle$ est un facteur direct de A . Posons $A = \langle x \rangle \oplus A'$ et $\alpha(x) = kx + a'$ où $a' \in A'$ et $k \in \mathbb{Z}$. Supposons $a' \notin (A')^1$. Soit B un sous-groupe de base de A' . Alors

$$B = \bigoplus_{n \geq 1} B_n \quad \text{avec} \quad B_n = \bigoplus_{i \in I_n} \langle x_{n,i} \rangle \quad \text{et} \quad o\langle x_{n,i} \rangle = p^n, \quad \text{pour tout } i \in I_n.$$

Posons $B_n^* = \bigoplus_{j>n} B_j$; alors pour tout $n \geq 1$,

$$A' = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n \oplus A_n \text{ où } A_n = B_n^* + p^n A'$$

(voir [5], page 138). Il existe $m \geq 1$ tel que $a' = b_1 + \cdots + b_m + a_m$ où $b_i \in B_i$, $a_m \in A_m$ et $b_m \neq 0$. Considérons un groupe C tel que $C = \bigoplus_{i \in I_m} \langle y_i \rangle$ où $o\langle y_i \rangle = p^{r+m}$ et $o(x) = p^r$. Soit

$$G = B_1 \oplus B_2 \cdots \oplus B_{m-1} \oplus C \oplus A_m \oplus \langle x \rangle.$$

On définit un épimorphisme $s : G \longrightarrow A$ en posant

$$s(b_i) = b_i, b_i \in B_i, \quad s(y_i) = x_{m,i} \quad \forall i \in I_m, \quad s(a_m) = a_m, a_m \in A_m, \quad s(x) = x.$$

Il est clair que la restriction de s est un isomorphisme entre G^1 et A^1 . Par hypothèse, $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(G)$ est tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{s} & A \\ \tilde{\alpha} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ G & \xrightarrow{s} & A \end{array}$$

est commutatif. Posons $\tilde{\alpha}(x) = k'x + b'_1 + \cdots + b'_{m-1} + c + a'_m$ où $b'_i \in B_i$ pour tout $0 < i < m$, $a'_m \in A_m$, $c \in C$ et $k' \in \mathbb{Z}$. Comme $p^r x = 0$, alors $c = p^m c'$, $c' \in C$; ainsi

$$s\tilde{\alpha}(x) = b'_1 + \cdots + b'_{m-1} + a'_m + k'x = \alpha s(x) = b_1 + \cdots + b_m + a_m + kx,$$

ceci impliquant $b_m = 0$, ce qui est absurde. Donc $a' \in A^1$. On vient de prouver que si $\langle x \rangle$ est facteur direct de A , alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha(x) - kx \in A^1$. Considérons à présent B comme sous-groupe de base de A . Pour tout $n \geq 1$ avec $B_n \neq 0$, il existe $k_n \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha(b) - k_n b \in A^1$ pour tout $b \in B_n$. En effet, si $i, j \in I_n$ avec $i \neq j$, on peut écrire $\langle x_{n,i} \rangle \oplus F = A$ avec $x_{n,j} \in F$. On a alors $\langle x_{n,i} + x_{n,j} \rangle \oplus F = A$. D'après ce qui précède, il existe $k_{n,i}, k_{n,j}, l \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\alpha(x_{n,i}) - k_{n,i} x_{n,i} \in A^1, \quad \alpha(x_{n,j}) - k_{n,j} x_{n,j} \in A^1 \quad \text{et} \quad \alpha(x_{n,i} + x_{n,j}) - l(x_{n,i} + x_{n,j}) \in A^1,$$

ce qui implique $p^n \mid (k_{n,i} - k_{n,j})$. Par la même procédure, on peut montrer que si $n > m$, $B_m \neq 0$, $B_n \neq 0$, alors $p^m \mid (k_n - k_m)$. Soit π le nombre p -adique défini par la suite $(k_n)_{n \geq 0}$ (avec $k_0 = 0$ et $k_n = k_{n-1}$ si $B_n = 0$). Alors $\alpha(b) - \pi b \in A^1$, pour tout $b \in B$. Soit $x \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il existe $b \in B$ et $a \in A$ tels que

$$x = b + p^n a \quad \text{et} \quad \alpha(x) - \pi x = \alpha(b) - \pi b + p^n(\alpha(a) - \pi a) \in p^n A.$$

Donc $\alpha(x) - \pi x \in A^1$. Il existe alors $\rho \in \text{Hom}(A, A^1)$ tel que $\alpha = \pi \text{id}_A + \rho$, et comme $pA \neq A$, alors π est inversible.

(ii) $\implies$ (i) Supposons $\alpha = \pi \text{id}_A + \rho$ avec π un nombre p -adique inversible et $\rho \in \text{Hom}(A, A^1)$. Soit $G \xrightarrow{s} A \longrightarrow 0$ une suite exacte avec $s_0 \in \text{Isom}(G^1, A^1)$ où $s_0 = s|_{G^1}$. Si on pose, pour $g \in G$, $\tilde{\alpha}(g) = \pi g + s_0^{-1}(\rho s(g))$, alors il est facile de voir que $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(G)$ et $s\tilde{\alpha} = \alpha s$. $\square$

Corollaire 2.2. *Si A est un groupe de torsion et $\alpha \in \text{Aut}(A)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) α vérifie (L') dans la classe des groupes de torsion;
- (ii) la restriction de α à toute p -composante A_p de A est de la forme $\pi \text{id}_{A_p} + \rho$ où π est un nombre p -adique inversible et $\rho \in \text{Hom}(A_p, A_p^1)$.

Proposition 2.3. *Si A est un groupe de torsion et α est un automorphisme de A , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) α vérifie (L') dans la classe de tous les groupes abéliens;
- (ii) $\alpha = \text{id} + \rho$ ou $\alpha = -\text{id} + \rho$ avec $\rho \in \text{Hom}(A, A^1)$.

Démonstration. (i) $\implies$ (ii). Soit p un nombre premier, A_p la p -composante de A et α_p la restriction de α à A_p . D'après le corollaire 2.2, $\alpha_p = \pi \text{id}_{A_p} + \rho$ où π est un nombre p -adique inversible et $\rho \in \text{Hom}(A_p, A_p^1)$. Soit $x \in A_p$ tel que $\langle x \rangle$ est un facteur direct de A_p ; alors on peut écrire $A = \langle x \rangle \oplus C$. En considérant l'épimorphisme $s : \mathbb{Z} \oplus C \longrightarrow A$ défini par $s(m, c) = mx + c$, on peut prouver que $\alpha_p(x) = \varepsilon x + \rho(x)$ avec $\varepsilon \in \{1, -1\}$. En considérant un sous-groupe de base de A_p et en suivant la même démarche que dans la preuve du lemme 2.1, on peut montrer que $\alpha_p = \text{id} + \rho$ ou $\alpha_p = -\text{id} + \rho$.

Supposons qu'il existe deux nombres premiers p et q ($p \neq q$) tels que

$$\begin{cases} (\alpha_p - \text{id})(A_p) \subseteq A_p^1, & (\alpha_p + \text{id})(A_p) \not\subseteq A_p^1, \\ (\alpha_q + \text{id})(A_q) \subseteq A_q^1, & (\alpha_q - \text{id})(A_q) \not\subseteq A_q^1. \end{cases}$$

Soit $M = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle$ un sous-groupe de base de A_p et $N = \bigoplus_{j \in J} \langle y_j \rangle$ un sous-groupe de base de A_q . Soient $i \in I$ et $j \in J$. Alors $\langle x_i + y_j \rangle$ est un facteur direct de A , c'est-à-dire $\langle x_i + y_j \rangle \oplus H = A$. En considérant l'application $s : \mathbb{Z} \oplus H \longrightarrow A$ définie par $s(m + h) = m(x_i + y_j) + h$, on peut voir que $\alpha(x_i + y_j) - \varepsilon(x_i + y_j) \in H$ avec $\varepsilon \in \{1, -1\}$ et par la suite, $\alpha(x_i - y_j) = \varepsilon(x_i + y_j)$. Supposons par exemple que $p \neq 2$; alors on trouve $2y_j = 0$ pour tout $j \in J$. Donc $q = 2$ et $2N = 0$; ainsi

$$N \oplus 2A_q = A_q, \quad A_q^1 = 2A_q, \quad \text{et} \quad (\alpha_q - \text{id})(A_q) \subset (\alpha_q + \text{id})(A_q) + 2A_q \subseteq A_q^1,$$

ce qui est absurde. Finalement, $\alpha = \text{id} + \rho$ ou $\alpha = -\text{id} + \rho$ avec $\rho \in \text{Hom}(A, A^1)$.

(ii) $\implies$ (i). Soit $B \xrightarrow{s} A \longrightarrow 0$ une suite exacte avec $s_0 \in \text{Isom}(B^1, A^1)$ où $s_0 = s|_{B^1}$. Si on pose $\tilde{\alpha} = \varepsilon \text{id} + s_0^{-1} \rho s$, si $\alpha = \varepsilon \text{id} + \rho$ avec $\varepsilon \in \{1, -1\}$, $\rho \in \text{Hom}(A, A^1)$, on peut voir facilement que $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(B)$ et que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{s} & A \\ \tilde{\alpha} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{s} & A \end{array}$$

est commutatif. $\square$

3. Caractérisation des automorphismes vérifiant (L').

Lemme 3.1. *Supposons que A est un p -groupe et α un automorphisme de A . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) α vérifie (L') dans la classe des p -groupes;
- (ii) $\alpha = \pi \text{id}_A + \rho$ où π est un nombre p -adique inversible et $\rho \in \text{Hom}(A, A^1)$.

Démonstration. Semblable à celle du lemme 2.1.

Corollaire 3.2. *Soient A un groupe de torsion et α un automorphisme de A . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) α vérifie (L') dans la classe des groupes de torsion;
- (ii) α vérifie (L') dans $\mathcal{C}_{ab}$;
- (iii) la restriction de α à toute p -composante A_p de A est de la forme $\pi \text{id} + \rho$ où π est un nombre p -adique inversible et $\rho \in \text{Hom}(A_p, A_p^1)$.

Proposition 3.3. *Soient A un groupe abélien, $T = T(A)$ la partie de torsion de A et $\alpha \in \text{Aut}(A)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) α vérifie (L');
- (ii) la restriction de α à T vérifie (L').

Démonstration. (i) $\implies$ (ii). Soit $s : B \longrightarrow T$ un épimorphisme avec $s|_{mB}$ un isomorphisme entre mB et mT pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(s) \xrightarrow{u} B \xrightarrow{s} T \longrightarrow 0$$

où u est l'injection canonique. Il existe un groupe abélien G , $l \in \text{Hom}(\ker(s), G)$, $\mu \in \text{Hom}(G, A)$ et $\gamma \in \text{Hom}(B, G)$ tels que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(s) & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{s} & T \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \gamma & & \downarrow v \\ 0 & \longrightarrow & \ker(s) & \xrightarrow{l} & G & \xrightarrow{\mu} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

est un diagramme commutatif avec lignes exactes, v étant l'injection canonique. Soit $g \in G$ tel que $\mu(mg) = 0$. Alors $m\mu(g) = 0$ entraîne $\mu(g) \in T$ et donc $\mu(g) = s(b)$ avec $b \in B$. De plus, $\mu(mg) = s(mb) = 0$ entraîne $mb = 0$. On a aussi $\mu(g) = \mu\gamma(b)$ qui implique $\mu(g - \gamma(b)) = 0$ et par conséquent $g - \gamma(b) = l(x) = \gamma(x)$ avec $x \in \ker(s)$. Ainsi $g = \gamma(b + x)$ et $mg = \gamma(mb + mx) = \gamma(0) = 0$. Donc $\mu|_{mG} \in \text{Isom}(mG, mA)$. Il existe alors $\hat{\alpha} \in \text{Aut}(G)$ tel que $\mu\hat{\alpha} = \alpha\mu$. On peut voir facilement que $\hat{\alpha}(\gamma(B)) = \gamma(B)$. Si on définit $\tilde{\alpha}$ par $\hat{\alpha}(\gamma(b)) = \gamma(\tilde{\alpha}(b))$, alors $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(B)$ et $s\tilde{\alpha} = \alpha s$.

(ii) $\implies$ (i). Supposons que $B \xrightarrow{s} A \longrightarrow 0$ est une suite exacte et qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que la restriction de s à mB est un isomorphisme entre mB et mA . On peut supposer $m \geq 2$. Soit p un nombre premier divisant m . On pose $m = p^{n_0}q$ avec $(p, q) = 1$ et $n_0 \geq 1$. Soit

$$C = qB$$

8 Automorphismes d'un groupe abélien se relevant à toute pré-image homomorphe

et L un p -groupe de base de C . Alors $L = \bigoplus_{n \geq 0} L_n$ est un groupe libre et pour $n \geq 1$,

$$L_n = \bigoplus_{i \in I_n} \langle x_{n,i} \rangle \text{ avec } o(x_{n,i}) = p^n \text{ pour tout } i \in I_n.$$

On pose $\alpha' = \sigma^{-1} \alpha \sigma \in \text{Aut}(mB)$. Soit α_p la restriction de α à T_p (la p -composante de T) qui est de la forme $\pi \text{id} + \rho$ où π est un nombre p -adique inversible et $\rho \in \text{Hom}(T_p, T_p^1)$. Soit E la p -composante de $T(C)$; alors $L' = \bigoplus_{n \geq 1} L_n$ est un p -sous-groupe de base de E et $L' \cap E^1 = (0)$. On pose

$$C' = L' \oplus E^1.$$

Soit $\alpha_1 = \pi \text{id} + \sigma^{-1} \rho \sigma$, $\alpha_1 \in \text{Aut}(C')$. Soient

$$C'' = mB + C', \quad \alpha''(mb + c') = \alpha'(mb) + \alpha_1(c').$$

Alors α'' est bien définie car si $x \in mB \cap C'$, alors $\alpha'(x) = \alpha_1(x)$. Montrons que $L_0 \cap C'' = p^{n_0} L_0$. En effet, $p^{n_0} L_0 \subseteq p^{n_0} L \subseteq p^{n_0} C \subseteq p^{n_0} qB \subseteq mB$; donc $p^{n_0} L_0 \subseteq mB \cap L_0 \subseteq C'' \cap L_0$. Réciproquement, soit $x \in C'' \cap L_0$; alors $x = mb + l' + e$ avec $b \in B$, $l' \in L'$ et $e \in E^1$, $e = me_1$. Donc

$$\begin{aligned} x = mb + l' + me_1 &\implies x - l' \in L \cap mB \\ &\implies x - l' \in L \cap p^{n_0} C \\ &\implies x = p^{n_0} l_0 \text{ avec } l_0 \in L_0, \end{aligned}$$

de sorte que $x \in p^{n_0} L_0$. Soit $L_0 = \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z} y_j$, $\alpha'(p^{n_0} y_j) = p^{n_0} z_j$ où $z_j \in C$. Alors

$$p^{n_0} s(z_j) = p^{n_0} \alpha s(y_j) \implies s(z_j) = \alpha s(y_j) + t_j,$$

où $t_j \in (qA)[p^{n_0}]$. Il existe $t_j'' \in B$ tel que $s(t_j'') = t_j$. On a $s(p^{n_0} t_j'') = p^{n_0} t_j = 0$. De plus, si $uq + vp^{n_0} = 1$, alors $t_j'' = uqt_j'' + vp^{n_0} t_j''$ et

$$s(t_j'') = s(uqt_j'') + s(vp^{n_0} t_j'') = s(uqt_j'') = t_j.$$

Posons $t_j' = uqt_j''$; alors $t_j' \in C$. Donc $p^{n_0} t_j' \in mB$ et

$$s(p^{n_0} t_j') = s(p^{n_0} t_j'') = s(p^{n_0} t_j'') = 0 \implies p^{n_0} t_j' = 0.$$

Soit α_0 l'homomorphisme de L_0 vers C défini par $\alpha_0(y_j) = z_j - t_j'$. Soit $\tilde{\alpha}$ l'endomorphisme de C défini par $\tilde{\alpha}(b'' + b_0) = \alpha''(b'') + \alpha_0(b_0)$ où $b'' \in C''$ et $b_0 \in L_0$. Alors $\tilde{\alpha}$ est bien défini car $C'' \cap L_0 = p^{n_0} L_0 \subseteq mB$. Supposons que $\tilde{\alpha}(b) = 0$ avec $b = b'' + b_0$, où $b'' \in C''$ et $b_0 \in L_0$, $\alpha''(b'') + \alpha_0(b_0) = 0$. Posons $b'' = mb + c'$ avec $b \in B$ et $c' \in C' = L' \oplus E^1$. Alors

$$\alpha''(b'') = \alpha'(mb) + \alpha_1(c') = \sigma^{-1} \alpha s(mb) + \pi c' + \sigma^{-1} \rho s(c').$$

Donc

$$\begin{aligned} s\alpha''(b'') &= \alpha s(mb) + \pi s(c') + \rho s(c') = \alpha s(mb) + (\pi \text{id} + \rho)(s(c')) \\ &= \alpha s(mb + c') = \alpha s(b''). \end{aligned}$$

Posons $b_0 = \sum_j m_j y_j$ et $\alpha_0(b_0) = \sum_j m_j(z_j - t'_j)$. On a

$$p^{n_0}\alpha_0(b_0) = \sum_j m_j p^{n_0} z_j = \sum_j m_j \alpha'(p^{n_0} y_j) = \alpha'(p^{n_0} b_0),$$

d'où $p^{n_0}\alpha_0(b_0) = \sigma^{-1}\alpha s(p^{n_0}b_0)$ et $p^{n_0}s(\alpha_0(b_0)) = \alpha s(p^{n_0}b_0)$, de sorte que $p^{n_0}\alpha s(b'') + \alpha s(p^{n_0}b_0) = 0$, $\alpha(p^{n_0}s(b)) = 0$, $s(p^{n_0}b) = 0$ et $p^{n_0}b = 0$.

On en déduit que $b \in E$ et $E = L' + p^{n_0}E \subseteq C''$. Donc $\tilde{\alpha}(b) = \alpha''(b) = 0$ et $b = 0$.

Pour montrer que $\tilde{\alpha}$ est surjective, il suffit de montrer que $L_0 \subseteq \tilde{\alpha}(C)$ car $\tilde{\alpha}(C'') = C''$. Soit $b \in L_0$; alors $p^{n_0}b \in C''$ entraîne $p^{n_0}b = \alpha''(b') = \tilde{\alpha}(b')$ où $b' \in C'' = p^{n_0}C + L' + E^1$. D'où $b' = p^{n_0}c + c'$ avec $c \in C$ et $c' \in C'$. De plus,

$$\tilde{\alpha}(b') = p^{n_0}\tilde{\alpha}(c) + \tilde{\alpha}(c') \implies p^{n_0}(b - \tilde{\alpha}(c)) = \tilde{\alpha}(c') \in C' \subseteq E,$$

de sorte que $b - \tilde{\alpha}(c) \in E = L' + p^{n_0}E \subseteq L' + p^{n_0}C \subseteq C''$. Donc $b - \tilde{\alpha}(c) = \tilde{\alpha}(c'')$ et $b \in \tilde{\alpha}(C)$.

Soient $c \in C$, $c = c'' + l_0$, $c'' \in C''$ et $l_0 \in L_0$, $\tilde{\alpha}(c) = \alpha''(c'') + \alpha_0(l_0)$ $c'' = mb + c'$, $b \in B$, $c' \in C' = L' \oplus E^1$. Alors

$$\alpha''(c'') = \alpha'(mb) + \alpha_1(c') = \alpha'(mb) + \alpha_1(l' + e),$$

où $c' = l' + e$, $l' \in L'$ et $e \in E^1$. Donc $\alpha''(c'') = \sigma^{-1}\alpha s(mb) + \pi(c') + \sigma^{-1}\rho s(c')$ et

$$\sigma\alpha''(c'') = \alpha s(mb) + \pi s(c') + \rho s(c') = \alpha s(mb) + \alpha s(c') = \alpha s(mb + c') = \alpha s(c'').$$

De plus, $l_0 = \sum_j m_j y_j$, $\alpha_0(l_0) = \sum_j m_j(z_j - t'_j)$. Donc

$$s\alpha_0(l_0) = \sum_j m_j(s(z_j) - s(t'_j)), \quad s(z_j) = \alpha s(y_j) + t_j,$$

$$t_j \in (qA)[p^{n_0}], \quad t_j \in C[p^{n_0}], \quad s(t'_j) = t_j,$$

et

$$s(z_j) - s(t'_j) = s(z_j) - t_j = \alpha s(y_j), \quad s\alpha_0(l_0) = \sum_j m_j \alpha s(y_j) = \alpha s(l_0),$$

de sorte que $s\tilde{\alpha} = \alpha s$ sur C (c'est-à-dire $s\tilde{\alpha}(c) = \alpha s(c)$ pour tout $c \in C$). Si $x \in mB$, alors $\tilde{\alpha}(x) = \alpha'(x) = \sigma^{-1}\alpha s(x)$.

À présent, soit $m = p_1^{n_1} \times \cdots \times p_r^{n_r}$ la décomposition de m en nombres premiers. Posons $q_j = m/(p_j^{n_j})$ ($1 \leq j \leq r$) et $C_j = q_j B$; d'après ce qui précède, il existe $\beta_j \in \text{Aut}(C_j)$ tel que $s\beta_j(x) = \alpha s(x)$. Pour tout $x \in C_j$, si $x \in mB$, alors $\beta_j(x) = \gamma(x)$ ($\gamma = \sigma^{-1}\alpha\sigma$). On a $B = C_1 + \cdots + C_r$ et on pose

$$\tilde{\alpha}(x_1 + \cdots + x_r) = \sum_{j=1}^r \beta_j(x_j) \quad (x_j \in C_j).$$

Montrons que $\tilde{\alpha}$ est bien défini. Supposons $x_1 + \cdots + x_r = 0$. Alors

$$x_1 = -(x_2 + \cdots + x_r) \in C_1 \cap (C_2 + \cdots + C_r).$$

De plus, pour tout $j \in \{2, \dots, r\}$, $C_j = q_j B \subset p_1^{n_1} B$, ce qui entraîne $x_1 \in C_1 \cap p_1^{n_1} B = mB$. Donc $\beta_1(x_1) = \gamma(x_1)$. De même, $x_2, \dots, x_r \in B$ et

$$\beta_1(x_1) + \cdots + \beta_r(x_r) = \gamma(x_1 + \cdots + x_r) = 0.$$

Donc $\tilde{\alpha}(x_1 + \cdots + x_r) = 0 \implies \sum_{j=1}^r \beta_j(x_j) = 0 \implies \beta_j(x_j) \in mB \ (1 \leq j \leq r) \implies x_j \in mB \ (1 \leq j \leq r) \implies \tilde{\alpha}(x_1 + \cdots + x_r) = \gamma(x_1 + \cdots + x_r) = 0 \implies x_1 + \cdots + x_r = 0$. D'où $\tilde{\alpha}$ est injective et il est clair que $\tilde{\alpha}$ est surjective. Donc $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(B)$ et

$$s\tilde{\alpha}(x_1 + \cdots + x_r) = \sum_{j=1}^r s\beta_j(x_j) = \sum_{j=1}^r \alpha s(x_j) = \alpha s(x_1 + \cdots + x_r).$$

D'où $s\tilde{\alpha} = \alpha s$. $\square$

4. Caractérisation où (L) est équivalent à (L') ou (L'').

Théorème 4.1. Soient A un p -groupe séparable (p nombre premier) et $\alpha \in \text{Aut}(A)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) α vérifie (L) dans la classe des p -groupes;
- (ii) α vérifie (L') dans la classe des p -groupes;
- (iii) α vérifie (L'') dans la classe des p -groupes;
- (iv) $\alpha = \pi \text{id}_A$ où π est un nombre p -adique inversible.

Démonstration. L'implication (i) $\implies$ (ii) est claire.

Puisque A est séparable alors $A^1 = 0$. D'où (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (iv) (voir lemme 2.1 et lemme 3.1).

(iv) $\implies$ (i) est clair. $\square$

Théorème. Soient A un p -groupe séparable (p nombre premier) et $\alpha \in \text{Aut}(A)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) α vérifie (L) dans la classe des groupes abéliens;
- (ii) α vérifie (L') dans la classe des groupes abéliens;
- (iii) $\alpha = \varepsilon \text{id}_A$ où $\varepsilon \in \{+1, -1\}$.

Démonstration. L'implication (i) $\implies$ (ii) est claire.

Puisque A est séparable alors $A^1 = 0$. D'où (ii) $\iff$ (iii) (voir proposition 2.3).

La partie (iii) $\implies$ (i) est claire. $\square$

English extended abstract. It was shown by P. Schupp [4] that in the category of all groups the inner automorphisms of a group G can be characterized by the fact that they extend to automorphisms of any group containing G . M. R. Pettet [3] proved that inner automorphisms are exactly those automorphisms which can be lifted to homomorphic preimages of G . In [1] we have characterized the automorphisms satisfying the extension property in the category of abelian p -groups and in the category of all abelian groups.

Recently the automorphisms of an abelian p -group A which lifts to any abelian p -group whose A is a homomorphic image have been determined [2]. However, the characterization of these automorphisms in the category of all abelian groups is still an open question. For approaching this problem, we examine some properties which are weaker than the lifting property.

Let Γ be a class of abelian groups and let $\alpha \in \text{Aut}(A)$. We consider the following properties:

- (L) For all $B \in \Gamma$ and any epimorphism $s : B \longrightarrow A$, there exists $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(B)$ such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{s} & A \\ \tilde{\alpha} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{s} & A \end{array}$$

commutes.

- (L') For all $B \in \Gamma$ and any epimorphism $s : B \longrightarrow A$, if the restriction of s to B^1 is an isomorphism between B^1 and A^1 , then there exists $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(B)$ such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{s} & A \\ \tilde{\alpha} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{s} & A \end{array}$$

commutes.

- (L'') For all $B \in \Gamma$ and any epimorphism $s : B \longrightarrow A$, if there exists $m \in \mathbb{N}^*$ such that the restriction of s to mB is an isomorphism between mB and mA , then there exists $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(B)$ such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{s} & A \\ \tilde{\alpha} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{s} & A \end{array}$$

commutes.

In this paper, we prove the following results:

(1) If A is a torsion group and $\alpha \in \text{Aut}(A)$, then the following conditions are equivalent:

- (i) α satisfies (L') in the class of torsion groups,
- (ii) the restriction of α to any p -component A_p of A is of the form $\pi \text{id}_{A_p} + \rho$ where π is an invertible p -adic number and $\rho \in \text{Hom}(A_p, A_p^1)$.

(2) If A is a torsion group and $\alpha \in \text{Aut}(A)$, then the following conditions are equivalent:

- (i) α satisfy (L') in the class of abelian groups,
- (ii) $\alpha = \text{id} + \rho$ or $\alpha = -\text{id} + \rho$ with $\rho \in \text{Hom}(A, A^1)$.

12 Automorphismes d'un groupe abélien se relevant à toute pré-image homomorphe

(3) If A is a torsion group and $\alpha \in \text{Aut}(A)$, then the following conditions are equivalent:

- (i) α satisfy (L'') in the class of torsion groups,
- (ii) α satisfy (L'') in the class of all abelian groups,
- (iii) the restriction of α to any p -component A_p of A is of the form $\pi \text{id} + \rho$ where π is a p -adic number and $\rho \in \text{Hom}(A_p, A_p^1)$.

(4) If T is the torsion part of an abelian group A and $\alpha \in \text{Aut}(A)$, then the following conditions are equivalent:

- (i) α satisfies (L''),
- (ii) the restriction of α to T satisfies (L'').

Finally, we also study the equivalence between (L), (L') and (L'').

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Abdelalim et H. Essannouni, *Caractérisation des automorphismes d'un groupe abélien ayant la propriété de l'extension*, Port. Math. (N. S.) **59** (2002); no. 3, 325–333.
2. S. Abdelalim et H. Essannouni, *Characterization of the automorphisms having the lifting property in the category of abelian p -groups*, Int. J. Math. Math. Sci. (2003); no. 71, 4511–4516.
3. L. Ben Yakoub, *Sur un théorème de P. E. Schupp*, Portugal. Math. **51** (1994); no. 2, 231–233.
4. L. Ben Yakoub et M. P. Malliavin, *Caractérisation des dérivations intérieures de l'algèbre de Weyl et de l'algèbre d'Heisenberg quantiques*, Comm. Algebra **24** (1996); no. 10, 3131–3148.
5. M. Dugas and R. Gobel, *Outer automorphisms of groups*, Illinois J. Math. **35** (1991); no. 1, 27–46.
6. L. Fuchs, *Infinite abelian groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 36, Academic Press, New York-London, 1970.
7. M. R. Pettet, *On inner automorphisms of finite groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989); no. 1, 87–90.
8. P. E. Schupp, *A characterization of inner automorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987); no. 2, 226–228.

S. ABDELALIM ET H. ESSANNOUNI
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ MOHAMMED V
FACULTÉ DES SCIENCES
B. P. 1014, RABAT, MAROC
COURRIEL : seddikabd@hotmail.com
esanouni@fsr.ac.ma