

ORDONNÉS DE CHAÎNES ET ALGÈBRES D'INCIDENCE

JUAN CARLOS BUSTAMANTE, JULIE DIONNE ET DAVID SMITH

RÉSUMÉ. Nous caractérisons les ensembles ordonnés qui sont des ordonnés de faces de complexes simpliciaux. Ceci permet de caractériser les ensembles ordonnés des chaînes (non vides) d'ensembles ordonnés, et de retrouver l'ensemble ordonné original. Enfin, nous appliquons ces résultats à la simplification du calcul du groupe de cohomologie de Hochschild et du groupe fondamental d'algèbres d'incidence d'ensembles ordonnés.

ABSTRACT. We characterise partially ordered sets which are the sets of faces of simplicial complexes ordered by inclusion. This allows us to characterise partially ordered sets which are the sets of nonempty chains of some partially ordered set, and recover the original one. We use these results to simplify computations of Hochschild cohomology groups, as well as fundamental groups of incidence algebras.

Introduction. Soient $(E, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné fini, k un corps commutatif et kE l'algèbre d'incidence de E sur k . Il a été montré (voir [9,11,13]) que les groupes de cohomologie de Hochschild $HH^i(kE)$ et le groupe fondamental $\pi_1(kE)$ de kE sont respectivement isomorphes aux groupes de cohomologie simpliciale $H^i(\Delta(E), k^+)$ et au groupe fondamental $\pi_1(\Delta(E))$ du complexe des chaînes de E , noté $\Delta(E)$ (voir 1.1).

L'importance de ces groupes se reflète, entre autres, par le biais des algèbres dont le groupe fondamental est trivial pour toute présentation de l'algèbre, dites *algèbres simplement connexes* [2,3]. Celles-ci jouent un rôle primordial car il est souvent possible, en utilisant des techniques de revêtements, de ramener l'étude des représentations d'une algèbre à l'étude de celles d'une algèbre simplement connexe convenablement choisie (voir [7,20], par exemple). Par ailleurs, les groupes $HH^i(kE)$ donnent aussi de l'information sur la connexité simple de kE ainsi que sur ses propriétés de rigidité [1,16,24].

D'autre part, étant donné un complexe simplicial fini K , on définit $\mathcal{O}(K)$ comme étant l'ensemble des faces de K ordonné par inclusion. On montre alors (voir (1.7)) que les algèbres kE et $k\mathcal{O}\Delta(E)$ ont les mêmes groupes de cohomologie et fondamentaux. Or l'ordonné E comptant moins d'éléments que $\mathcal{O}\Delta(E)$, le calcul des groupes en question est plus simple pour la première algèbre que pour la seconde. Il est donc

Reçu le 8 juillet 2002 et, sous forme définitive, le 11 février 2003.

naturel, du point de vue de la théorie des représentations des algèbres, d'essayer de caractériser les algèbres d'incidence de la forme $k\mathcal{O}\Delta(E)$. Il s'agit là du but premier de ce travail. Pour ce faire, nous donnons une nouvelle caractérisation des ordonnés de la forme $\mathcal{O}(K)$. Il est à noter que nous ne formulons aucune hypothèse sur la pureté ou la décortiquabilité du complexe K (comparer avec [5] (4.5), [6] (4.7.24)). Voir aussi [5] (2.3).

Cet article est organisé comme suit : dans la première section, nous exposons certains concepts élémentaires sur les complexes simpliciaux (1.1), les carquois (1.2) et les algèbres d'incidence d'ensembles ordonnés (1.3). Nous enchaînons avec notre théorème principal (2.4) portant sur la caractérisation des ordonnés de la forme $\mathcal{O}(K)$ comme mentionné ci-haut. Ce résultat combiné à la classification des complexes de la forme $\Delta(E)$ énoncée par Stanley [25] (voir aussi [18,21]) permet d'établir quels sont les ensembles ordonnés de la forme $\mathcal{O}\Delta(E)$, ce qui est fait dans la section 3. Enfin, nous appliquons ces résultats pour caractériser les algèbres d'incidence de la forme $k\mathcal{O}\Delta(E)$.

Dans ce qui suit, les ensembles ordonnés sont supposés finis.

1. Préliminaires.

1.1. Complexes simpliciaux. Le lecteur trouvera les définitions de base concernant les complexes simpliciaux dans [23]. On rappelle toutefois que si E est un ensemble fini, alors l'ensemble $\mathcal{P}_*(E)$ des parties non vides de E est un complexe simplicial. D'autre part, pour un ensemble ordonné $(E, \leq)$, on définit le *complexe des chaînes* de E comme étant le complexe simplicial dont les i -simplexes sont les chaînes (non vides) $x_0 < x_1 < \dots < x_i$ de $i + 1$ éléments de E que l'on note $\Delta(E)$. Cette construction définit un foncteur de la catégorie des ensembles ordonnés finis vers la catégorie des complexes simpliciaux finis qui n'est ni dense ni fidèle. Plusieurs caractérisations des complexes simpliciaux ainsi obtenus ont été énoncées. Nous y reviendrons plus tard.

1.2. Carquois. Étant donné un carquois Q , les notions de source, puits, chemin, longueur d'un chemin, chemins parallèles, sous-carquois plein, sous-carquois convexe seront considérées connues (voir [9], par exemple). D'autre part, on suppose que l'ensemble Q_0 des points de Q et celui de ses flèches Q_1 sont finis, qu'entre deux points $x, y \in Q_0$ il existe au plus une flèche $\alpha : x \rightarrow y$ et que Q est acyclique. On note $A(Q)$ l'ensemble des sources de Q , et $Z(Q)$ celui de ses puits.

Pour un point $x \in Q_0$, l'ensemble des points y de Q tels qu'il existe un chemin de longueur n de x vers y est l'ensemble des $n^{\text{ièmes}}$ *successeurs* de x et est noté $S^n(x)$, alors que l'ensemble de tous les successeurs de x est noté $S(x)$. Enfin, l'ensemble $S(x) \cap Z(Q)$ est l'ensemble des *puits* de x , noté $p(x)$. De façon évidente, on définit l'ensemble des $n^{\text{ièmes}}$ *prédécesseurs* de x , noté $P^n(x)$ et celui des *prédécesseurs* de x , $P(x)$. Pour $x \in Q_0$, le sous-carquois plein engendré par $S(x)$ est noté $\overrightarrow{x}$. En particulier, $\overrightarrow{x}$ est toujours convexe.

D'autre part, si $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné, on construit un carquois Q_E comme suit : $(Q_E)_0 = E$ et il existe une unique flèche de x vers y si $x > y$ et s'il n'existe pas de z dans E tel que $x > z > y$. Dans ce qui suit, on identifie l'ensemble ordonné E au carquois Q_E . D'autre part, étant donné un complexe simplicial fini K , l'ensemble de ses faces est ordonné par inclusion, et le carquois correspondant est noté $\mathcal{O}(K)$. Ceci

définit un foncteur $\mathcal{O}$ de la catégorie des complexes simpliciaux finis vers celle des ensembles ordonnés finis.

1.3. Algèbres d'incidence. Soient k un corps commutatif et $(E, \leq)$ un ensemble ordonné ayant n éléments. Sans perte de généralité, on peut supposer que $E = \{1, 2, \dots, n\}$ et que l'ordre usuel est une extension de $\leq$. L'algèbre d'incidence kE de $(E, \leq)$ sur k est la sous-algèbre de $M_n(k)$ dont les éléments sont les matrices (a_{ij}) telles que $a_{ij} = 0$ si $i \not\leq j$. Il est aussi possible de décrire kE comme le quotient de l'algèbre de chemins d'un carquois. Plus précisément, soient $Q = Q_E$ le carquois associé à l'ordonné E dans la section précédente, et kQ le k -module libre ayant pour base l'ensemble des chemins de Q , y compris un chemin stationnaire sur chaque point de Q . On définit le produit de deux chemins comme étant leur concaténation, lorsque celle-ci est possible, et 0 sinon. Le prolongement de cette opération par k -linéarité confère à kQ une structure de k -algèbre associative et unifiée. D'autre part, soit I l'idéal bilatère de kQ engendré par les différences des chemins parallèles de Q , alors l'algèbre quotient kQ/I est isomorphe à kE .

1.4. Remarque. Il est bien connu que si A est une algèbre associative, unifiée, sobre et de dimension finie sur un corps algébriquement clos k , alors il existe un carquois Q et un idéal bilatère I de kQ tels que $A \simeq kQ/I$ (voir [7]).

Pour une k -algèbre A , les groupes de cohomologie de Hochschild, notés $\mathrm{HH}^i(A)$, sont par définition les $i^{\text{èmes}}$ groupes d'extensions du bimodule ${}_A A_A$ par lui-même, $\mathrm{Ext}_{A-A}^i(A, A)$ [10,16]. Dans le cas des algèbres d'incidence, ces groupes ont une interprétation géométrique [11,17]. En effet, soient $H^i(\Delta(E), k^+)$ les groupes de cohomologie simpliciale de $\Delta(E)$ avec coefficients dans le groupe additif sous-jacent au corps k , on a alors le théorème suivant qui est dû à Gerstenhaber et Schack.

1.5. Théorème [13]. *Il existe, pour tout $i \geq 0$ un isomorphisme de k -modules $\mathrm{HH}^i(kE) \simeq H^i(\Delta(E), k^+)$.*

Le résultat analogue concernant les groupes d'homologie de Hochschild des algèbres d'incidence a été établi dans [11]. Par ailleurs, dans [1,12], il a été montré qu'il existe des liens étroits entre les groupes $\pi_1(A)$ et $\mathrm{HH}^1(A)$ dans un contexte plus général que celui des algèbres d'incidence. En outre, nous avons le résultat suivant :

1.6. Théorème [9,22]. *Il existe un isomorphisme de groupes $\pi_1(kE) \simeq \pi_1(\Delta(E))$.*

Ces résultats sont des cas particuliers de résultats plus récents et plus généraux dans [9] (voir aussi [8,19]). Le lemme suivant en est une conséquence immédiate.

1.7. Lemme. *Avec les notations précédentes, nous avons des isomorphismes $\mathrm{HH}^i(kE) \simeq \mathrm{HH}^i(k\mathcal{O}\Delta(E))$, pour tout $i \geq 0$, et $\pi_1(kE) \simeq \pi_1(k\mathcal{O}\Delta(E))$.*

Démonstration. Il suit de [13] qu'il y a des isomorphismes $\mathrm{HH}^i(kE) \simeq H^i(\Delta(E), k^+)$, et $\mathrm{HH}^i(k\mathcal{O}\Delta(E)) \simeq H^i(\Delta\mathcal{O}\Delta(E), k^+)$. Or, le complexe $\Delta\mathcal{O}\Delta(E)$ étant la subdivision barycentrique de $\Delta(E)$, ces deux espaces ont la même cohomologie simpliciale. L'isomorphisme $\pi_1(kE) \simeq \pi_1(k\mathcal{O}\Delta(E))$ se démontre de façon semblable. $\square$

Ce dernier résultat justifie notre intérêt pour les algèbres de la forme $k\mathcal{O}\Delta(E)$ car leur caractérisation permettrait alors de réduire les calculs des groupes de cohomologie

et fondamental aux calculs de ceux d'une algèbre d'incidence d'un ordonné ayant moins d'éléments. Pour ceci, la première étape est de caractériser les ensembles ordonnés de la forme $\mathcal{O}(K)$, pour un complexe simplicial K . C'est le but de la section suivante.

2. Ordonnés de faces. Nous commençons par quelques remarques élémentaires. Si σ est un m -simplexe d'un complexe simplicial K , alors, dans $\mathcal{O}(K)$, il existe une flèche de σ à σ' si et seulement si $\sigma' \subset \sigma$ et $\dim \sigma = \dim \sigma' + 1$. Donc tous les chemins de σ aux puits de $\mathcal{O}(K)$ ont la même longueur m . Ceci donne lieu à la notion de *carquois nivelé*.

2.1. Carquois nivelés. Un carquois acyclique Q est dit *nivelé* si pour tout point x de Q la longueur des chemins de x vers les puits de Q est indépendante du puits et du chemin choisis. Dans ce cas, pour un point x , si cette longueur commune est k , on dira que x est de *niveau* k , et on note $N_k(Q)$ l'ensemble de ces points. En particulier, $N_0(Q) = Z(Q)$ et si $x \in N_k(Q)$, alors $S^k(x) = p(x)$. On appelle *carquois augmenté* $\hat{Q}$ de Q , le carquois suivant : $\hat{Q}_0 = Q_0 \cup \{0\}$ et $\hat{Q}_1 = Q_1 \cup \{\alpha_i : x_i \rightarrow 0 \mid x_i \in Z(Q)\}$. Un carquois Q est donc nivelé si et seulement le carquois augmenté $\hat{Q}$ est de Dedekind-Jordan [au sens de [5]].

2.2. Lemme. Soit K un complexe simplicial. Alors le carquois $\mathcal{O}(K)$ est nivelé. En outre, le niveau d'un simplexe σ est $\dim \sigma$.

Démonstration. Suit de la discussion précédant (2.1) ; voir aussi [5] (4.7.12). $\square$

2.3. Remarque. Plus généralement, soient K un complexe simplicial sur un ensemble de sommets V et σ une m -face de K . Alors, dans $\mathcal{O}(K)$, $S^k(\sigma)$ est l'ensemble des faces de dimension $m - k$ de σ . Notamment, $S^m(\sigma) = p(\sigma) = \sigma$ (en identifiant les simplexes $\{v\}$ de K aux éléments v de V). D'autre part, on vérifie sans peine que si $\mathcal{O}(K_1) \simeq \mathcal{O}(K_2)$, alors les complexes K_1 et K_2 sont isomorphes. En plus, si K_1 et K_2 sont deux complexes, alors l'ordonné des faces de K_1 est un sous-ensemble ordonné convexe de l'ordonné des faces de $K_1 \cup K_2$. Ainsi $\mathcal{O}(K_1)$ est un sous-carquois plein et convexe de $\mathcal{O}(K_1 \cup K_2)$. Il devient alors clair que $\mathcal{O}(K_1) \cup \mathcal{O}(K_2) \simeq \mathcal{O}(K_1 \cup K_2)$.

Nous sommes en mesure d'énoncer et de prouver notre résultat principal.

2.4. Théorème. Soit Q un carquois fini. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un complexe simplicial K tel que $Q \simeq \mathcal{O}(K)$;
2. (a) Q est nivelé,
 (b) Si $x, y \in N_k(Q)$ sont distincts, alors $S^k(x) \neq S^k(y)$,
 (c) Si $x \in N_k(Q)$, alors $|S^i(x)| = \binom{k+1}{i}$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, k\}$;
3. (a) Q est nivelé,
 (b) La fonction $p : Q_0 \rightarrow \mathcal{P}_*(Z(Q))$ est injective,
 (c) Pour tout point x de Q on a $p(S(x)) = \mathcal{P}_*(p(x))$.

Dans ce cas, nous avons en outre $K = \bigcup_{x \in A(Q)} \mathcal{P}_*(p(x))$.

Démonstration. Montrons que la première condition implique la seconde. Soit K un complexe simplicial tel que $Q \simeq \mathcal{O}(K)$. Il suit de (2.2) que $\mathcal{O}(K)$ est un carquois nivelé. D'autre part, soient σ et τ deux points distincts de $N_k(Q)$, c'est-à-dire deux

k -simplexes de K . Si $S^k(\sigma) = S^k(\tau)$, alors il suit de (2.3) que $\sigma = \tau$, une contradiction. Finalement, nous avons déjà remarqué que, pour un k -simplexe σ , $S^i(\sigma)$ est l'ensemble des faces de dimension $k - i$ de σ . Il y a exactement $\binom{k+1}{k-i+1} = \binom{k+1}{i}$ telles faces.

Supposons maintenant que le deuxième ensemble de conditions est vérifié et montrons que le troisième l'est aussi. La condition 3 a) étant trivialement satisfaite, soient σ et τ deux points distincts de Q . S'ils sont de même niveau k , alors la condition 2 b) assure que $S^k(\sigma) \neq S^k(\tau)$, c'est-à-dire $p(\sigma) \neq p(\tau)$. Par ailleurs, si $\sigma \in N_i(Q)$ et $\tau \in N_j(Q)$ avec $i \neq j$, on a, en vertu de 2 c), que $|p(\sigma)| = |S^i(\sigma)| = i + 1$ et $|p(\tau)| = |S^j(\tau)| = j + 1$, de sorte que $p(\sigma) \neq p(\tau)$. Soient maintenant $\sigma \in N_k(Q)$ et $\{v_0, v_1, \dots, v_n\} \subset p(\sigma)$. Il suit de 2 c) que $|p(\sigma)| = k + 1$ et que σ possède exactement $\binom{k+1}{k-n}$ successeurs de niveau n , où chaque tel successeur admet $n + 1$ puits. De plus, il existe $\binom{k+1}{n+1} = \binom{k+1}{k-n}$ combinaisons de $n + 1$ puits parmi les $k + 1$ puits de σ . En vertu de 2 b), deux successeurs distincts de σ de niveau n admettent des ensembles de puits différents, de sorte qu'il existe un unique successeur de niveau n de σ , disons τ , tel que $p(\tau) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, d'où $p(S(\sigma)) = \mathcal{P}_*(p(\sigma))$.

Nous montrons l'implication restante en explicitant un complexe simplicial K tel que $Q \simeq \mathcal{O}(K)$. Remarquons d'abord que dans cette situation, si σ et τ sont deux points distincts de Q_0 , alors il existe une flèche $\phi_{\sigma,\tau} : \sigma \rightarrow \tau$ dans Q si et seulement si $p(\tau) \subset p(\sigma)$ et $|p(\tau)| = |p(\sigma)| - 1$. En effet, s'il existe une telle flèche, alors il est clair que $p(\tau) \subset p(\sigma)$. Supposons que l'on ait $|p(\tau)| < |p(\sigma)| - 1$. Comme $p : S(\sigma) \rightarrow \mathcal{P}(p(\sigma))$ est une bijection (en vertu de 3 b) et 3 c)), il existe $\omega \in S(\sigma)$ tel que $p(\tau) \subset p(\omega) \subset p(\sigma)$. Or $S(\omega)$ et $\mathcal{P}(p(\omega))$ sont aussi en bijection, de sorte qu'il existe $\gamma \in S(\omega)$ tel que $p(\gamma) = p(\tau)$. La fonction p étant injective, il suit que $\gamma = \tau$. Ainsi, il existe un chemin de σ à τ de longueur $l > 1$, ce qui contredit l'hypothèse que Q est nivelé.

Inversement, supposons que $p(\tau) \subset p(\sigma)$ et $|p(\tau)| = |p(\sigma)| - 1$. Comme Q satisfait au troisième ensemble de conditions, il en est de même pour $\overrightarrow{\sigma}$, ce qui entraîne que $p : S(\sigma) \rightarrow \mathcal{P}(p(\sigma))$ est une bijection, et donc $\tau \in S(\sigma)$. Supposons que τ n'est pas un successeur immédiat de σ , c'est-à-dire qu'il existe $\omega \in S(\sigma) \cap P(\tau)$, avec $\omega \neq \sigma$, $\omega \neq \tau$. On a alors $p(\tau) \subseteq p(\omega) \subseteq p(\sigma)$, et donc $p(\tau) = p(\omega)$ ou $p(\omega) = p(\sigma)$. Dans les deux cas, on a une contradiction, car p est supposée injective. Ceci donne un isomorphisme de carquois entre $\overrightarrow{\sigma}$ et $\mathcal{O}(\mathcal{P}_*(p(\sigma)))$. Nous avons

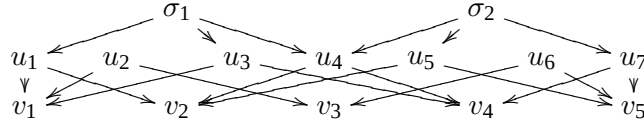
$$Q = \bigcup_{\sigma \in A(Q)} \overrightarrow{\sigma} \simeq \bigcup_{\sigma \in A(Q)} \mathcal{O}(\mathcal{P}_*(p(\sigma))) \simeq \mathcal{O} \left(\bigcup_{\sigma \in A(Q)} \mathcal{P}_*(p(\sigma)) \right),$$

où le dernier isomorphisme suit de (2.3). $\square$

2.5. Remarque. Il suit de [5] (2.3) qu'un carquois Q satisfait aux conditions de (2.4) si et seulement si le carquois augmenté $\hat{Q}$ est un inf-demi-treillis de type booléen.

2.6. Exemples.

1.



est de la forme $\mathcal{O}(K)$. Dans ce cas-ci le complexe simplicial K est la famille de tous les sous-ensembles distincts de $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_2, v_4, v_5\}$, $\{v_1, v_3\}$ et $\{v_3, v_5\}$.

2. Par contre, si on retire la flèche entre σ_1 et u_1 , le carquois n'est plus de la forme $\mathcal{O}(K)$, les conditions 2 c) et 3 c) du théorème 2.4 n'étant plus vérifiées.

Cette caractérisation des ordonnés de la forme $\mathcal{O}(K)$, accompagnée de celle des complexes simpliciaux de la forme $K = \Delta(E)$ de Stanley [18,21,25], permet de caractériser les ordonnés de la forme $\mathcal{O}\Delta(E)$, c'est à dire les ordonnés de chaînes d'ensembles ordonnés.

3. Ordonnés de chaînes. Pour un ensemble ordonné $(E, \leq)$, nous savons que $\mathcal{O}\Delta(E)$ est le carquois correspondant à l'ensemble des chaînes non vides de E ordonné par inclusion. Cet ordonné est la subdivision barycentrique de E (voir [26]). Nous savons en outre (1.1) que l'ordonné de départ $(E, \leq)$ associé à $\mathcal{O}\Delta(E)$ n'est généralement pas unique. Dans cette section, nous caractérisons ces subdivisions barycentriques et nous adaptons l'algorithme de Gilmore et Hoffmann [15] permettant de retrouver $(E, \leq)$ à partir de $\mathcal{O}\Delta(E)$.

3.1. Caractérisation des ensembles ordonnés de chaînes. Un carquois de la forme $Q = \mathcal{O}\Delta(E)$ vérifie les conditions de (2.4). Cependant, le complexe simplicial $K = \Delta(E)$ est un complexe de chaînes, ce qui impose des conditions sur K , reflétées dans la structure de $\mathcal{O}\Delta(E)$. D'après Stanley [25], un complexe simplicial K est de la forme $\Delta(E)$ si et seulement si son 1-squelette est un graphe de comparabilité et tout ensemble de sommets de K qui n'est pas un simplexe de K et qui est minimal pour cette propriété est de cardinalité 2.

On dit qu'un graphe G est un *graphe de comparabilité* s'il existe un ensemble ordonné $(E, \leq)$ tel que les sommets de G soient les éléments de E , et que l'on ait une arête joignant x à y si et seulement si $x < y$ ou $y < x$ dans E . Parmi les caractérisations des graphes de comparabilité existantes, celle de Ghoulà-Houri [14] nous permet de caractériser les carquois de la forme $Q = \mathcal{O}\Delta(E)$ de la façon suivante :

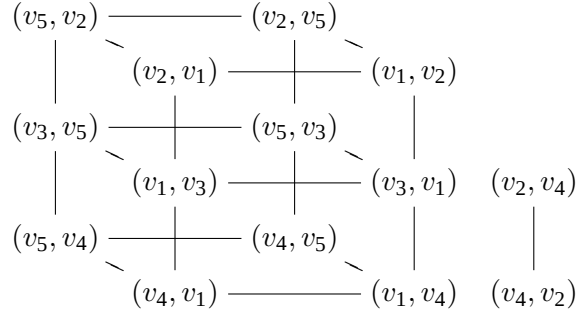
3.2. Corollaire. Soit Q un carquois fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un ensemble ordonné E tel que $Q \simeq \mathcal{O}\Delta(E)$;
2. Q est un carquois vérifiant les conditions de (2.4), et
 - (d) Le graphe $\overline{Q}$ obtenu en prenant pour sommets les paires ordonnées (a, b) de puits distincts de Q telles que $P^1(a) \cap P^1(b) \neq \emptyset$, et en joignant (a, b) à (b, c) si et seulement si $a = c$ ou $P^1(a) \cap P^1(c) = \emptyset$ est biparti,
 - (e) Tout ensemble V de puits de Q tel que $\bigcap_V P(v) = \emptyset$ mais $\bigcap_{V' \subset V} P(v) \neq \emptyset$ pour toute partie propre de V , est de cardinalité 2.

Démonstration. Les conditions (d) et (e) garantissent en vertu de [14] et [25] que le complexe simplicial donné par (2.4) est de la forme $\Delta(E)$. $\square$

3.3. Exemples.

1. Le graphe $\overline{Q}$ associé au carquois Q de l'exemple 2.6.1 est :



qui est évidemment biparti. D'autre part, les ensembles $\{v_1, v_5\}$, $\{v_3, v_4\}$ et $\{v_2, v_3\}$ sont les seuls ensembles V de puits de Q tels que $\bigcap_V P(v) = \emptyset$ mais $\bigcap_{V' \subset V} P(v) \neq \emptyset$ pour toute partie propre de V . Comme le carquois Q satisfait également aux conditions de (2.4) il suit de (3.2) qu'il est de la forme $\mathcal{O}\Delta(E)$.

2. Le graphe $\overline{Q}$ associé au carquois de (2.6.2) est le même que celui ci-haut. Par contre, dans ce cas, l'ensemble de puits $V = \{v_1, v_2, v_4\}$ de Q est tel que $\bigcap_V P(v) = \emptyset$ mais $\bigcap_{V' \subset V} P(v) \neq \emptyset$ pour toute partie propre de V . Ce carquois n'est donc pas de la forme $\mathcal{O}\Delta(E)$ puisque V est de cardinalité 3.

Le résultat précédent permet de décider si un carquois Q est de la forme $\mathcal{O}\Delta(E)$ ou non. Cependant, si c'est le cas, on ne peut, *a priori*, retrouver l'ensemble ordonné $(E, \leq)$. Cette question est traitée dans la section suivante.

3.4. Orientations transitives et coloriage. $Q = \mathcal{O}\Delta(E)$, le 1-squelette S de $\Delta(E)$ est, en vertu du théorème de Stanley, un graphe de comparabilité. Pour retrouver $(E, \leq)$, il suffit alors d'orienter transitivement les arêtes de S . Un algorithme permettant de le faire a été mis au point par Gilmore et Hoffman [15]. Nous l'adaptions au contexte du graphe $\overline{Q}$ de (3.2) que l'on sait biparti.

Algorithme.

1. Choisir un sommet non colorié (a, b) de $\overline{Q}$, et lui attribuer la couleur bleue. Bi-colorier en conséquence sa composante connexe. Aller à l'étape 2. Si un tel sommet n'existe pas, c'est terminé.
2. S'il existe deux sommets (a, b) et (b, c) de $\overline{Q}$ ayant la même couleur et tels que le sommet (a, c) n'est pas encore colorié, lui attribuer cette couleur. Bi-colorier en conséquence sa composante connexe. Recommencer l'étape 2 tant que possible. Retourner à l'étape 1.

L'ordre cherché est alors $a \leq b$ si et seulement si le sommet (a, b) existe et est colorié en bleu dans $\overline{Q}$.

4. Algèbres d'incidence. Comme mentionné précédemment, notre objectif est de simplifier les calculs des groupes fondamentaux et de cohomologie des algèbres

d'incidence. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant, lequel découle immédiatement de (3.2) :

4.1. Théorème. *Soit $A = kE$ une algèbre d'incidence. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe un ensemble ordonné $(F, \preceq)$ tel que $A = k\mathcal{O}\Delta(F)$;*
2. *Le carquois Q_E vérifie les conditions de (3.2).*

Dans ce cas, l'ensemble ordonné $(F, \preceq)$ est déterminé grâce à l'algorithme 3.4.

4.2. Exemple. Le carquois de l'exemple 2.6 vérifie les conditions de (3.2), de sorte que $(E, \leq)$ est l'ordonné des chaînes de l'ensemble ordonné $(F, \preceq)$ calculé à partir de l'algorithme 3.4 et dont le diagramme de Hasse est

$$\begin{array}{ccc} & v_2 & \\ & | & \\ v_4 & & v_3 \\ | & \times & | \\ v_5 & & v_1 \end{array}$$

Les algèbres d'incidence kE et kF ont les mêmes groupes de cohomologie et fondamentaux en vertu de (1.7). Ceci montre que $\pi_1(kE) = \mathbb{Z}$, $\mathrm{HH}^i(kE) = k$ pour $i \leq 1$ et $\mathrm{HH}^i(kE) = 0$ pour $i \geq 2$.

On note toutefois que la composition $\mathcal{O}\Delta$ ne préserve ni la connexité forte simple [24], ni le type de représentation [4]. Par exemple, le sous-carquois plein $\overrightarrow{\sigma_1}$ de l'exemple 2.6, dont l'algèbre d'incidence n'est ni de représentation finie, ni fortement simplement connexe, est l'ordonné des chaînes de l'ensemble totalement ordonné à trois éléments dont l'algèbre d'incidence est de représentation finie et fortement simplement connexe.

Remerciements. Nous remercions les professeurs Ibrahim Assem de l'Université de Sherbrooke et Richard Brewster de Bishop's University pour les nombreuses discussions, ainsi que les arbitres, pour leurs judicieuses suggestions. Le premier auteur remercie également l'ISM, l'Institut des sciences mathématiques, et le troisième auteur le CRSNG, le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada, pour leur soutien financier.

English extended abstract. Let $(E, \leq)$ be a finite partially ordered set (poset for short), k a field and kE the incidence algebra of E over k . Results in [9,11,13] show that the Hochschild cohomology groups $\mathrm{HH}^i(kE)$ and the fundamental group $\pi_1(kE)$ of kE (see [10,16,20] for instance, for definitions) are isomorphic to the simplicial cohomology groups $H^i(\Delta(E), k^+)$ and the fundamental group $\pi_1(\Delta(E))$ of the simplicial complex of non empty chains of E , denoted $\Delta(E)$.

An incidence algebra kE is said to be **simply connected** if its fundamental group is trivial. Simply connected algebras play an important role in representation theory of finite dimensional associative algebras. Indeed, the use of covering techniques often allow to reduce the study of the representations of an arbitrary algebra to that of a suitably chosen simply connected algebra, see [7,20], for instance. On the other hand, the groups $\mathrm{HH}^i(kE)$ give information about the simple connectedness of kE , as well as about its rigidity properties (see [1,16,24]).

Given a simplicial complex K , denote by $\mathcal{O}(K)$ the set of faces of K ordered by inclusion. It is shown (see 1.7) that the incidence algebras kE and $k\mathcal{O}\Delta(E)$ have isomorphic Hochschild cohomology and fundamental groups. It turns out that the poset E has much less elements than $\mathcal{O}\Delta(E)$, thus the above mentioned groups are more easily computed for kE . The main goal of this work is to characterise posets of the form $\mathcal{O}\Delta(E)$.

In a first short preliminary section we fix notations and terminology, namely, section 1.2 is devoted to bound quivers. Moreover, we recall some results about Hochschild cohomology groups and fundamental groups of incidence algebras. We then proceed, as a first step, to characterise posets of the form $\mathcal{O}(K)$, where K is a simplicial complex. Some elementary considerations on the structure of this posets lead us to the introduction of **ranked quivers** in section 2.1. The main result in section 2 is (see sections 1.2 and 2.1 for unexplained notations) :

2.4. Theorem. *Let Q be a finite quiver. The following conditions are equivalent :*

1. *There exists a simplicial complex K such that $Q \simeq \mathcal{O}(K)$;*
2. (a) *Q is a ranked quiver,*
 (b) *For any two different points of Q , $x, y \in N_k(Q)$ we have $S^k(x) \neq S^k(y)$,*
 (c) *For a point $x \in N_k(Q)$, we have $|S^i(x)| = \binom{k+1}{i}$ for all $i \in \{0, 1, \dots, k\}$;*
3. (a) *Q is a ranked quiver,*
 (b) *$p : Q_0 \rightarrow \mathcal{P}_*(Z(Q))$ is one to one,*
 (c) *For every point x of Q we have $p(S(x)) = \mathcal{P}_*(p(x))$.*

Moreover, in that case $K = \bigcup_{x \in A(Q)} \mathcal{P}_*(p(x))$.

The second step is to use Stanley's characterisation of complexes of the form $\Delta(E)$ (see [25]) and Ghouilà-Houri characterisation of comparability graphs [14] to get the complete characterisation of posets of the form $\mathcal{O}\Delta(E)$. More precisely, we show the following.

3.2. Corollary. *Let Q be a finite quiver. Then, the following conditions are equivalent :*

1. *There is a finite poset $(E, \leq)$ such that $Q \simeq \mathcal{O}\Delta(E)$;*
2. *The quiver Q satisfies conditions of theorem (2.4), and*
 (d) *The graph $\overline{Q}$ whose vertices are pairs (a, b) of different sinks of Q such that $P^1(a) \cap P^1(b) \neq \emptyset$, and in which there is an edge joining (a, b) and (b, c) if and only if $a = c$ or $P^1(a) \cap P^1(c) = \emptyset$ is bipartite,*
 (e) *Every set V of sinks of Q such that $\bigcap_V P(v) = \emptyset$, but $\bigcap_{V' \subset V} P(v) \neq \emptyset$ for every proper subset of V , has 2 elements.*

We end section 3 by giving an explicit algorithm to determine the poset $(E, \leq)$ once we know $\mathcal{O}\Delta(E)$. This algorithm is that of Gilmore and Hoffman [15] expressed in terms of the Ghouilà-Houri graph $\overline{Q}$ [14].

Finally, in section 4, we use the results of sections 2 and 3 to characterise incidence algebras of the form $k\mathcal{O}\Delta(E)$, and give some examples of computations of Hochschild cohomology groups, and fundamental groups of incidence algebras.

BIBLIOGRAPHIE

1. I. Assem and J. A. de la Peña, *The fundamental groups of a triangular algebra*, Comm. Algebra **24** (1996); no. 1, 187–208.
2. I. Assem, M. I. Platzeck, M. J. Redondo and S. Trepode, *Simply connected incidence algebras*; Soumis pour publication (2002).
3. I. Assem and A. Skowroński, *On some classes of simply connected algebras*, Proc. London Math. Soc. **56** (1988); no. 3, 417–450.
4. M. Auslander, I. Reiten and S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
5. A. Björner, *Posets, regular CW complexes and Bruhat order*, European J. Combin. **5** (1984); no. 1, 7–16.
6. A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White and G. M. Ziegler, *Oriented matroids*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 46, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
7. K. Bongartz and P. Gabriel, *Covering spaces in representation-theory*, Invent. Math. **65** (1981-1982); no. 3, 331–378.
8. J. C. Bustamante, *The classifying space of a bound quiver*; Soumis pour publication.
9. J. C. Bustamante, *On the fundamental group of a Schurian algebra*, Comm. Algebra **30** (2002); no. 11, 5307–5329.
10. H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
11. C. Cibils, *Cohomology of incidence algebras and simplicial complexes*, J. Pure Appl. Algebra **56** (1989), 221–232.
12. J. A. de la Peña and M. Saorín, *On the first Hochschild cohomology group of an algebra*, Manuscripta Math. **104** (2001), 431–442.
13. M. Gerstenhaber and S. D. Schack, *Simplicial cohomology is Hochschild cohomology*, J. Pure Appl. Algebra **30** (1983), 143–156.
14. A. Ghoulia-Houri, *Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris **254** (1962), 1370–1371.
15. P. C. Gilmore and A. J. Hoffman, *A characterization of comparability graphs and of interval graphs*, Canad. J. Math. **16** (1964), 539–548.
16. D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 1404, Springer, Berlin, 1989, pp. 108–126.
17. K. Igusa and D. Zacharia, *On the cohomology of incidence algebras of partially ordered sets*, Comm. Algebra **18** (1990); no. 3, 873–887.
18. A. Koriyama, T. Minezaki and H. Narushima, *A necessary and sufficient condition for a simplicial complex to be an order complex and its checking computer algorithm*, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. **XX** (1985), 35–43.
19. I. R. Martins and J. A. de la Peña, *Comparing the simplicial and the Hochschild cohomologies of a finite-dimensional algebra*, J. Pure Appl. Algebra **138** (1999), 45–58.
20. R. Martínez-Villa and J. A. de la Peña, *The universal cover of a quiver with relations*, J. Pure Appl. Algebra **30** (1983), 277–292.
21. H. Narushima, *A proof of Stanley's characterization for a simplicial complex to be an order complex*, Proc. School Sci. Tokai Univ. **32** (1997), 7–10.
22. E. Reynaud, *Algebraic fundamental group and simplicial complexes*, J. Pure Appl. Algebra; À paraître.
23. J. J. Rotman, *An introduction to algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 119, Springer-Verlag, New York, 1988.

24. A. Skowroński, *Simply connected algebras and Hochschild cohomologies*, Proceedings of the Sixth International Conference on Representation of Algebras (Ottawa, ON., 1992); Carleton-Ottawa Math. Lecture Note Ser., vol. 14, Carleton Univ., Ottawa, ON, 1992, pp. 431–448.
25. R. P. Stanley, *Balanced Cohen-Macaulay complexes*, Trans. Amer. Math. Soc. **249** (1979); no. 1, 139–157.
26. J. W. Walker, *Topology and combinatorics of ordered sets*, Thèse de Ph. D. (M.I.T., Cambridge, MA.) (1996).

J. C. BUSTAMANTE, J. DIONNE ET D. SMITH
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
SHERBROOKE QC J1K 2R1
CANADA
COURRIELS : bustaman@dm1.usherb.ca
 dionne@dm1.usherb.ca
 smith@dm1.usherb.ca