

QUELQUES PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES ENSEMBLES DE NOMBRES À INVERSE ADDITIF COMPOSÉ

CLAUDE GAUTHIER

RÉSUMÉ. Les ensembles de nombres à inverse additif composé $\mathbf{A}_m$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, sont des généralisations des ensembles de nombres multicomplexes de Price [4]. Ces ensembles peuvent être vus comme des anneaux quotients de $\mathbb{R}[x]$. En désignant par φ la fonction totient d'Euler, on a que tout $\mathbf{A}_m$ tel que $\varphi(m) > 2$ comporte un sous-ensemble de diviseurs de zéro, que nous caractérisons de deux façons. Nous étudions similairement certaines extensions algébriques des $\mathbf{A}_p$, où p est un nombre premier de $\mathbb{N}$. Nous analysons enfin deux fonctions définies sur ces extensions et qui ont des propriétés un peu plus faibles que celles d'une valeur absolue.

ABSTRACT. The sets of numbers with compound additive inverse $\mathbf{A}_m$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, are generalizations of Price's sets of multicomplex numbers [4]. These sets can be seen as quotient rings of $\mathbb{R}[x]$. If φ denotes the Euler totient function, each set $\mathbf{A}_m$ such that $\varphi(m) > 2$ has a subset of zero divisors that we characterize in two different ways. We study similarly some algebraic extensions of the sets $\mathbf{A}_p$, where p is a prime number of $\mathbb{N}$. Finally, we examine two functions defined on these extensions and whose properties are a little weaker than those of an absolute value.

1. Introduction. Notre perception à la fois intuitive et naturelle de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ a grandement influencé le développement des mathématiques. Ainsi, la plupart des structures algébriques classiques ont été élaborées de façon à leur attribuer des propriétés similaires, ou opposées, à celles de $\mathbb{R}$. Par exemple, il est d'usage d'exiger que les éléments de ces ensembles forment un groupe abélien avec l'une des lois de composition interne de la structure considérée.

Dans le présent article, nous examinons quelques propriétés algébriques d'ensembles de nombres munis d'une addition et d'une multiplication, mais où chaque nombre possède un inverse additif composé, c'est-à-dire qui s'exprime comme une somme d'éléments fondamentaux pour l'addition. Nous admettons que l'inverse multiplicatif de tout nombre de ces ensembles est de la forme simple usuelle, c'est-à-dire formé d'un seul élément fondamental pour la multiplication.

Notre étude des propriétés algébriques de ces ensembles n'est pas exhaustive. Les propriétés examinées ici sont celles qui sont utiles au développement de certains aspects de l'analyse mathématique sur ces ensembles ([1, 2]).

Reçu le 20 septembre 1999 et, sous forme définitive, le 20 décembre 2001.

2. Les nombres addisymétriques. Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Considérons m copies du monoïde $\mathbf{M}$ formé de l'ensemble des nombres réels positifs $\mathbb{R}_+$ avec l'addition et supposons que ces monoïdes partagent le même élément neutre. Ces monoïdes peuvent être représentés géométriquement par m copies du demi-axe $\mathbb{R}_+$ munies d'une origine commune. Si $a \in \mathbb{R}_+$ et $k \in I(m) = \{0, 1, \dots, m-1\}$, l'expression $a^{(k)}_m$ représentera un nombre quelconque du k -ième des m monoïdes $\mathbf{M}$. Pour simplifier l'écriture, nous désignerons $a^{(k)}_m$ par $a^{(k)}$ et $a^{(0)}$ sera souvent notée a , si aucune confusion ne risque de s'ensuivre.

Une multiplication des éléments $1^{(k)}$, $k \in I(m)$, qui généralise celle définie sur $\mathbb{R}$ s'obtient en imposant aux indices des $1^{(k)}$ de former le groupe cyclique $\mathbb{Z}_m$ avec l'addition modulo m :

$$1^{(k_1)} 1^{(k_2)} = 1^{((k_1+k_2) \pmod m)}, \quad (1)$$

où $k_1, k_2 \in I(m)$.¹ En plus de (1), nous admettrons que les éléments $1^{(k)}$ satisfont :

$$\sum_{k \in I_n(m)} 1^{(k)} = 0 \quad (2)$$

où $I_n(m)$ est le sous-ensemble des multiples de n dans $I(m)$, pour tout $n|m$, $n < m$.

Nous appelons nombre m -addisymétrique tout élément $\sum_{k \in I(m)} a_k^{(k)}$ du produit cartésien des m monoïdes $\mathbf{M}$. Les nombres m -addisymétriques $\sum_{k \in I(m)} a_k^{(k)}$ et $\sum_{k \in I(m)} b_k^{(k)}$ seront dits équivalents s'ils diffèrent par une combinaison linéaire d'expressions de la forme $\sum_{k \in I_n(m)} 1^{(k)}$, où $n|m$ et $n < m$. Nous écrirons alors

$$\sum_{k \in I(m)} a_k^{(k)} = \sum_{k \in I(m)} b_k^{(k)}.$$

L'ensemble des nombres m -addisymétriques, noté $\mathbf{A}_m$, peut être vu comme l'ensemble des classes d'équivalence des expressions $\sum_{k \in I(m)} a_k^{(k)}$ modulo les relations (2).

Pour tout $\sum_{k \in I(m)} a_k^{(k)} \in \mathbf{A}_m$, il existe un $\sum_{k \in I(m)} \hat{a}_k^{(k)} \in \mathbf{A}_m$ tel que

$$\sum_{k \in I(m)} a_k^{(k)} + \sum_{k \in I(m)} \hat{a}_k^{(k)} = \sum_{k \in I(m)} \hat{a}_k^{(k)} + \sum_{k \in I(m)} a_k^{(k)} = 0.$$

Il suffit en effet de prendre $\hat{a}_k = \sum_{j \in I(m), j \neq k} a_j$, $k \in I(m)$. Il est facile de voir que l'inverse additif de tout nombre de $\mathbf{A}_m$ est unique dans $\mathbf{A}_m$. En général, l'inverse additif dans $\mathbf{A}_m$ sera un nombre composé, c'est-à-dire un nombre m -addisymétrique qui est la somme d'éléments appartenant à plus d'un des m monoïdes $\mathbf{M}$.

Si $m = p$ est un nombre premier de $\mathbb{N}$ et $\langle a_k \rangle = a_k - \min_{j \in I(p)} \{a_j\}$ alors $\sum_{k \in I(p)} \langle a_k \rangle^{(k)}$ sera appelé expression réduite de $\sum_{k \in I(p)} a_k^{(k)}$. Le nombre $\langle a_k \rangle \in \mathbb{R}_+$ sera appelé k -ième coordonnée de $\sum_{k \in I(p)} a_k^{(k)}$. Nous dirons qu'un nombre p -addisymétrique est primaire si son expression réduite est un nombre de $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire

¹La multiplication des $1^{(k)}$ peut se définir autrement. Pour ce faire, il suffit de fixer l'indice du second membre de (1) suivant un groupe autre que $\mathbb{Z}_m$. Bien entendu, cette façon de procéder conduit à des ensembles de nombres différents de ceux décrits dans le présent article. Pour la définition d'une multiplication encore plus générale, voir [3], chapitre 7.

si

$$\sum_{k \in I(p)} a_k^{(k)} = \langle a_0 \rangle.$$

De même, nous dirons que $\sum_{k \in I(p)} a_k^{(k)}$ est antiprimaire si son expression réduite est l'inverse additif d'un nombre primaire.

En admettant la distributivité à gauche et à droite de la multiplication sur l'addition, la définition (1) permet de calculer le produit de n'importe quel couple de nombres de $\mathbf{A}_m$. Pour tous $a_{k_1}, b_{k_2} \in \mathbb{R}_+$, où $k_1, k_2 \in I(m)$, on obtient :

$$\left(\sum_{k_1 \in I(m)} a_{k_1}^{(k_1)} \right) \left(\sum_{k_2 \in I(m)} b_{k_2}^{(k_2)} \right) = \sum_{k \in I(m)} \left(\sum_{\substack{k_1, k_2 \in I(m) \\ k_1 + k_2 \equiv k \pmod{m}}} a_{k_1} b_{k_2} \right)^{(k)}. \quad (3)$$

Définissons maintenant le produit de $a_0^{(0)_2} + a_1^{(1)_2} \in \mathbf{A}_2$ par $\sum_{k \in I(m)} b_k^{(k)_m} \in \mathbf{A}_m$. Si l'expression réduite de $a_0^{(0)_2} + a_1^{(1)_2}$ est $\langle a_0 \rangle^{(0)_2}$, ce produit est défini par $\sum_{k \in I(m)} (\langle a_0 \rangle b_k)^{(k)_m}$. Si l'expression réduite de $a_0^{(0)_2} + a_1^{(1)_2}$ est $\langle a_1 \rangle^{(1)_2}$, ce produit est $\sum_{k \in I(m)} (\langle a_1 \rangle \widehat{b}_k)^{(k)_m}$, où $\widehat{b}_k = \sum_{j \in I(m), j \neq k} b_j$ pour $k \in I(m)$. Avec l'addition coordonnée à coordonnée et la multiplication d'un élément de $\mathbf{A}_2$ par un élément de $\mathbf{A}_m$ définie ci-dessus, on a que tout $\mathbf{A}_m$ forme un espace vectoriel de dimension $\varphi(m)$ sur $\mathbf{A}_2$, où φ désigne la fonction totient d'Euler. Cet espace vectoriel sera noté $\mathbf{A}_{2;m}$.

On désigne par $\mathbb{R}[x]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et par $\langle \Phi_m(x) \rangle$ l'idéal engendré par le polynôme cyclotomique d'ordre m . Les relations (1) et (2) montrent que $\mathbf{A}_m$ peut être vu comme la généralisation de l'ensemble des nombres cyclotomiques d'ordre m résultant de l'extension, de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, du corps à partir duquel ces nombres sont définis. Nous avons en fait que les ensembles $\mathbf{A}_m$ et $\mathbb{R}[x]/\langle \Phi_m(x) \rangle$ sont des algèbres de dimension $\varphi(m)$ ayant chacune un sous-ensemble générateur qui vérifie les mêmes équations cyclotomiques : cela y définit la même multiplication. Il s'ensuit que

$$\mathbf{A}_m \simeq \mathbb{R}[x]/\langle \Phi_m(x) \rangle. \quad (4)$$

Ainsi $\mathbf{A}_2$ est un corps isomorphe à $\mathbb{R}$, alors que $\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ et $\mathbf{A}_6$ sont des corps isomorphes à $\mathbb{C}$. On a aussi que tous les autres $\mathbf{A}_m$, $\varphi(m) \geq 4$, sont des anneaux commutatifs ayant des diviseurs de zéro.

Précisons la nature de l'ensemble des diviseurs de zéro de $\mathbf{A}_m$, $\varphi(m) \geq 4$. On peut d'abord remarquer que le polynôme cyclotomique associé à $\mathbf{A}_m$ s'exprime comme un produit de $\varphi(m)/2$ polynômes quadratiques irréductibles dans $\mathbb{R}$, notés $\theta_{m,k}(x)$. Or $\mathbb{R}[x]/\langle \theta_{m,k} \rangle \simeq \mathbb{C}$ pour $k = 1, 2, \dots, \varphi(m)/2$. Ainsi $\mathbf{A}_m$ s'écrit comme une somme directe de $\varphi(m)/2$ quotients de $\mathbb{R}[x]$ par des idéaux, qui sont tous des corps isomorphes à $\mathbb{C}$. Pour $m > 2$, on a alors :

$$\mathbf{A}_m \simeq \bigoplus_{j=1}^{\varphi(m)/2} \mathbb{C}. \quad (5)$$

Soit $a, b \in \mathbf{A}_m$ tels que $ab = 0$. Selon l'isomorphisme (4), il existe des polynômes $p_a(x), p_b(x) \in \mathbb{R}[x]$ dont les classes d'équivalence modulo $\Phi_m(x)$ correspondent

respectivement à a et b et sont tels que $p_a(x)p_b(x) \in \langle \Phi_m(x) \rangle$. Le polynôme $p_a(x)p_b(x)$ contient donc tous les facteurs quadratiques irréductibles de $\Phi_m(x)$. Ainsi, pour tout $k = 1, 2, \dots, \varphi(m)/2$, on a que $\theta_{m,k}(x)|p_a(x)p_b(x)$ de sorte que $\theta_{m,k}(x)|p_a(x)$ ou $\theta_{m,k}(x)|p_b(x)$. Si $\theta_{m,k}(x)|p_a(x)$ alors la classe d'équivalence de $p_a(x)$ est nulle dans $\mathbb{R}[x]/\langle \theta_{m,k}(x) \rangle$ et $p_b(x) \in \text{Ann}(\mathbb{R}[x]/\langle \theta_{m,k}(x) \rangle)$, où $\text{Ann}(X)$ désigne l'annulateur de X . De même si $\theta_{m,k}(x)|p_b(x)$. Or

$$\text{Ann}(\mathbb{R}[x]/\langle \theta_{m,k}(x) \rangle) = \left\langle \prod_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^{\varphi(m)/2} \theta_{m,j}(x) \right\rangle.$$

En notant $\mathbf{A}_m^\circ$ l'ensemble des diviseurs de zéro de $\mathbf{A}_m$, nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème 1. *Si $\varphi(m) \geq 4$ alors $\mathbf{A}_m^\circ$ est l'union de $\varphi(m)/2$ sous-espaces de codimension 2 de $\mathbf{A}_{2;m}$.*

Désignons par $\mathbf{A}_m^*$ l'ensemble des non-diviseurs de zéro de $\mathbf{A}_m$. Puisque tout $\mathbf{A}_m$ possède un élément neutre pour la multiplication, à savoir 1, tout non-diviseur de zéro y est inversible. L'inverse multiplicatif de $a \in \mathbf{A}_m^*$, noté $1/a$, est défini par la solution $x \in \mathbf{A}_m^*$ de l'équation $ax = 1$.

Les ensembles $\mathbf{A}_m$ généralisent les ensembles de nombres multicomplexes d'ordre $k - 1$ de [4] ; ces derniers coïncident avec les $\mathbf{A}_{2^k}$. Les éléments de $\mathbf{A}_8$ sont aussi appelés tétranombres [5].

Nous examinerons maintenant le cas où $m = p$ est un nombre premier de $\mathbb{N}$. Associons à chaque $\sum_{k \in I(p)} a_k^{(k)} \in \mathbf{A}_p$, $p > 2$, les nombres de $\mathbf{A}_p$ donnés par $\sum_{k \in I(p)} a_k^{(jk)}$, $j \in I(p)$, $j \neq 0, 1$. Ces nombres seront appelés conjugués p -addisymétriques de $\sum_{k \in I(p)} a_k^{(k)}$. On peut étendre cette définition à $\mathbf{A}_2$ en disant que tout nombre de cet ensemble est son propre conjugué 2-addisymétrique. Ceci étant, nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 2. *Le produit de tout nombre de $\mathbf{A}_p$ avec ses conjugués p -addisymétriques est un nombre p -addisymétrique primaire ou antiprimaire.*

Démonstration. Le cas $p = 2$ étant direct, nous supposons que $p > 2$. Soit

$$\sum_{k \in I(p)} a_k^{(k)} \in \mathbf{A}_p \quad \text{et} \quad f(1^{(j)}) = \sum_{k \in I(p)} a_k^{(jk)}, \quad j \in I^*(p) = I(p) \setminus \{0\}.$$

Le produit de $\sum_{k \in I(p)} a_k^{(k)}$ avec ses conjugués p -addisymétriques peut alors s'écrire :

$$\prod_{j \in I^*(p)} \left(\sum_{k \in I(p)} a_k^{(jk)} \right) = f(1^{(1)})f(1^{(2)}) \cdots f(1^{(p-1)}) = b_0^{(0)} + b_1^{(1)} + \cdots + b_{p-1}^{(p-1)}, \quad (6)$$

où $b_k \in \mathbb{R}_+$ pour $k \in I(p)$. Les relations (1) et (2) montrent que les conditions auxquelles satisfait $1^{(1)}$ se résument à vérifier les équations :

$$x^p = 1 \quad \text{et} \quad x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = 0. \quad (7)$$

Il est clair que les exposants $k \in I(p)$ de x dans la deuxième équation donnée en (7) constituent un système complet de restes modulo p . Il s'ensuit que pour tout $j \in I^*(p)$ les nombres $jk, k \in I(p)$, forment aussi un système complet de restes modulo p . Pour chaque $j \in I^*(p)$, si l'on remplace les exposants $k \in I(p)$ de x dans la deuxième équation donnée en (7) par jk , en tenant compte de la première équation donnée en (7), on retrouvera donc toutes les puissances $k \in I(p)$ de x , qui seront sommées selon un ordre propre à chaque j . Ceci montre que pour tout $\gamma \in \mathbf{A}_p$ vérifiant les équations (7), on a que $\gamma^2, \gamma^3, \dots, \gamma^{p-1}$ les vérifient aussi. Toute opération de conjugaison dans $\mathbf{A}_p$ revient ainsi à un changement de solution, dans $\mathbf{A}_p$, des équations (7) pour exprimer les nombres de $\mathbf{A}_p$. Chaque conjugaison $1^{(1)} \rightarrow 1^{(l)}, l \in I^*(p)$, équivaut donc à une permutation des facteurs du premier membre de (6), ce qui ne change pas la valeur de ce produit. Ainsi

$$\prod_{j \in I^*(p)} \left(\sum_{k \in I(p)} a_k^{(jk)} \right) = \prod_{j \in I^*(p)} \left(\sum_{k \in I(p)} a_k^{(jkl)} \right), \quad l \in I^*(p), \quad (8)$$

c'est-à-dire

$$b_0^{(0)} + b_1^{(1)} + \dots + b_{p-1}^{(p-1)} = b_0^{(0)} + b_1^{(l)} + \dots + b_{p-1}^{(l(p-1))}, \quad l \in I^*(p),$$

d'où

$$b_0^{(0)} + b_l^{(l)} + \dots + b_{l(p-1)(\text{mod } p)}^{(l(p-1)(\text{mod } p))} = b_0^{(0)} + b_1^{(l)} + \dots + b_{p-1}^{(l(p-1))}, \quad l \in I^*(p). \quad (9)$$

Les deux membres de (9) représentent le même nombre p -addisymétrique. Puisque leurs premières coordonnées sont identiques, les autres le seront également. Par conséquent $b_l = b_1$ pour tout $l \in I^*(p)$ et

$$\begin{aligned} b_0^{(0)} + b_1^{(1)} + \dots + b_{p-1}^{(p-1)} &= b_0^{(0)} + b_1^{(1)} + \dots + b_1^{(p-1)} \\ &= b_0^{(0)} + b_1(1^{(1)} + \dots + 1^{(p-1)}). \end{aligned} \quad (10)$$

Si $b_1 \leq b_0$ alors (10) est un nombre p -addisymétrique primaire. Si $b_1 > b_0$, ce nombre est antiprimaire. $\square$

Le théorème suivant permet de caractériser les diviseurs de zéro de $\mathbf{A}_p$ en termes du produit des conjugués p -addisymétriques.

Théorème 3. *Le produit de tout nombre de $\mathbf{A}_p$ avec ses conjugués p -addisymétriques est nul si, et seulement si, ce nombre appartient à $\mathbf{A}_p^\circ$.*

Démonstration. Les cas $p = 2$ et $p = 3$ suivent directement du fait que $\mathbf{A}_2 \simeq \mathbb{R}$ et $\mathbf{A}_3 \simeq \mathbb{C}$. Supposons donc $p \geq 5$ et soit $\sum_{k \in I(p)} a_k^{(k)} \in \mathbf{A}_p^\circ$, de sorte qu'il existe un $\sum_{k \in I(p)} b_k^{(k)} \in \mathbf{A}_p = \mathbf{A}_p \setminus \{0\}$ tel que :

$$\left(\sum_{k \in I(p)} a_k^{(k)} \right) \left(\sum_{k \in I(p)} b_k^{(k)} \right) = 0. \quad (11)$$

Selon le théorème 2, le produit de $\sum_{k \in I(p)} a_k^{(k)}$ avec ses conjugués p -addisymétriques est un nombre p -addisymétrique primaire ou antiprimaire, que nous désignerons par a . Si a est primaire, on tire alors de (11) que

$$a \sum_{k \in I(p)} b_k^{(k)} = \sum_{k \in I(p)} (ab_k)^{(k)} = 0. \quad (12)$$

Puisque les $b_k, k \in I(p)$, ne sont pas tous égaux entre eux et que les $ab_k, k \in I(p)$, le sont, on doit avoir $a = 0$. Si a est antiprimaire, on arrive au même résultat en remplaçant a , dans (12), par son inverse additif $\hat{a}$.

Soit maintenant $f(1^{(j)}) = \sum_{k \in I(p)} a_k^{(jk)}$ pour $j \in I^*(p)$ et supposons que

$$f(1^{(1)})f(1^{(2)}) \dots f(1^{(p-1)}) = 0, \quad (13)$$

où $f(1^{(1)}) \neq 0$. Si $f(1^{(1)})$ n'est pas un diviseur de zéro de $\mathbf{A}_p$, on obtient de (13) que

$$f(1^{(2)})f(1^{(3)}) \dots f(1^{(p-1)}) = 0. \quad (14)$$

Appliquons à (14) la conjugaison p -addisymétrique qui transforme $f(1^{(2)})$ en $f(1^{(1)})$; il s'ensuit que $f(1^{(1)})f(1^{(i_{1,1})}) \dots f(1^{(i_{1,p-3})}) = 0$, où $i_{1,j} \in \{2, 3, \dots, p-1\}$ pour $j = 1, 2, \dots, p-3$. Or, par hypothèse, $f(1^{(1)})$ n'est pas un diviseur de zéro de sorte que $f(1^{(i_{1,1})})f(1^{(i_{1,2})}) \dots f(1^{(i_{1,p-3})}) = 0$. Le même raisonnement appliqué $p-2$ fois conduit à $f(1^{(1)})f(1^{(i_{p-2,1})}) = 0$, où $i_{p-2,1} \in \{2, 3, \dots, p-1\}$; il s'ensuit que $f(1^{(i_{p-2,1})}) = 0$. On obtient donc un conjugué p -addisymétrique de $\sum_{k \in I(p)} a_k^{(k)}$ qui est nul. Ceci entre en contradiction avec le fait que tous les conjugués p -addisymétriques d'un nombre non nul sont eux-mêmes non nuls. Par conséquent $f(1^{(1)}) \in \mathbf{A}_p^\circ$. $\square$

Théorème 4. *Tous les éléments de $\mathbf{A}_p^*$ possèdent un inverse multiplicatif dans $\mathbf{A}_p^*$.*

Démonstration. Pour tout $a \in \mathbf{A}_p$, considérons la fonction $T_a : \mathbf{A}_{2;p} \rightarrow \mathbf{A}_{2;p}$ définie par $T_a(b) = ab$. Il est facile de voir que cette fonction est une transformation linéaire. Pour tout $a \in \mathbf{A}_p$, on a donc :

$$\dim(\text{Ker } T_a) + \dim(\text{Ima } T_a) = \dim \mathbf{A}_{2;p} = p - 1.$$

Soit maintenant $a \in \mathbf{A}_p^*$. On a alors que $T_a(b) \neq 0$ pour tout $b \in \mathbf{A}_p^*$ de sorte que $\dim(\text{Ima } T_a) = p - 1$. Or $\text{Ima } T_a \subseteq \mathbf{A}_{2;p}$, d'où $\text{Ima } T_a = \mathbf{A}_{2;p}$. Il s'ensuit que $1 \in \text{Ima } T_a$, d'où $1/a \in \mathbf{A}_p$. Si $1/a \in \mathbf{A}_p^\circ$ alors il existe un $b \in \mathbf{A}_p^*$ tel que $(1/a)b = 0$. Mais, dans ce cas : $a(1/a)b = b = 0$, ce qui contredit le fait que $b \in \mathbf{A}_p^*$. Par conséquent $1/a \in \mathbf{A}_p^*$. $\square$

3. Des extensions algébriques de $\mathbf{A}_p$. Les équations du type $x^p = 1^{(\nu)}$, $\nu \in I^*(p)$, n'ont aucune solution dans $\mathbf{A}_p$ qui s'exprime à l'aide d'une seule coordonnée. On peut produire de telles solutions à l'intérieur d'extensions algébriques de $\mathbf{A}_p$. Ces extensions, notées $\mathbf{E}_{p,\nu}$, s'obtiennent par l'adjonction de la racine p -ième non composée de $1^{(\nu)}$, $\nu \in I^*(p)$, que nous désignerons par $s_{p,\nu}$. On montre aisément que toutes ces extensions sont isomorphes entre elles et que $\mathbf{E}_{p,\nu} \simeq \mathbf{A}_p[x]/\langle x^p - {}_p 1^{(\nu)} \rangle$, où $-{}_p 1 = \sum_{k \in I^*(p)} 1^{(k)}$ désigne l'inverse additif de 1 dans $\mathbf{A}_p$. On a aussi que $\mathbf{E}_{p,\nu} \simeq \mathbb{R}[x]/\langle \Phi_{p^2}(x) \rangle$, d'où,

selon (4), $\mathbf{E}_{p,\nu} \simeq \mathbf{A}_{p^2}$. De (5), on tire alors que chaque $\mathbf{E}_{p,\nu}$, $\nu \in I^*(p)$, s'exprime par une somme directe de $(p-1)p/2$ idéaux isomorphes à $\mathbb{C}$.

Si $\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k$, $\sum_{k \in I(p)} b_k s_{p,\nu}^k \in \mathbf{E}_{p,\nu}$, où $a_k, b_k \in \mathbf{A}_p$ pour $k \in I(p)$, alors le produit de ces nombres est donné par :

$$\left(\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k \right) \left(\sum_{k \in I(p)} b_k s_{p,\nu}^k \right) = \sum_{k \in I(p)} \left(\sum_{\substack{k_1, k_2 \in I(p) \\ k_1 + k_2 \equiv k \pmod{p}}} a_{k_1} b_{k_2}^{(r(\mu, k, k_1))} \right) s_{p,\nu}^k, \quad (15)$$

où $r(\nu, k, k_1) = 0$, si $k_1 \leq k$, et $r(\nu, k, k_1) = \nu$, si $k_1 > k$. Avec l'addition coordonnée à coordonnée et la multiplication (15), chaque $\mathbf{E}_{p,\nu}$ a la structure algébrique d'un module unitaire de dimension p sur l'anneau $\mathbf{A}_p$ et l'ensemble $\{1, s_{p,\nu}, s_{p,\nu}^2, \dots, s_{p,\nu}^{p-1}\}$ en est une base. Puisque tout $\mathbf{A}_p$ s'exprime comme un espace vectoriel de dimension $p-1$ sur le corps $\mathbf{A}_2$, l'ensemble $\mathbf{E}_{p,\nu}$ est aussi un espace vectoriel de dimension $(p-1)p$ sur $\mathbf{A}_2$. Cet espace vectoriel sera noté $\mathbf{E}_{2;p,\nu}$. On montre aisément qu'aucun des anneaux $\mathbf{E}_{p,\nu}$ n'est intègre si $p \geq 3$; l'anneau $\mathbf{E}_{2,1}$ est pour sa part un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

Désignons par $\mathbf{E}_{p,\nu}^\circ$ l'ensemble des diviseurs de zéro de $\mathbf{E}_{p,\nu}$. Puisque $\mathbf{E}_{p,\nu} \simeq \mathbf{A}_{p^2}$, on obtient immédiatement du paragraphe précédent que si $p \geq 3$ alors l'ensemble $\mathbf{E}_{p,\nu}^\circ$ est l'union de $(p-1)p/2$ sous-espaces de codimension 2 de $\mathbf{E}_{2;p,\nu}$. Désignons par $\mathbf{E}_{p,\nu}^*$ l'ensemble des non-diviseurs de zéro de $\mathbf{E}_{p,\nu}$. L'inverse multiplicatif de $a \in \mathbf{E}_{p,\nu}^*$ est défini par la solution $x \in \mathbf{E}_{p,\nu}^*$ de l'équation $ax = 1$. Cet inverse sera noté $1/a$.

À tout $\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k \in \mathbf{E}_{p,\nu}$, associons les nombres $\sum_{k \in I(p)} a_k^{(jk)} s_{p,\nu}^k$, $j \in I^*(p)$, que nous appellerons ses conjugués dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$. Le lemme 1 permettra de montrer que le produit de tout nombre de $\mathbf{E}_{p,\nu}$ avec ses $p-1$ conjugués dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$ est un nombre p -addisymétrique.

Lemme 1. *Le produit de tout $\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k \in \mathbf{E}_{p,\nu}$ avec ses $p-1$ conjugués dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$ s'exprime par le déterminant de la matrice circulaire :*

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 s_{p,\nu} & \dots & a_{p-1} s_{p,\nu}^{p-1} \\ a_{p-1} s_{p,\nu}^{p-1} & a_0 & \dots & a_{p-2} s_{p,\nu}^{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 s_{p,\nu} & a_2 s_{p,\nu}^2 & \dots & a_0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Démonstration. Considérons les matrices diagonales Ω_j , $j \in I(p)$, dont les éléments non nuls sont $(\omega_{ii})_j = 1^{(ij)}$, $i \in I(p)$. Les éléments non nuls de Ω_j^{-1} , la matrice inverse de Ω_j , sont alors $(\omega_{ii})_j^{-1} = 1^{((p-i)j)}$, $i \in I(p)$. Il s'ensuit que $\det(\Omega_j^{-1}) = 1^{((j(p-1)p/2)(\text{mod } p))}$, d'où $\det(\Omega_j^{-1} A \Omega_j) = \det A$. La double multiplication dont le produit est $\Omega_j^{-1} A \Omega_j$ a pour effet de remplacer chaque élément $a_i s_{p,\nu}^i$ de A par $a_i^{(ij)} s_{p,\nu}^i$.

Notons maintenant que la valeur du déterminant d'une matrice est invariante lorsque à n'importe quelle de ses lignes est additionné un multiple constant de toute autre ligne de cette matrice. Additionnant à la première ligne de $\Omega_j^{-1} A \Omega_j$ chacune de ses $p-1$ autres lignes, on obtient que chaque élément de la ligne résultante est donné par $\sum_{i \in I(p)} a_i^{(ij)} s_{p,\nu}^i$, et ceci pour tout $j \in I(p)$. Chacune de ces p expressions sera donc un facteur de $\det A$. Puisque a_0 fait partie de chacune de ces expressions, la multiplication

de ces dernières comportera un terme en a_0^p . Or le produit des éléments de la diagonale de A montre que $\det A$ contient aussi un terme en a_0^p . La coïncidence des coefficients de a_0^p dans ces deux expressions complète la démonstration de l'identité :

$$\det A = \prod_{j \in I(p)} \left(\sum_{i \in I(p)} a_i^{(ij)} s_{p,\nu}^i \right). \quad \square$$

Théorème 5. *Le produit de tout $\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k \in \mathbf{E}_{p,\nu}$ avec ses $p-1$ conjugués dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$ est donné par le nombre p -addisymétrique :*

$$\sum_{k \in I(p)} \left(\sum_{\substack{k_0, k_1, \dots, k_{p-1} \in I(p) \\ 0k_0 + 1k_1 + \dots + (p-1)k_{p-1} \equiv k \pmod{p} \\ k_0 + k_1 + \dots + k_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}}} a_{k_0} a_{k_1} \dots a_{k_{p-1}}^{(\nu N(k_0, k_1, \dots, k_{p-1}))} \right)^{(k)},$$

où $N(k_0, k_1, \dots, k_{p-1})$ est une fonction surjective prenant ses valeurs dans $I(p)$.

Démonstration. La multiplication de tout $\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k \in \mathbf{E}_{p,\nu}$ par ses $p-1$ conjugués dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$ donne d'abord :

$$\prod_{j \in I(p)} \left(\sum_{k_j \in I(p)} a_{k_j}^{(jk_j)} s_{p,\nu}^{k_j} \right) = \sum_{k \in I(p)} \left(\sum_{\substack{k_0, k_1, \dots, k_{p-1} \in I(p) \\ 0k_0 + 1k_1 + \dots + (p-1)k_{p-1} \equiv k \pmod{p}}} a_{k_0} a_{k_1} \dots a_{k_{p-1}} s_{p,\nu}^{k_0 + k_1 + \dots + k_{p-1}} \right)^{(k)}. \quad (17)$$

Selon le lemme 1, le produit ci-dessus s'exprime aussi par $\det A$, où A est la matrice de (16). Or le calcul de $\det A$ fait intervenir des produits comportant p éléments de A tels que seulement l'un d'eux provient de chaque ligne et de chaque colonne de A . Si $(i; j)$, $i, j \in I(p)$, désignent les indices des éléments de A et $l_0, l_1, \dots, l_{p-1}$ prennent toutes les valeurs de $I(p)$ alors $(0; l_0), (1; l_1), \dots, (p-1; l_{p-1})$ correspondent aux éléments d'un produit quelconque figurant dans le calcul de $\det A$. Notons que l'indice du a et l'exposant du $s_{p,\nu}$ de l'élément de A correspondant à $(i; j)$ valent $j-i$ si $i \leq j$, ou $p+j-i$ si $i > j$. Il s'ensuit que la somme des indices de a , ou des exposants de $s_{p,\nu}$, des éléments de A composant le produit associé aux couples $(0; l_0), (1; l_1), \dots, (p-1; l_{p-1})$ différera toujours d'un multiple de p par : $l_0 - 0 + l_1 - 1 + \dots + l_{p-1} - (p-1)$, c'est-à-dire 0, car les $l_0, l_1, \dots, l_{p-1}$ prennent toutes les valeurs de $I(p)$. Les seuls produits intervenant dans le calcul de $\det A$ seront donc ceux où la somme des indices de $a_{k_0} a_{k_1} \dots a_{k_{p-1}}$ est un multiple de p , c'est-à-dire les produits tels que $k_0 + k_1 + \dots + k_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$. Si ce multiple de p est noté $N(k_0, k_1, \dots, k_{p-1})$, il s'ensuit que dans (17) on a $s_{p,\nu}^{k_0 + k_1 + \dots + k_{p-1}} = (1^{(\nu)})^{N(k_0, k_1, \dots, k_{p-1})}$. $\square$

Le théorème suivant permet de caractériser les diviseurs de zéro de $\mathbf{E}_{p,\nu}$ en termes du produit des conjugués dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$.

Théorème 6. *Le produit de tout $z \in \mathbf{E}_{p,\nu}$ avec ses conjugués dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$ est un nombre de $\mathbf{A}_p^\circ$ si, et seulement si, $z \in \mathbf{E}_{p,\nu}^\circ$.*

Démonstration. Le cas où $p = 2$ découle du fait que $\mathbf{E}_{2,1} \simeq \mathbb{C}$. Supposons donc $p \geq 3$ et soit $z = \sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k \in \mathbf{E}_{p,\nu}^\circ$. On a alors qu'il existe un $\sum_{k \in I(p)} b_k s_{p,\nu}^k \in \mathbf{E}_{p,\nu}^* = \mathbf{E}_{p,\nu} \setminus \{0\}$ tel que

$$\left(\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k \right) \left(\sum_{k \in I(p)} b_k s_{p,\nu}^k \right) = 0. \quad (18)$$

Selon le théorème 5, le produit de $\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k$ avec ses conjugués dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$ est un nombre p -addisymétrique que nous désignerons par a . De (18), il s'ensuit que

$$a \left(\sum_{k \in I(p)} b_k s_{p,\nu}^k \right) = \sum_{k \in I(p)} a b_k s_{p,\nu}^k = 0.$$

Puisque $\{1, s_{p,\nu}, \dots, s_{p,\nu}^{p-1}\}$ est une base du module $\mathbf{E}_{p,\nu}$ sur $\mathbf{A}_p$, il vient que $a b_k = 0$, $k \in I(p)$. Or $\sum_{k \in I(p)} b_k s_{p,\nu}^k \in \mathbf{E}_{p,\nu}^*$, de sorte que les b_k , $k \in I(p)$, ne peuvent pas tous être nuls. Par conséquent, il existe un $b_{k_0} \in \mathbf{A}_p^*$, $k_0 \in I(p)$, tel que $a b_{k_0} = 0$, d'où $a \in \mathbf{A}_p^\circ$.

Soit maintenant $F(1^{(j)}) = \sum_{k \in I(p)} a_k^{(jk)} s_{p,\nu}^k$ pour $j \in I(p)$ et supposons que $F(1^{(0)}) \neq 0$ et $F(1^{(0)})F(1^{(1)}) \dots F(1^{(p-1)}) \in \mathbf{A}_p^\circ$. On a alors qu'il existe un $B \in \mathbf{E}_{p,\nu}^*$ tel que $F(1^{(0)})F(1^{(1)}) \dots F(1^{(p-1)})B = 0$. Si $F(1^{(0)})$ n'est pas un diviseur de zéro de $\mathbf{E}_{p,\nu}$, il vient que $F(1^{(1)})F(1^{(2)}) \dots F(1^{(p-1)})B = 0$. Appliquant la conjugaison dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$ qui transforme $F(1^{(1)})$ en $F(1^{(0)})$, on trouve que

$$F(1^{(0)})F(1^{(i_{1,1})}) \dots F(1^{(i_{1,p-2})})B_1 = 0,$$

où $i_{1,j} \in I^*(p)$ pour $j = 1, 2, \dots, p-2$ et $B_1 \in \mathbf{E}_{p,\nu}^*$. Or, par hypothèse, $F(1^{(0)})$ n'est pas un diviseur de zéro, de sorte que $F(1^{(i_{1,1})})F(1^{(i_{1,2})}) \dots F(1^{(i_{1,p-2})})B_1 = 0$. Le même raisonnement appliqué p fois conduit à $F(1^{(0)})B_p = 0$, où $B_p \in \mathbf{E}_{p,\nu}^*$. Ainsi $F(1^{(0)}) \in \mathbf{E}_{p,\nu}^\circ$. $\square$

Théorème 7. *Tous les éléments de $\mathbf{E}_{p,\nu}^*$ possèdent un inverse multiplicatif dans $\mathbf{E}_{p,\nu}^*$.*

Démonstration. Elle est identique à celle du théorème 4. $\square$

4. Préaleur et quasi-valeur absolues. Nous définissons maintenant sur $\mathbf{E}_{p,\nu}$ deux fonctions qui ont des propriétés un peu plus faibles que celles d'une valeur absolue.

La p -préaleur absolue est définie comme étant une fonction de $\mathbf{E}_{p,\nu}$ sur $\mathbb{R}_+$, notée $x \mapsto \|x\|_p$, qui satisfait aux conditions : i) $\|x\|_p = 0$ si, et seulement si, $x = 0$; ii) $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$; iii) $\|xy\|_p \leq \|x\|_p \|y\|_p$, quels que soient $x, y \in \mathbf{E}_{p,\nu}$.

Théorème 8. *Si $\langle a_{k,j} \rangle$, $j \in I(p)$, représentent les coordonnées de l'expression réduite de $a_k \in \mathbf{A}_p$, $k \in I(p)$, alors la fonction $x \mapsto \|x\|_p$ de $\mathbf{E}_{p,\nu}$ sur $\mathbb{R}_+$ définie par :*

$$\left\| \sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k \right\|_p = \sum_{k \in I(p)} \left(\sum_{j \in I(p)} \langle a_{k,j} \rangle \right) \quad (19)$$

est une p -prévaleur absolue sur $\mathbf{E}_{p,\nu}$.

Démonstration. Soit $\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k, \sum_{k \in I(p)} b_k s_{p,\nu}^k \in \mathbf{E}_{p,\nu}$.

i) Si $\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k = 0$ alors tous les a_k sont nuls. Toutes les coordonnées $a_{k,j}$, $j \in I(p)$, de chaque a_k , $k \in I(p)$, sont donc égales entre elles, d'où $\langle a_{k,j} \rangle = 0$ pour $j, k \in I(p)$ et $\|\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k\|_p = 0$. De même, si $\|\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k\|_p = 0$ alors

$$\sum_{k \in I(p)} \left(\sum_{j \in I(p)} \langle a_{k,j} \rangle \right) = 0,$$

d'où $\langle a_{k,j} \rangle = 0$ pour $j, k \in I(p)$. Ainsi, toutes les coordonnées $a_{k,j}$, $j \in I(p)$, de chaque a_k , $k \in I(p)$, sont égales entre elles et $a_k = 0$, $k \in I(p)$. Il s'ensuit que $\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k = 0$.

ii) Nous avons que

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k \right) + \left(\sum_{k \in I(p)} b_k s_{p,\nu}^k \right) \right\|_p &= \sum_{k \in I(p)} \left(\sum_{j \in I(p)} \langle a_{k,j} + b_{k,j} \rangle \right) \\ &\leq \sum_{k \in I(p)} \left[\sum_{j \in I(p)} (\langle a_{k,j} \rangle + \langle b_{k,j} \rangle) \right] = \left\| \sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k \right\|_p + \left\| \sum_{k \in I(p)} b_k s_{p,\nu}^k \right\|_p. \end{aligned}$$

iii) Notons d'abord que $\|\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k\|_p = \sum_{k \in I(p)} \|a_k\|_p$ découle directement de (19) et qu'un cas particulier de ii) est : $\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$, si $a, b \in \mathbf{A}_p$. Pour tous $\sum_{k \in I(p)} a_k^{(k)}, \sum_{k \in I(p)} b_k^{(k)} \in \mathbf{A}_p$, nous avons aussi que

$$\left\| \left(\sum_{k \in I(p)} a_k^{(k)} \right) \left(\sum_{k \in I(p)} b_k^{(k)} \right) \right\|_p \leq \left\| \sum_{k \in I(p)} a_k^{(k)} \right\|_p \left\| \sum_{k \in I(p)} b_k^{(k)} \right\|_p.$$

De ces observations, on tire que

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k \right) \left(\sum_{k \in I(p)} b_k s_{p,\nu}^k \right) \right\|_p &= \left\| \sum_{k \in I(p)} \left(\sum_{\substack{k_1, k_2 \in I(p) \\ k_1 + k_2 \equiv k \pmod{p}}} a_{k_1} b_{k_2}^{(r(\nu, k, k_1))} \right) s_{p,\nu}^k \right\|_p \\ &= \sum_{k \in I(p)} \left\| \sum_{\substack{k_1, k_2 \in I(p) \\ k_1 + k_2 \equiv k \pmod{p}}} a_{k_1} b_{k_2}^{(r(\nu, k, k_1))} \right\|_p \leq \sum_{k \in I(p)} \left(\sum_{\substack{k_1, k_2 \in I(p) \\ k_1 + k_2 \equiv k \pmod{p}}} \|a_{k_1} b_{k_2}\|_p \right) \\ &\leq \sum_{k \in I(p)} \left(\sum_{\substack{k_1, k_2 \in I(p) \\ k_1 + k_2 \equiv k \pmod{p}}} \|a_{k_1}\|_p \|b_{k_2}\|_p \right) = \sum_{k_1, k_2 \in I(p)} \|a_{k_1}\|_p \|b_{k_2}\|_p \\ &= \left(\sum_{k_1 \in I(p)} \|a_{k_1}\|_p \right) \left(\sum_{k_2 \in I(p)} \|b_{k_2}\|_p \right) = \left\| \sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k \right\|_p \left\| \sum_{k \in I(p)} b_k s_{p,\nu}^k \right\|_p. \quad \square \end{aligned}$$

Définissons maintenant la p -quasi-valeur absolue sur $\mathbf{E}_{p,\nu}$. La multiplication d'un nombre $z = \sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k \in \mathbf{E}_{p,\nu}$ par ses conjugués dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$ donne, selon le théorème 5, un nombre $\sum_{k \in I(p)} c_k^{(\nu k)} \in \mathbf{A}_p$. Si $p = 2$, ce nombre est primaire et vaut $a_0^2 + a_1^2$. Si $p \geq 3$, selon le théorème 2, on peut obtenir un nombre p -addisymétrique primaire ou antiprimaire en multipliant $\sum_{k \in I(p)} c_k^{(\nu k)}$ par ses conjugués p -addisymétriques. Ceci nous amène à définir la p -quasi-valeur absolue de z sur $\mathbf{E}_{p,\nu}$, notée $|z|_p$, par :

$$|z|_p = \begin{cases} R^{\frac{1}{(p-1)p}}, & \text{si } R \text{ est primaire} \\ (-_p R)^{\frac{1}{(p-1)p}}, & \text{si } R \text{ est antiprimaire,} \end{cases} \quad (20)$$

où $R = \prod_{j \in I^*(p)} \left(\sum_{k \in I(p)} c_k^{(\nu jk)} \right)$. Selon (8), cette définition est indépendante de ν , de sorte qu'on peut y fixer $\nu = 1$.

Théorème 9. Si $z, w \in \mathbf{E}_{p,\nu}$ alors

- i) $|z|_p \geq 0$ et $|z|_p = 0$ si, et seulement si, $z \in \mathbf{E}_{p,\nu}^\circ$ et
- ii) $|zw|_p = |z|_p |w|_p$.

Démonstration. i) La définition de la p -quasi-valeur absolue fait que $|z|_p \geq 0$ pour tout $z \in \mathbf{E}_{p,\nu}$. Selon les théorèmes 3 et 6, on a que $|z|_p = 0$ si, et seulement si, $z \in \mathbf{E}_{p,\nu}^\circ$.

ii) Soit $z = \sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k$ et $w = \sum_{k \in I(p)} b_k s_{p,\nu}^k$. Selon le lemme 1, les multiplications de z , w et zw par leurs conjugués respectifs dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$ s'expriment par $\det A$, $\det B$ et $\det C$, où A , B et C sont les matrices circulaires dont les premières lignes sont constituées des coordonnées de respectivement z , w et zw . Ceci étant, il est facile de voir que $C = AB$, de sorte que $\det C = (\det A)(\det B)$. Or, selon le théorème 5, on a que $\det A$, $\det B$ et $\det C$ sont des nombres de $\mathbf{A}_p$. On peut donc poser

$$\det A = \sum_{k \in I(p)} A_k^{(k)}, \quad \det B = \sum_{k \in I(p)} B_k^{(k)}, \quad \det C = \sum_{k \in I(p)} C_k^{(k)},$$

où $A_k, B_k, C_k \in \mathbb{R}_+$ pour $k \in I(p)$. Soit aussi

$$A(1^{(j)}) = \sum_{k \in I(p)} A_k^{(jk)}, \quad B(1^{(j)}) = \sum_{k \in I(p)} B_k^{(jk)}, \quad C(1^{(j)}) = \sum_{k \in I(p)} C_k^{(jk)}$$

pour $j \in I^*(p)$. Ainsi les conjugués p -addisymétriques de $C(1^{(1)}) = A(1^{(1)})B(1^{(1)})$ sont $C(1^{(i)}) = A(1^{(i)})B(1^{(i)})$ pour $i = 2, 3, \dots, p-1$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |zw|_p &= \prod_{j \in I^*(p)} C(1^{(j)}) = \prod_{j \in I^*(p)} A(1^{(j)})B(1^{(j)}) \\ &= \prod_{j \in I^*(p)} A(1^{(j)}) \prod_{j \in I^*(p)} B(1^{(j)}) = |z|_p |w|_p. \quad \square \end{aligned}$$

Pour la distance déduite de la p -prévalueur absolue, soit $\mathbf{E}_{p,\nu}^\delta$ le sous-ensemble de $\mathbf{E}_{p,\nu}^*$ dont les points sont à une distance plus grande ou égale à un certain $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ de tout point de $\mathbf{E}_{p,\nu}^\circ$. Le lemme suivant nous permettra de démontrer l'équivalence de la p -prévalueur absolue et de la p -quasi-valeur absolue sur $\mathbf{E}_{p,\nu}^\delta$ pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+^*$.

Lemme 2. *La fonction p -quasi-valeur absolue est continue sur $\mathbf{E}_{p,\nu}$.*

Démonstration. Soit $z = \sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k \in \mathbf{E}_{p,\nu}$. Puisque $|z|_p$ est soit le produit de z avec son conjugué dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$ si $p = 2$, soit le produit des conjugués p -addisymétriques d'un nombre de $\mathbf{A}_p$, qui lui-même résulte de la multiplication de z par ses conjugués dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$ si $p \geq 3$, il suffira de montrer que la conjugaison dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$ et la conjugaison p -addisymétrique sont des fonctions continues sur $\mathbf{E}_{p,\nu}$.

Considérons d'abord la conjugaison dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$. Nous savons qu'elle a pour effet de permuter les coordonnées des expressions dans $\mathbf{E}_{p,\nu}$. Il est clair qu'une telle fonction est continue sur $\mathbf{E}_{p,\nu}$. De même, chacune des conjugaisons p -addisymétriques peut être vue comme une permutation des coordonnées des expressions dans $\mathbf{A}_p$. Il s'ensuit que cette conjugaison est aussi continue sur $\mathbf{E}_{p,\nu}$. Ainsi, la fonction p -quasi-valeur absolue est la composition de fonctions continues, qui sont elles-mêmes des produits de fonctions continues : elle sera donc continue sur $\mathbf{E}_{p,\nu}$. $\square$

Théorème 10. *Pour tout $\delta > 0$, il existe des nombres réels strictement positifs a_p et b_p tels que pour tout $z \in \mathbf{E}_{p,\nu}^\delta$:*

$$a_p \|z\|_p \leq |z|_p \leq b_p \|z\|_p. \quad (21)$$

Démonstration. Nous nous servirons des propriétés voulant que si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ alors $\|\lambda z\|_p = \lambda \|z\|_p$ et $|\lambda z|_p = \lambda |z|_p$ pour tout $z \in \mathbf{E}_{p,\nu}$. Ces propriétés découlent directement des définitions de la p -pré-valeur absolue et de la p -quasi-valeur absolue.

Puisque $z \in \mathbf{E}_{p,\nu}^\delta$, alors $\|z\|_p \neq 0$ et la double inégalité (21) équivaut à $a_p \leq |z|_p / \|z\|_p \leq b_p$. Puisque $1 / \|z\|_p \in \mathbb{R}_+$, ceci équivaut à $a_p \leq |z / \|z\|_p|_p \leq b_p$. Or, $\|z / \|z\|_p\|_p = \|z\|_p / \|z\|_p = 1$. On aura donc démontré (21), si l'on démontre qu'il existe des nombres $a_p, b_p \in \mathbb{R}_+$ tels que $a_p \leq |w|_p \leq b_p$ pour l'ensemble W des $w \in \mathbf{E}_{p,\nu}^\delta$ tels que $\|w\|_p = 1$. Il est facile de voir que W est un ensemble compact. La fonction p -quasi-valeur absolue étant continue, d'après le lemme 2, il s'ensuit qu'elle atteindra sur W ses minimum a_p et maximum b_p . On peut noter que $a_p > 0$, car si $a_p = 0$, on aurait $|w|_p = 0$ pour un $w \in W$ de sorte que, selon le théorème 9, ce w serait dans $\mathbf{E}_{p,\nu}^\circ$. Ceci contredit le fait que $w \in \mathbf{E}_{p,\nu}^\delta$ et donc que $w \in \mathbf{E}_{p,\nu}^*$ pour tout $w \in W$. $\square$

Remerciements. L'auteur remercie Paul Deguire avec qui il a eu des discussions enrichissantes relativement au contenu de cet article.

English extended abstract. Let $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Consider m copies of the monoid $\mathbb{R}_+$ with addition, and suppose that these monoids share the same identity element. If $a \in \mathbb{R}_+$, the expression $a^{(k)}$ denotes a number belonging to the k^{th} monoid. We call m -addisymmetric number any element $\sum_{k \in I(m)} a_k^{(k)}$ of the cartesian product of these m monoids. Two m -addisymmetric numbers are said to be equivalent when they differ by a linear combinaison of expressions $\sum_{k \in I_n(m)} 1^{(k)}$, where $n|m$, $n < m$ and $I_n(m)$ is the subset of all multiples of n in $I(m) = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Using the fact that $\mathbf{A}_m \simeq \mathbb{R}[x] / \langle \Phi_m(x) \rangle$, where $\langle \Phi_m(x) \rangle$ denotes the ideal generated by the cyclotomic polynomial of order m , we show in Theorem 1 that the set of divisors of zero of $\mathbf{A}_m$, designated by $\mathbf{A}_m^\circ$, is the union of $\varphi(m)/2$ subspaces of codimension 2 of $\mathbf{A}_m$, seen as a vector space of dimension $m-1$ over $\mathbb{R}$, where φ is the Euler totient function.

Let $p \in \mathbb{N}$ be a prime number. If $p > 2$, we say that $\sum_{k \in I(p)} a_k^{(jk)}$, $j \in I(p)$, $j \neq 0, 1$, are the p -addisymmetric conjugates of $\sum_{k \in I(m)} a_k^{(k)}$. Every number of $\mathbf{A}_2$ is said to be its own 2-addisymmetric conjugate. Theorem 2 shows that the product of any number of $\mathbf{A}_p$ with its p -addisymmetric conjugates is a number in $\mathbb{R}_+$, or the additive inverse of a number in $\mathbb{R}_+$. Theorem 3 shows that the product of any number of $\mathbf{A}_p$ with its p -addisymmetric conjugates is zero if, and only if, this number is in $\mathbf{A}_p^\circ$. Theorem 4 shows that any number in the set of non-divisors of zero in $\mathbf{A}_p$, written $\mathbf{A}_p^*$, has a multiplicative inverse in $\mathbf{A}_p^*$.

Let $\mathbf{E}_{p,\nu}$ be the algebraic extension of $\mathbf{A}_p$ obtained from the adjunction of a p^{th} root of $1^{(\nu)}$, $\nu \in I^*(p)$, which is not in $\mathbf{A}_p$. This root is written $s_{p,\nu}$. Let $a_k \in \mathbf{A}_p$, $k \in I(p)$. We define the conjugates in $\mathbf{E}_{p,\nu}$ of $\sum_{k \in I(p)} a_k s_{p,\nu}^k \in \mathbf{E}_{p,\nu}$ by $\sum_{k \in I(p)} a_k^{(jk)} s_{p,\nu}^k$, $j \in I^*(p)$. Theorem 5 shows that the product of any number of $\mathbf{E}_{p,\nu}$ with its conjugates in $\mathbf{E}_{p,\nu}$ is a number of $\mathbf{A}_p$. In Theorem 6, we prove that the product of any $z \in \mathbf{E}_{p,\nu}$ with its conjugates in $\mathbf{E}_{p,\nu}$ is a number of $\mathbf{A}_p^\circ$ if, and only if, $z \in \mathbf{E}_{p,\nu}^\circ$, which is the set of divisors of zero in $\mathbf{E}_{p,\nu}$. Theorem 7 shows that every number in the set of non-divisors of zero in $\mathbf{E}_{p,\nu}$, written $\mathbf{E}_{p,\nu}^*$, has a multiplicative inverse in $\mathbf{E}_{p,\nu}^*$.

Theorem 8 gives a function defined on $\mathbf{E}_{p,\nu}$ and called absolute p -prevalue, which has properties a bit weaker than those of an absolute value. Expression (20) is the definition of another function on $\mathbf{E}_{p,\nu}$, called absolute p -quasi-value, having properties a bit weaker than those of an absolute value. Theorem 9 shows that the absolute p -quasi-value is a multiplicative function. For the distance induced from the absolute p -prevalue, let $\mathbf{E}_{p,\nu}^\delta$ be the subset of $\mathbf{E}_{p,\nu}^*$ containing the numbers which are at a distance greater than or equal to a given $\delta > 0$ of any number in $\mathbf{E}_{p,\nu}^\circ$. Theorem 10 shows that there exist positive numbers a_p and b_p such that relation (21) is satisfied for every $z \in \mathbf{E}_{p,\nu}^\delta$ and $\delta > 0$.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. Deguire et C. Gauthier, *Sur la dérivation dans certains anneaux quotients de $\mathbb{R}[x]$* , Ann. Sci. Math. Québec **24** (2000); no. 1, 19–31.
2. C. Gauthier, *Sur la fonction zêta et la périodicité des fonctions circulaires généralisées à certains anneaux quotients de $\mathbb{R}[x]$* ; soumis pour publication.
3. I. L. Kantor et A. S. Solodovnikov, *Hypercomplex Numbers. An Elementary Introduction to Algebras*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1989.
4. G. B. Price, *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 140, Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.
5. D. Rochon, *Sur une généralisation des nombres complexes : les tétranombres*, Mémoire de maîtrise, Université de Montréal (1997).

CLAUDE GAUTHIER

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE

UNIVERSITÉ DE MONCTON

MONCTON (NOUVEAU-BRUNSWICK)

CANADA E1A 3E9

COURRIEL : gauthic@umoncton.ca