

INÉGALITÉS DE TYPE HARDY-SOBOLEV SUR DES DOMAINES NON BORNÉS

FABRICE COLIN

RÉSUMÉ. Intéressés par l'étude approfondie d'inégalités différentielles de même que par les problèmes variationnels qui leur sont associés, nous nous proposons dans cet article d'établir la validité d'inégalités de type Hardy-Sobolev pour une classe de domaines non bornés. Plus précisément, nous allons montrer qu'il existe une constante $C > 0$ faisant en sorte que l'inégalité ci-dessous soit valide pour des valeurs b , q et α bien déterminées.

$$\left(\int_{\Omega} |u(x)|^q \delta(x)^{\alpha} dx \right)^{2/q} \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \delta(x)^{\varepsilon} dx, \quad \forall u \in D(\Omega).$$

Nous terminerons en démontrant que ces inégalités ont également lieu dans des domaines cylindriques.

ABSTRACT. The aim of this paper is to establish Hardy-Sobolev inequalities on a specific class of unbounded domains. More precisely, we shall show the validity of inequality below, where value of real numbers b , q and α are given.

$$\left(\int_{\Omega} |u(x)|^q \delta(x)^{\alpha} dx \right)^{2/q} \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \delta(x)^{\varepsilon} dx, \quad \forall u \in D(\Omega).$$

We shall end this paper by showing preceding inequalities also hold in cylindrical domains.

1. Introduction. Débutons immédiatement en énonçant le lemme que voici auquel nous nous référerons par la suite comme étant dans le cas unidimensionnel : *l'inégalité de Hardy classique*.

Lemme 1. Soit $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^+)$ telle que $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$. Rappelons que, pour $0 \leq \varepsilon < 1$, nous avons l'inégalité de Hardy suivante :

$$\int_0^{\infty} (u(t))^2 t^{\varepsilon-2} dt \leq c_{\varepsilon}^{-1} \int_0^{\infty} |u'(t)|^2 t^{\varepsilon} dt,$$

où $c_{\varepsilon} = (1 - \varepsilon)^2/4$.

Voir [10] et plus particulièrement l'exemple 6.7.

Reçu le 27 février 2002 et, sous forme définitive, le 20 juin 2002.

Il est également bon de signaler que c_ε est une constante optimale dans l'inégalité précédente et qu'elle est absolument indépendante du domaine considéré. Dans le cas des espaces $\mathbb{R}^N$, où $N \geq 3$, nous devons ne prendre en compte que des domaines Ω dont la frontière, $\partial\Omega$, sera un ensemble non vide. Puis, nous poserons :

$$\delta(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega)$$

et ensuite, étant donné $0 \leq \varepsilon < 1$, nous dirons que pour Ω l'inégalité de Hardy sera satisfaite s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_{\Omega} u^2 \delta^{\varepsilon-2} dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx, \quad \forall u \in D(\Omega), \quad (1)$$

où $D(\Omega)$ représentera l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω et où C sera une constante qui, cette fois-ci, dépendra du domaine. Dans la foulée, présentons le type d'inégalités auquel nous nous intéresserons tout particulièrement par la suite.

Définition 2. Soit $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un ensemble ouvert ainsi que $0 \leq \varepsilon < 1$ et que $(\varepsilon - 2)/2 \leq b \leq \varepsilon/2$. Nous dirons qu'une inégalité de type *Hardy-Sobolev* a lieu dans Ω si

$$\left(\int_{\Omega} |u(x)|^q \delta(x)^\alpha dx \right)^{2/q} \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \delta(x)^\varepsilon dx, \quad \forall u \in D(\Omega), \quad (2)$$

avec $\alpha = bq$ où q est donné par l'expression :

$$q := \frac{2N}{N - 2 + \varepsilon - 2b}. \quad (3)$$

Remarque 3. Remarquons tout d'abord que lorsque b varie de $(\varepsilon - 2)/2$ à $\varepsilon/2$, q prend des valeurs comprises entre 2 et $2^* := 2N/(N - 2)$. Nous pouvons alors constater que le vocable Hardy-Sobolev n'est en rien usurpé, puisque lorsque $b = (\varepsilon - 2)/2$, $q = 2$ et nous retrouvons l'inégalité (1). D'un autre côté, si $b = \varepsilon/2$, alors $q = 2^*$ et nous sommes, dans ce cas, en présence d'une inégalité de Sobolev *pondérée*.

Définition 4. Soit $N \geq 3$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble ouvert. L'espace de Hilbert $D_\varepsilon^{1,2}(\Omega)$ sera obtenu par complétion de l'espace $D(\Omega)$ par rapport au produit scalaire :

$$(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \delta^\varepsilon dx.$$

Le choix de ce dernier espace est approprié dans le contexte dans lequel nous choisirons de nous placer, car pour un domaine dans lequel l'inégalité (2) a lieu, la norme d'une fonction u dans $D_\varepsilon^{1,2}(\Omega)$ majore toutes les autres normes impliquées. Une autre question digne de mention concerne une recherche bien légitime, c'est-à-dire : la mise en évidence de la constante optimale dans l'inégalité (2). Tout cela nous mènera tout naturellement au *problème variationnel associé* qui s'exprimera ainsi :

Définition 5. Soit $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine tel que $\partial\Omega \neq \emptyset$ de même que $0 \leq \varepsilon < 1$, $(\varepsilon - 2)/2 \leq b \leq \varepsilon/2$. Posons

$$HS_{\varepsilon,b,q}(\Omega) := \inf_{u \in D_{\varepsilon}^{1,2}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \delta^{\varepsilon} dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^q \delta^{\alpha} dx \right)^{2/q}}. \quad (4)$$

où, là encore, $\alpha = bq$ et où la valeur de q est donnée par (3). Cet infimum est strictement positif si, et seulement si, l'inégalité de Hardy-Sobolev (2) tient dans Ω . Il représente, de surcroît, la constante optimale dans cette même inégalité (2). Enfin, par souci de plus grande cohérence avec les notations classiquement utilisées dans le cadre des inégalités de Hardy, nous poserons : $S_{\varepsilon}(\Omega) := HS_{\varepsilon,(\varepsilon-2)/2,2}(\Omega)$.

Rappelons, avant de clore cette section, qu'une fonction sera dite *minimisante*, si elle réalise l'infimum apparaissant dans (4). Elle sera alors également une solution faible de l'EDP suivante :

$$-\Delta u \delta^{\varepsilon} - \varepsilon \nabla \delta \cdot \nabla u \delta^{\varepsilon-1} = HS_{\varepsilon,b,q}(\Omega) F(u) \delta^{\alpha}, \quad u \in D_{\varepsilon}^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\},$$

où

$$F(u) := \begin{cases} |u|^{q-2}u, & \text{si } q > 2, \\ u, & \text{lorsque } q = 2. \end{cases}$$

2. Résultats Préliminaires. Nous présenterons en vrac, dans cette section, quelques résultats qui se révéleront fort utiles. Commençons par l'inégalité suivante, attribuable à Caffarelli, Kohn et Nirenberg (se référer à [3]) et reprise, entre autres, par Willem dans [15].

Lemme 6. Soit $N \geq 3$, ainsi que $0 \leq \varepsilon < 1$, $(\varepsilon - 2)/2 \leq b \leq \varepsilon/2$ et q donné par l'expression (3). Alors, quel que soit u dans $D(\mathbb{R}^N)$, nous avons :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^{bq} dx \right)^{2/q} \leq S(\varepsilon/2, b, \mathbb{R}^N) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 |x|^{\varepsilon} dx,$$

où $S(\varepsilon/2, b, \mathbb{R}^N)$ est une constante réelle strictement positive.

Comme Davies l'a si bien mis en évidence dans son article [7], la constante optimale de Hardy, $S_{\varepsilon}(\Omega)$, d'un domaine donné est fortement dépendante de la régularité de sa frontière. C'est précisément ce qui a amené les auteurs, dont Brezis et Marcus font partie, à considérer l'hypothèse suivante :

(H) Ω est un domaine possédant une frontière compacte de classe C^2

et donc par la suite, à moins d'avis contraire, nous la supposerons satisfaite. Cela permet, tout comme l'ont fait Brezis et Marcus [2], d'obtenir les prochains résultats capitaux. Fixons $\beta > 0$ et posons :

$$\Omega_{\beta} := \{x \in \Omega : \delta(x) < \beta\}, \quad \Sigma_{\beta} := \{x \in \Omega : \delta(x) = \beta\}.$$

Pour β suffisamment petit, par exemple $\beta < \beta_0$, et pour tout $x \in \Omega_{\beta}$ il existe un unique point $\sigma(x) \in \Sigma := \partial\Omega$ tel que $\delta(x) = |x - \sigma(x)|$. Posons $\Pi : \Omega_{\beta} \mapsto (0, \beta) \times \Sigma$ le

morphisme donné par $\Pi(x) := (\delta(x), \sigma(x))$. La transformation obtenue est de plus un difféomorphisme de classe C^1 dont voici l'inverse :

$$\Pi^{-1}(t, \sigma) = \sigma + t\nu(\sigma), \quad \forall (t, \sigma) \in (0, \beta) \times \Sigma,$$

où $\nu(\sigma)$ désigne le vecteur unitaire normal à la surface Σ au point σ et orienté vers l'intérieur. Quel que soit $0 < t < \beta_0$, notons H_t le difféomorphisme de classe C^1 $\Pi^{-1}(t, \cdot)$ de Σ dans Σ_t . Son Jacobien satisfait alors

$$|\text{Jac } H_t(\sigma) - 1| \leq ct, \quad \forall (t, \sigma) \in (0, \beta_0) \times \Sigma, \quad (5)$$

où la constante c ne dépend que de Σ , de β_0 ainsi que du choix des coordonnées locales. Étant donné que $\nu(\sigma)$ est orthogonal à $\Sigma_t = \Pi^{-1}(t, \Sigma)$ au point $\sigma + t\nu(\sigma)$, il s'ensuit que, pour toute fonction positive et intégrable f sur Ω_β ,

$$\int_{\Omega_\beta} f = \int_0^\beta dt \int_{\Sigma_t} f d\sigma_t = \int_0^\beta dt \int_{\Sigma} f(t, H_t(\sigma)) (\text{Jac } H_t) d\sigma,$$

où $d\sigma, d\sigma_t$ représentent les éléments de surface de Σ, Σ_t respectivement. Conséquemment, grâce à (5)

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} d\sigma \int_0^\beta f(t, H_t(\sigma)) (1 - ct) dt &\leq \int_{\Omega_\beta} f dt \\ &\leq \int_{\Sigma} d\sigma \int_0^\beta f(t, H_t(\sigma)) (1 + ct) dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Ce qui fait que nous pouvons facilement démontrer que :

Lemme 7. *Sous l'hypothèse (H) et pour $0 < \beta < \beta_0$, l'inégalité qui suit a lieu.*

$$\int_{\Omega_\beta} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx \geq (c_\varepsilon + o(1)) \int_{\Omega_\beta} u^2 \delta^{\varepsilon-2} dx \quad \forall u \in D(\Omega),$$

où $o(1)$ représente une quantité qui tend vers zero lorsque $\beta \rightarrow 0$.

Preuve. En vertu de (6), du lemme 1 et de l'inégalité $|\nabla u(t, H_t(\sigma))| \geq |u'(t, H_t(\sigma))|$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\beta} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx &\geq \int_{\Sigma} d\sigma \int_0^\beta |\nabla u(t, H_t(\sigma))|^2 t^\varepsilon (1 - ct) dt \\ &\geq c_\varepsilon \int_{\Sigma} d\sigma \int_0^\beta \frac{|u(t, H_t(\sigma))|^2}{t^{2-\varepsilon}} (1 - ct) dt \\ &= c_\varepsilon \int_{\Sigma} d\sigma \int_0^\beta \frac{|u(t, H_t(\sigma))|^2}{t^{2-\varepsilon}} (1 + ct) dt - c_\varepsilon \int_{\Sigma} d\sigma \int_0^\beta \frac{|u(t, H_t(\sigma))|^2}{t^{2-\varepsilon}} 2ct dt \\ &\geq c_\varepsilon \int_{\Sigma} d\sigma \int_0^\beta \frac{|u(t, H_t(\sigma))|^2}{t^{2-\varepsilon}} (1 + ct) dt - 2c\beta c_\varepsilon \int_{\Sigma} d\sigma \int_0^\beta \frac{|u(t, H_t(\sigma))|^2}{t^{2-\varepsilon}} dt \\ &\geq c_\varepsilon \int_{\Omega_\beta} u^2 \delta^{\varepsilon-2} dx + \frac{(-2c\beta c_\varepsilon)}{(1 - c\beta)} \int_{\Omega_\beta} u^2 \delta^{\varepsilon-2} dx, \end{aligned}$$

en utilisant (5) de même que (6). $\square$

En fait, il est même possible d'obtenir exactement c_ε comme constante dans l'inégalité précédente (voir [6]). Le résultat, somme toute assez naturel, que nous allons maintenant présenter est démontré par Brezis dans [1]. Il ne s'agit que d'une application immédiate du théorème de Friedrichs (voir à ce sujet [1] ou [16]).

Proposition 8. (*Formule de changement de variables*) Soit U et U' deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et soit $H : U' \rightarrow U$, $x = H(y)$, une application bijective telle que

$$H \in C^1(U'), \quad H^{-1} \in C^1(U), \quad \text{Jac } H \in L^\infty(U'), \quad \text{Jac } H^{-1} \in L^\infty(U),$$

où $\text{Jac } H$ désigne la matrice Jacobienne $\partial H_i / \partial y_j$. Soit maintenant $u \in W^{1,p}(U)$, alors $u \circ H \in W^{1,p}(U')$ et, qui plus est,

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (u \circ H)(y) = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y)) \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y) \quad \forall j = 1, 2, \dots, N.$$

Le prochain lemme, qui représente une généralisation du prolongement par réflexion selon une variable exposé par Brezis toujours dans [1], peut être démontré soit en reprenant les arguments de Brezis mais en effectuant certaines adaptations évidentes, soit par récurrence à partir du cas d'une variable. Mais auparavant, il nous faut clarifier les précédents termes grâce aux définitions suivantes.

Définition 9. Soit N, l tels que $N > l \geq 1$ ainsi que $\Omega := \mathbb{R}^l \times \omega$, où ω est un domaine de $\mathbb{R}^{N-l}$. Convenons de noter $\Omega_+ :=]0, \infty[\times \omega$ et pour chaque fonction $u \in C^\infty(\Omega_+)$ définissons son *prolongement par réflexion* u^* sur Ω de la manière que voici :

$$u^*(x) = u^*(y_1, \dots, y_l, z_{l+1}, \dots, z_N) = \begin{cases} u(x), & \text{si } x \in \Omega_+, \\ u(|y_1|, \dots, |y_l|, z_{l+1}, \dots, z_N), & \text{autrement,} \end{cases}$$

où $x = (y, z)$, avec $y \in \mathbb{R}^l$ et $z \in \omega$. Ensuite, pour chaque i tel que $1 \leq i \leq l$, toujours en prenant $u \in C^\infty(\Omega_+)$, il est possible d'obtenir un autre prolongement $u^{\square i}$ en procédant comme suit :

$$\begin{aligned} u^{\square i}(x) &= u^{\square i}(y_1, \dots, y_l, z_{l+1}, \dots, z_N) \\ &= \begin{cases} u(|y_1|, \dots, |y_l|, z_{l+1}, \dots, z_N), & \text{si } y_i > 0, \\ -u(|y_1|, \dots, |y_l|, z_{l+1}, \dots, z_N), & \text{si } y_i < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Lemme 10. Soit Ω satisfaisant les mêmes hypothèses qu'à la définition 9 de même que $u \in D(\Omega)$ et que $1 \leq p < \infty$. En choisissant de noter $u_+ : u|_{\Omega_+}$, nous obtenons les conclusions suivantes :

$$\begin{aligned} u_+^* &\in W^{1,p}(\Omega) \text{ et plus précisément,} \\ \frac{\partial u_+^*}{\partial y_i} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y_i} \right)^{\square i} \text{ pour } 1 \leq i \leq l, \\ \frac{\partial u_+^*}{\partial z_j} &= \left(\frac{\partial u}{\partial z_j} \right)^* \text{ pour } l+1 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

3. Inégalités de type Hardy-Sobolev. Nous débuterons cette section par une série de résultats concernant les inégalités de type Hardy-Sobolev se trouvant dans l'ouvrage d'Opic et Kufner [10]. Tous ces énoncés ne sont valides que pour des domaines bornés. Nous montrerons l'existence d'inégalités similaires dans le cas des domaines rencontrant les conditions de l'hypothèse (H) . Mentionnons aussi que, comme l'illustrera le premier lemme, ces questions se trouvent également en relation étroite avec l'équivalence de diverses normes (à ce sujet, consulter [8]).

Définition 11. Un domaine *borné* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est dit de classe

$$C^{0,\kappa}, \quad 0 < \kappa \leq 1,$$

si les trois conditions suivantes sont remplies :

1. Il existe un nombre fini m de systèmes de coordonnées cartésiennes, notés

$$(y'_i, y_{iN}), \quad y'_i := (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{iN-1}), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

et le même nombre de fonctions $a_i(y'_i)$ définies sur l'adhérence des cubes de dimension $(N - 1)$

$$\Delta_i := \{y'_i \mid |y_{ij}| < \gamma \text{ pour } j = 1, 2, \dots, N - 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

de telle sorte que pour chaque point $x \in \partial\Omega$, l'on puisse trouver au moins un $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ qui soit tel que

$$x = (y'_i, y_{iN}), \quad y_{iN} = a_i(y'_i).$$

2. Les fonctions a_i satisfont sur $\overline{\Delta_i}$ la condition de Hölder pour l'exposant κ , c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ qui fasse en sorte que

$$|a_i(y'_i) - a_i(z'_i)| \leq C |y'_i - z'_i|^\kappa,$$

quels que soient $y'_i, z'_i \in \overline{\Delta_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

3. Il existe un nombre réel $0 < \lambda < 1$ tel que les ensembles Q_i définis comme suit :

$$Q_i := \{(y'_i, y_{iN}) \mid y'_i \in \Delta_i, a_i(y'_i) - \lambda < y_{iN} < a_i(y'_i) + \lambda\}$$

satisfont

$$U_i := Q_i \cap \Omega = \{(y'_i, y_{iN}) \mid y'_i \in \Delta_i, a_i(y'_i) - \lambda < y_{iN} < a_i(y'_i)\},$$

$$\Gamma_i := Q_i \cap \partial\Omega = \{(y'_i, y_{iN}) \mid y'_i \in \Delta_i, y_{iN} = a_i(y'_i)\},$$

où $i = 1, 2, \dots, m$.

Lemme 12. Soit $1 \leq p < \infty$, $0 < \kappa \leq 1$, $\Omega \in C^{0,\kappa}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Alors les normes $\|\cdot\|_{1,p,\Omega,\delta^\varepsilon,\delta^\varepsilon}$ ainsi que $\|\cdot\|_{1,p,\Omega,\delta^\varepsilon}$ définies comme suit

$$\begin{aligned}\|u\|_{1,p,\Omega,\delta^\varepsilon} &:= \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \delta^\varepsilon \, dx \right)^{1/p}, \\ \|u\|_{1,p,\Omega,\delta^\varepsilon,\delta^\varepsilon} &:= \left(\int_{\Omega} |u|^p \delta^\varepsilon \, dx + \|u\|_{1,p,\Omega,\delta^\varepsilon}^p \right)^{1/p},\end{aligned}$$

sont équivalentes sur l'espace $W_0^{1,p}(\Omega, \delta^\varepsilon, \delta^\varepsilon)$ pourvu que

$$-\frac{\kappa p}{1-\kappa} < \varepsilon < \kappa(p-1).$$

Remarque 13. Notons que lorsque $\kappa = 1$, il nous faut poser $-\kappa p/(1-\kappa) := \infty$ et alors, la dernière condition doit être entendue comme voici :

$$-\infty < \varepsilon < p-1.$$

La démonstration du précédent lemme peut être trouvée dans l'article de Kufner [8] (proposition 9.2). Ce lemme ainsi que le lemme 16.12, les théorèmes 19.10, 19.21 du volume d'Opic et Kufner [10], permettent d'en arriver au résultat que voici.

Théorème 14. Soit $1 \leq p \leq q < \infty$, $N/q - N/p + 1 \geq 0$, $0 < \kappa \leq 1$, $\Omega \in C^{0,\kappa}$, $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ et soit

$$0 < \varepsilon < \kappa(p-1), \quad \frac{\alpha}{q} - \frac{\varepsilon}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + \kappa \geq 0$$

ou

$$-\frac{\kappa p}{1-\kappa} < \varepsilon \leq 0, \quad \frac{\alpha}{q} - \frac{\kappa \varepsilon}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + \kappa \geq 0.$$

Il existe alors une constante réelle $C > 0$ telle que l'inégalité suivante

$$\left(\int_{\Omega} |u|^q \delta^\alpha \, dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \delta^\varepsilon \, dx \right)^{1/p} \quad (8)$$

ait lieu pour toute fonction u prise dans $W_0^{1,p}(\Omega, \delta^\varepsilon, \delta^\varepsilon)$.

Si l'on décide de prendre plutôt q strictement plus petit que p , l'on obtient alors le résultat similaire qui suit.

Théorème 15. Soit $1 \leq q < p < \infty$, $N/q - N/p + 1 \geq 0$, $0 < \kappa \leq 1$, $\Omega \in C^{0,\kappa}$, $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ et supposons que nous ayons soit

$$0 < \varepsilon < \kappa(p-1), \quad \frac{\alpha}{q} - \frac{\varepsilon}{p} + \kappa \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + 1 \right) > 0$$

ou soit

$$-\frac{\kappa p}{1-\kappa} < \varepsilon \leq 0, \quad \frac{\alpha}{q} - \frac{\kappa \varepsilon}{p} + \kappa \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + 1 \right) > 0.$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ rendant l'inégalité (8) valide pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \delta^\varepsilon, \delta^\varepsilon)$.

Si nous choisissons $\Omega \in C^{0,1}$, nous pouvons alors exhiber des conditions nécessaires et suffisantes à la validité de l'inégalité de Hardy (8).

Théorème 16. Soit $1 \leq p, q < \infty$, $\Omega \in C^{0,1}$ ainsi que $\varepsilon < p - 1$. Il existe une constante $C > 0$ faisant en sorte que l'inégalité (8) soit satisfaite par toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \delta^\varepsilon, \delta^\varepsilon)$ si, et seulement si,

$$1 \leq p \leq q < \infty, \quad \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 \geq 0, \quad \frac{\alpha}{q} - \frac{\varepsilon}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 \geq 0$$

ou bien

$$1 \leq q < p < \infty, \quad \frac{\alpha}{q} - \frac{\varepsilon}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + 1 > 0.$$

Par la suite, nous nous en tiendrons au cas $\kappa = 1$, $p = 2$ de même que q fourni par l'égalité (3). Cela nous autorisera alors à faire un usage simultané du résultat précédent et de l'inégalité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (lemme 6) afin d'établir des inégalités analogues pour des domaines non bornés, mais satisfaisant l'hypothèse (H). À ce propos, il est à noter que si Ω est un domaine de classe C^2 , il s'ensuit alors que $\Omega \in C^{0,1}$. Compte tenu de la parenté indéniable entre les inégalités de type Hardy-Sobolev et les inégalités de Hardy, il n'est guère surprenant que nous ayons donc besoin du résultat que voici, tout à fait similaire au lemme 7.

Lemme 17. Soit $N \geq 3$, Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$ satisfaisant l'hypothèse (H) ainsi que $0 \leq \varepsilon < 1$ de même que $(\varepsilon - 2)/2 \leq b \leq \varepsilon/2$. Enfin, considérons β_0 la quantité apparaissant, entre autres, dans le lemme 7. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité suivante soit valide pour toute fonction $u \in D(\Omega)$

$$\left(\int_{\Omega_\beta} |u|^q \delta^\alpha \, dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\Omega_\beta} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx \right)^{1/2}$$

avec $0 < \beta < \beta_0/2$, $\alpha := bq$ et où q est donné par l'égalité (3).

Preuve. Soit $u \in D(\Omega)$, notons u_β la fonction $u|_{\Omega_\beta}$ et reprenons le changement de variables $\Pi : \Omega_\beta \mapsto (0, \beta) \times \Sigma$ présenté à la section 2 et donné par :

$$\Pi(x) := (\delta(x), \sigma(x)).$$

Rappelons aussi que nous avons noté H_t le difféomorphisme de classe C^1 $\Pi^{-1}(t, \cdot)$, de Σ_t dans Σ et dont le Jacobien satisfait (5). Enfin, posons : $v := u_\beta \circ \Pi^{-1}$ qui est définie sur le domaine $]0, \beta[\times \Sigma$, v^* , le prolongement par symétrie et par rapport à la première variable, de la fonction v sur le domaine $]0, 2\beta[\times \Sigma$ et finalement, $u^* := v^* \circ \Pi$ qui admet $\Omega_{2\beta}$ comme domaine. Sur ce dernier domaine, nous conviendrons de désigner par δ_1 la distance entre $x \in \Omega_{2\beta}$ et $\partial \Omega_{2\beta} = \Sigma \cup \Sigma_{2\beta}$.

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\beta} |u|^q \delta^\alpha \, dx &\leq \int_{\Omega_{2\beta}} |u^*|^q \delta_1^\alpha \, dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega_{2\beta}} |\nabla u^*|^2 \delta_1^\varepsilon \, dx \right)^{q/2}, \end{aligned} \quad (9)$$

en vertu du théorème 16. Or nous obtenons, grâce à la proposition 8, au lemme 10 ainsi qu'à l'inégalité (6),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{2\beta}} |\nabla u^*|^2 \delta_1^\varepsilon dx &\leq C \int_{\Omega_\beta} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx + C \int_{\Omega_{2\beta} \setminus \Omega_\beta} |\nabla u^*|^2 \delta_1^\varepsilon dx \\ &\leq C \int_{\Omega_\beta} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx \\ &\quad + C \int_{\Sigma} d\sigma \int_{\beta}^{2\beta} |\nabla v^*(t, H_t(\sigma))|^2 (2\beta - t)^\varepsilon (1 + ct) dt, \quad (10) \end{aligned}$$

où la lettre C est utilisée pour désigner indifféremment toutes les constantes positives. Ensuite en posant $t' := 2\beta - t$, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{2\beta} |\nabla v^*(t, H_t(\sigma))|^2 (2\beta - t)^\varepsilon (1 + ct) dt &= \int_{\beta}^{2\beta} |\nabla u(t', H_{t'}(\sigma))|^2 t'^\varepsilon (1 + ct) dt \\ &= \int_0^{\beta} |\nabla u(t', H_{t'}(\sigma))|^2 t'^\varepsilon (1 + ct) dt'. \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta} |\nabla u(t', H_{t'}(\sigma))|^2 t'^\varepsilon (1 + ct) dt' &\leq (1 + 2c\beta) \int_0^{\beta} |\nabla u(t', H_{t'}(\sigma))|^2 t'^\varepsilon dt' \\ &\leq C \int_0^{\beta} |\nabla u(t', H_{t'}(\sigma))|^2 t'^\varepsilon (1 - ct') dt'. \end{aligned}$$

Or toujours en invoquant l'inégalité (6) nous pouvons conclure que :

$$\int_{\Sigma} d\sigma \int_0^{\beta} |\nabla u(t', H_{t'}(\sigma))|^2 t'^\varepsilon (1 - ct') dt' \leq \int_{\Omega_\beta} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx.$$

L'usage simultané des inégalités (9) ainsi que (10) mène à la conclusion désirée. $\square$

Afin d'alléger les démonstrations subséquentes, nous avons regroupé des calculs plus techniques dans le lemme que voici. Ils n'en demeurent pas moins importants, car ils nous permettront de faire face aux problèmes de recollement que nous rencontrerons lorsque nous voudrons rectifier la fonction originale, tronquée par la partition de Ω que nous choisirons.

Lemme 18. Soit Ω satisfaisant l'hypothèse (H), $0 < \beta < \beta_0 < 1$, $0 < \gamma < \beta$ ainsi que $\phi \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \phi \leq 1$, définie de la manière que voici :

$$\phi(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \notin \Omega_\beta, \\ 0, & \text{si } x \in \Omega_\gamma. \end{cases}$$

Il s'ensuivra alors que, pour une certaine constante $C > 0$, nous aurons la majoration :

$$\int_{\Omega} |\nabla(\phi u)|^2 \delta^\varepsilon dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx, \quad \forall u \in D(\Omega).$$

Preuve. Grâce à un calcul relativement élémentaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(\phi u)|^2 \delta^\varepsilon \, dx &= \int_{\Omega} |\phi \nabla u + u \nabla \phi|^2 \delta^\varepsilon \, dx \\ &= \int_{\Omega} \phi^2 |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx + \int_{\Omega} u^2 |\nabla \phi|^2 \delta^\varepsilon \, dx + 2 \int_{\Omega} u \phi (\nabla u \cdot \nabla \phi) \delta^\varepsilon \, dx. \end{aligned}$$

Par la suite, nous nous attacherons à majorer individuellement chacun de ces termes. Soulignons également que, dans un souci de plus grande lisibilité, nous ne ferons usage que de la lettre C afin de désigner les diverses constantes qui apparaîtront au fil de la démonstration. Commençons par le second terme, le résultat étant trivial en ce qui concerne le premier terme. Étant donné que $|\nabla \phi|^2$ prend la valeur 0 hors de l'ensemble $\Omega_\beta \setminus \Omega_\gamma$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2 |\nabla \phi|^2 \delta^\varepsilon \, dx &\leq C \int_{\Omega_\beta \setminus \Omega_\gamma} u^2 \delta^\varepsilon \, dx \\ &\leq C \beta^2 \int_{\Omega_\beta \setminus \Omega_\gamma} u^2 \delta^{\varepsilon-2} \, dx \\ &\leq C \int_{\Omega_\beta} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx, \end{aligned} \tag{11}$$

en vertu du lemme 7. En ce qui concerne le troisième terme,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u \phi (\nabla u \cdot \nabla \phi) \delta^\varepsilon \, dx \right| &\leq \beta^\varepsilon \left| \int_{\Omega_\beta \setminus \Omega_\gamma} u \phi (\nabla u \cdot \nabla \phi) \, dx \right| \\ &= C \left| \int_{\Omega_\beta \setminus \Omega_\gamma} (\nabla u^2 \cdot \phi \nabla \phi) \, dx \right| \\ &= C \left| \int_{\Omega_\beta \setminus \Omega_\gamma} u^2 \operatorname{div}(\phi \nabla \phi) \, dx \right| \\ &\leq C \beta^{-\varepsilon+2} \int_{\Omega_\beta \setminus \Omega_\gamma} u^2 \delta^{\varepsilon-2} \, dx \\ &\leq C \int_{\Omega_\beta} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx \end{aligned} \tag{12}$$

grâce, encore une fois, au lemme 7. Le résultat recherché est obtenu en combinant (11), (12) et la première égalité. $\square$

Nous sommes dès à présent en mesure de livrer le résultat clef de cette section qui représente en fait une généralisation pure et simple de l'inégalité de Hardy sur des domaines satisfaisant l'hypothèse (H), déjà démontrée dans [5]. L'idée directrice de la démonstration consiste à faire usage du lemme 7 «près» de la frontière de Ω , du lemme 6 «loin» de la frontière ainsi que de l'inégalité de Poincaré sur le reste du domaine. Évidemment, afin d'être en mesure d'utiliser les résultats précédemment cités, il faudra tronquer puis «rectifier» par la suite les fonctions prises dans $D(\Omega)$.

Théorème 19. (*Inégalité de type Hardy-Sobolev*) Soit $N \geq 3$, Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$ satisfaisant l'hypothèse (H) ainsi que $0 \leq \varepsilon < 1$ de même que $(\varepsilon - 2)/2 \leq b \leq \varepsilon/2$. Il existe alors une constante $C > 0$ qui fasse en sorte que l'inégalité (2) ait lieu pour toute fonction $u \in D(\Omega)$, avec encore $\alpha := bq$ et où q est donné par (3).

Preuve. Prenons $0 < \beta < \beta_0 < 1$ et considérons la partition suivante de Ω :

$$\Omega_\beta, B^c := \Omega \setminus \overline{B(0, 5R)} \text{ et } K := \Omega \setminus (\Omega_\beta \cup B^c),$$

où $R > 1$ est choisi afin d'avoir $\partial\Omega \subset B(0, R)$. L'inégalité sur l'ensemble Ω_β découle alors directement du lemme 17.

1. Afin de l'établir également sur l'ensemble B^c , nous introduirons la fonction $\Psi \in C^\infty(\Omega)$ définie comme suit :

$$\Psi(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in B^c \\ 0, & \text{si } x \in \Omega \text{ est tel que } |x| < 4R. \end{cases}$$

Comme $|x| > 5R$, il s'ensuit qu'à la fois $\delta(x)/2 \leq |x| - R \leq \delta(x)$ et que $4/5|x| \leq |x| - R \leq |x|$. D'où,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(\Psi u)|^2 \delta^\varepsilon \, dx &\geq \int_{\Omega} |\nabla(\Psi u)|^2 (|x| - R)^\varepsilon \, dx \\ &\geq (4/5)^\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla(\Psi u)|^2 |x|^\varepsilon \, dx. \end{aligned}$$

Ensuite, en faisant usage des résultats obtenus par Caffarelli, Kohn et Nirenberg (voir lemme 6 ou encore, [3]) puis repris par Willem dans [15], nous parvenons à :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(\Psi u)|^2 |x|^\varepsilon \, dx &\geq S(\varepsilon/2, b, \mathbb{R}^N) \left(\int_{\Omega} |\Psi u|^q |x|^\alpha \, dx \right)^{2/q} \\ &\geq S(\varepsilon/2, b, \mathbb{R}^N) \left(\int_{\Omega} |\Psi u|^q (|x| - R)^\alpha \, dx \right)^{2/q} \\ &\geq S(\varepsilon/2, b, \mathbb{R}^N) \Upsilon \left(\int_{\Omega} |\Psi u|^q \delta^\alpha \, dx \right)^{2/q} \\ &\geq C \left(\int_{\Omega} |\Psi u|^q \delta^\alpha \, dx \right)^{2/q}, \end{aligned}$$

où

$$\Upsilon := \begin{cases} 2^{-2b}, & \text{si } b \leq 0, \\ 1, & \text{si } b < 0. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(\Psi u)|^2 \delta^\varepsilon \, dx &\geq C \left(\int_{\Omega} |\Psi u|^q \delta^\alpha \, dx \right)^{2/q} \\ &\geq C \left(\int_{B^c} |u|^q \delta^\alpha \, dx \right)^{2/q}. \end{aligned} \tag{13}$$

2. Sur l'ensemble compact K , nous ferons cette fois usage de la fonction φ , $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ avec $0 \leq \varphi \leq 1$, dont voici la définition :

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \Omega_{\beta/2} \text{ ou si } x \in B^c, \\ 1, & \text{si } x \notin \Omega_{\beta/2} \text{ et que } |x| < 4R. \end{cases}$$

Puisque $(\Omega \setminus \Omega_{\beta/2}) \cap B(0, 5R)$ est un domaine de classe C^2 , le théorème 16 nous permet d'affirmer que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(\varphi u)|^2 \delta^\varepsilon dx &\geq C \left(\int_{\Omega} |(\varphi u)|^q \delta^\alpha dx \right)^{2/q} \\ &\geq C \left(\int_K |u|^q \delta^\alpha dx \right)^{2/q}. \end{aligned} \quad (14)$$

3. Nous devons maintenant majorer $\int_{\Omega} |\nabla(\Psi u)|^2 \delta^\varepsilon dx$ et $\int_{\Omega} |\nabla(\varphi u)|^2 \delta^\varepsilon dx$ par $C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx$. Or, il survient que les expressions $|\nabla(\Psi u)|^2$ et $|\nabla(\varphi u)|^2$ sont respectivement nulles en dehors des ensembles $B(0, 5R) \setminus B(0, 4R)$ et $(B(0, 5R) \setminus B(0, 4R)) \cup (\Omega_{\beta} \setminus \Omega_{\beta/2})$. Les mêmes raisonnements nous permettront, dans les deux cas, d'obtenir le résultat souhaité sur l'ensemble $B(0, 5R) \setminus B(0, 4R)$, car en ce qui concerne l'ensemble $\Omega_{\beta} \setminus \Omega_{\beta/2}$, l'inégalité découle directement du lemme 18. Nous n'exposerons donc que les calculs concernant la majoration de $\int_{\Omega} |\nabla(\Psi u)|^2 \delta^\varepsilon dx$, les autres étant identiques. De surcroît, la même démarche que celle exposée dans le lemme 18, nous autorise à affirmer, après avoir posé $B_1 := B(0, 5R) \setminus B(0, 4R)$, que

$$\begin{aligned} \int_{B_1} |\nabla(\Psi u)|^2 \delta^\varepsilon dx &= \int_{B_1} \Psi^2 |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx + \int_{B_1} u^2 |\nabla \Psi|^2 \delta^\varepsilon dx \\ &\quad + 2 \int_{B_1} u \Psi (\nabla u \cdot \nabla \Psi) \delta^\varepsilon dx, \\ \int_{B_1} |\nabla \Psi|^2 u^2 \delta^\varepsilon dx &\leq C \int_{B_1} u^2 dx, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\int_{B_1} u \Psi (\nabla u \cdot \nabla \Psi) \delta^\varepsilon dx \leq C \int_{B_1} u^2 dx. \quad (16)$$

Le problème, aussi bien pour (15) que pour (16), consiste maintenant à traiter l'intégrale $\int_{B_1} u^2 dx$. Pour ce faire, considérons la fonction ϕ du lemme 18, en posant $\gamma := \beta/2$. Puisque d'un autre côté nous avons pu, sans perte de généralité, supposer que $0 \in \partial\Omega$, nous pouvons, en prolongeant au besoin par 0, définir la fonction ϕu sur $B(0, 5R) \setminus B(0, \beta/2)$. Ensuite, il nous faudra faire un usage simultané de la proposition 8 et du lemme 10 de la manière suivante. Choisissons de noter P le passage en coordonnées polaires et B_2 le domaine $B(0, 5R) \setminus B(0, \beta/2)$, alors

$$P : B_2 \setminus \mathcal{N} \longrightarrow]\beta/2, 5R[\times]0, 2\pi[\times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[^{N-2},$$

où $\mathcal{N}$ est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. En nous servant du lemme 10, nous obtenons un prolongement par rapport à r (la première variable) de la fonction $\phi u \circ P^{-1}$ qui est maintenant définie sur le domaine :

$$]\beta/2, 10R - \beta/2[\times]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{N-2}.$$

Finalement, grâce à P de même qu'à la proposition 8, nous obtenons un prolongement, noté simplement $(\phi u)^*$, sur

$$B_3 := B(0, 10R - \beta/2) \setminus B(0, \beta/2)$$

possédant de surcroît la propriété que

$$\int_{B_3} |\nabla(\phi u)^*|^2 dx \leq C \int_{B_2} |\nabla(\phi u)|^2 dx,$$

où $C > 0$. Il s'agit maintenant de constater, en appliquant l'inégalité de Poincaré à la fonction $(\phi u)^*$, que

$$\begin{aligned} \int_{B_1} u^2 dx &\leq \int_{B_3} ((\phi u)^*)^2 dx \\ &\leq C \int_{B_3} |\nabla(\phi u)^*|^2 dx \\ &\leq C \int_{\Omega} |\nabla(\phi u)|^2 dx \\ &\leq C (\beta/2)^{-\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla(\phi u)|^2 \delta^\varepsilon dx \\ &\leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx, \end{aligned}$$

en vertu du lemme 18. Cette dernière inégalité permet la majoration de (15) et de (16) par $C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx$ et donc par voie de conséquence, celle de $\int_{\Omega} |\nabla(\Psi u)|^2 \delta^\varepsilon dx$.

4. Conséquemment, en vertu des raisonnements de la partie 3, du lemme 17 de même que des inégalités (13) et (14), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx &\geq C \left[\left(\int_{\Omega_\beta} |u|^q \delta^\alpha dx \right)^{2/q} + \left(\int_{B^c} |u|^q \delta^\alpha dx \right)^{2/q} + \left(\int_K |u|^q \delta^\alpha dx \right)^{2/q} \right] \\ &\geq C \left(\int_{\Omega} |u|^q \delta^\alpha dx \right)^{2/q}. \quad \square \end{aligned}$$

4. Inégalités sur des domaines cylindriques. Après avoir établi les inégalités précédentes pour des domaines satisfaisant l'hypothèse (H) , une question on ne peut plus naturelle s'est imposée à nous : qu'en est-il pour des domaines non bornés dont la frontière n'est pas compacte ? Les domaines cylindriques que nous allons maintenant définir, représentent sans doute le prototype le plus élémentaire de tels domaines.

Définition 20. Soit $N \geq 2$, $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $N - l > 0$ ainsi que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Nous dirons que Ω est un *domaine cylindrique*, s'il existe un domaine $\omega \subset \mathbb{R}^{N-l}$ tel que Ω puisse être écrit sous la forme :

$$\Omega := \mathbb{R}^l \times \omega.$$

De plus, en posant $x = (y, z)$, où y et z appartiennent respectivement à $\mathbb{R}^l$ et à ω , il devient clair que

$$\delta(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega) = \text{dist}(z, \partial\omega),$$

d'où $\Omega_\beta = \mathbb{R}^l \times \omega_\beta$.

Tout comme dans la démonstration du théorème 19, il nous faudra, afin d'établir l'inégalité (2) pour des domaines cylindriques, découper le domaine en plusieurs sous-ensembles sur lesquels sera appliqué le précédent résultat. Étant donné qu'il nous faudra prolonger la fonction originale tronquée par la partition choisie, nous ferons donc face à des problèmes de recollement. Cependant, le simple fait que l'inégalité de Hardy soit valide dans Ω nous permettra de surmonter ces difficultés.

Proposition 21. Soit $N \geq 4$, $l \geq 1$ des entiers positifs avec $N - l \geq 3$ et ω , un domaine de $\mathbb{R}^{N-l}$ satisfaisant l'hypothèse (H). Alors, sur le domaine cylindrique $\Omega := \mathbb{R}^l \times \omega$ l'inégalité de Hardy (1) a lieu et de plus,

$$S_\varepsilon(\Omega) \geq S_\varepsilon(\omega).$$

Preuve. Soit $u \in D(\Omega)$, il est alors aisé de constater que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx &= \int_{\mathbb{R}^l} \int_{\omega} |\nabla u(y, z)|^2 \delta^\varepsilon \, dz \, dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^l} \int_{\omega} |\nabla_z u(y, z)|^2 (\delta'(z))^\varepsilon \, dz \, dy \\ &\geq S_\varepsilon(\omega) \int_{\mathbb{R}^l} \int_{\omega} u^2(y, z) (\delta'(z))^{\varepsilon-2} \, dz \, dy \\ &= S_\varepsilon(\omega) \int_{\Omega} u^2 \delta^{\varepsilon-2} \, dx, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $S_\varepsilon(\Omega) \geq S_\varepsilon(\omega)$. $\square$

Remarque 22. Sous les mêmes hypothèses que dans la présente proposition, en choisissant $0 < \beta < \beta_0$ et en changeant par Ω_β le domaine des précédentes intégrales, il nous aurait été possible d'obtenir, en invoquant le lemme 7 :

$$\int_{\Omega_\beta} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx \geq (c_\varepsilon + o(1)) \int_{\Omega_\beta} u^2 \delta^{\varepsilon-2} \, dx, \quad \forall u \in D(\Omega),$$

où $o(1)$ représente une quantité qui tend vers 0, lorsque $\beta \rightarrow 0$. Terminons en mentionnant qu'une démonstration due à Michel Willem et présentée dans [5] permet de conclure que les quantités $S_\varepsilon(\Omega)$ ainsi que $S_\varepsilon(\omega)$ sont en fait égales.

Il nous faut dès à présent nous restreindre à des domaines Ω dont la section ω est un ouvert *borné* possédant une frontière $\partial\omega$ de classe C^2 . Les démonstrations

subséquentes se trouveront ainsi simplifiées par le fait qu'il existera alors une borne supérieure $M := \text{diam}(\omega)$ de la fonction distance $\delta(x)$. Avant de présenter le dernier résultat de la section, convenons des notations et appellations suivantes.

Définition 23. Soit un entier $l \geq 1$, de même que $a = (a_1, a_2, \dots, a_l) \in \mathbb{Z}^l$, alors nous appellerons *pavés* et noterons respectivement Q_a et $\tilde{Q}_a$, les sous-ensembles de $\mathbb{R}^l$ que voici :

$$Q_a := \prod_{i=1}^l]a_i, a_i + 1[\quad \text{et} \quad \tilde{Q}_a := \prod_{i=1}^l]a_i - 1/3, a_i + 4/3[.$$

Théorème 24. Soit $N \geq 4$, $l \geq 1$ des entiers positifs avec $N - l \geq 3$ et ω , un domaine borné de $\mathbb{R}^{N-l}$ satisfaisant l'hypothèse (H). Alors, pour le domaine cylindrique $\Omega := \mathbb{R}^l \times \omega$, en reprenant comme dans le théorème 19, $0 \leq \varepsilon < 1$ de même que $(\varepsilon - 2)/2 \leq b \leq \varepsilon/2$, il existe une constante $C > 0$ qui fasse en sorte que l'inégalité de type Hardy-Sobolev (2) soit satisfaite par toute fonction $u \in D(\Omega)$, avec $\alpha := bq$ et où q est défini comme en (3).

Preuve. Soit $a \in \mathbb{Z}^l$, montrons en premier lieu cette inégalité sur le domaine $\tilde{Q}_a \times \omega$.

1. Pour ce faire, utilisons la fonction $\Psi \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \Psi \leq 1$, définie comme suit :

$$\Psi := \begin{cases} 1, & \text{si } x = (y, z) \text{ est tel que nous ayons à la fois } y \in Q_a \text{ et } z \in \omega \setminus \omega_{\beta/2}, \\ 0, & \text{si } z \in \omega_{\beta/2} \cup \partial\omega \text{ ou si } y \in (\mathbb{R}^l \setminus \tilde{Q}_a), \end{cases}$$

où β est pris suivant les mêmes spécifications que dans le théorème 19. Il est, de plus, aisément vérifiable que les gradients des fonctions Ψ et $1 - \Psi$ sont nuls *hormis* sur les ensembles :

$$E_1 := Q_a \times (\omega_{\beta/2} \setminus \omega_{\beta/2}) \quad \text{et} \quad E_2 := (\tilde{Q}_a \setminus Q_a) \times (\omega \setminus \omega_{\beta/2}).$$

Enfin, nous considérerons la partition suivante de l'ensemble $Q_a \times \omega$:

$$Q_a \times \omega = (Q_a \times \omega_{\beta/2}) \dot{\cup} (Q_a \times (\omega \setminus \omega_{\beta/2})).$$

- (a) Commençons par établir cette inégalité sur l'ensemble $E_3 := Q_a \times (\omega \setminus \omega_{\beta/2})$. Soit donc $u \in D(\Omega)$ et posons $\tilde{E}_3 := \tilde{Q}_a \times (\omega \setminus \omega_{\beta/2})$, alors en vertu du théorème 19

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{E}_3} |\nabla(\Psi u)|^2 \delta^\varepsilon dx &\geq C \left(\int_{\tilde{E}_3} |\Psi u|^q \delta^\alpha dx \right)^{2/q} \\ &\geq C \left(\int_{E_3} |u|^q \delta^\alpha dx \right)^{2/q}. \end{aligned} \quad (17)$$

- (b) Nous procéderons de la même manière dans le cas de l'ensemble $E_4 := Q_a \times \omega_{\beta/2}$ en prenant $u \in D(\Omega)$, en posant $\tilde{E}_4 := \tilde{Q}_a \times \omega_{\beta/2}$ et en invoquant cette

fois-ci le lemme 17, pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{E}_4} |\nabla((1 - \Psi)u)|^2 \delta^\varepsilon dx &\geq C \left(\int_{\tilde{E}_4} |(1 - \Psi)u|^q \delta^\alpha dx \right)^{2/q} \\ &\geq C \left(\int_{E_4} |u|^q \delta^\alpha dx \right)^{2/q}. \end{aligned} \quad (18)$$

Il nous faut de nouveau majorer les intégrales $\int_{\tilde{E}_3} |\nabla(\Psi u)|^2 \delta^\varepsilon dx$ et $\int_{\tilde{E}_4} |\nabla((1 - \Psi)u)|^2 \delta^\varepsilon dx$ respectivement par les intégrales $\int_{\tilde{E}_3} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx$ et $\int_{\tilde{E}_4} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx$. Les raisonnements employés à partir de maintenant s'appliqueront aussi bien à la fonction $1 - \Psi$. Rappelons que $\nabla \Psi \neq 0$ seulement sur les ensembles E_1 et E_2 et que nous avons la décomposition :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{E}_3} |\nabla(\Psi u)|^2 \delta^\varepsilon dx &= \int_{\tilde{E}_3} \Psi^2 |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx + \int_{E_1 \cup E_2} u^2 |\nabla \Psi|^2 \delta^\varepsilon dx \\ &\quad + 2 \int_{E_1 \cup E_2} u \Psi (\nabla u \cdot \nabla \Psi) \delta^\varepsilon dx. \end{aligned}$$

La majoration du premier terme étant triviale, passons donc au second. Étant donné que sur l'ensemble $E_1 \cup E_2$, $\beta/2 \leq \delta(x) \leq M$, où $M = \text{diam } \omega$, alors

$$\begin{aligned} \int_{E_1 \cup E_2} u^2 |\nabla \Psi|^2 \delta^\varepsilon dx &\leq C \int_{E_1 \cup E_2} u^2 \delta^\varepsilon dx \\ &\leq CM^2 \int_{E_1 \cup E_2} u^2 \delta^{\varepsilon-2} dx \\ &\leq C \int_{\tilde{Q}_a} \int_{\omega} u^2(y, z) \delta^{\varepsilon-2}(z) dz dy \\ &\leq CS_\varepsilon(\omega)^{-1} \int_{\tilde{Q}_a} \int_{\omega} |\nabla_z u(y, z)|^2 \delta^\varepsilon(z) dz dy \\ &\leq C \int_{\tilde{Q}_a \times \omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx \end{aligned}$$

en nous inspirant des calculs produits dans la démonstration de la proposition 21. En ce qui concerne le troisième terme,

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_1 \cup E_2} u \Psi (\nabla u \cdot \nabla \Psi) \delta^\varepsilon dx \right| &\leq M^\varepsilon \left| \int_{E_1 \cup E_2} u \Psi (\nabla u \cdot \nabla \Psi) dx \right| \\ &= C \left| \int_{E_1 \cup E_2} u^2 \text{div}(\Psi \nabla \Psi) dx \right| \\ &\leq CM^{2-\varepsilon} \int_{\tilde{Q}_a \times \omega} u^2 \delta^{\varepsilon-2} dx \\ &\leq C \int_{\tilde{Q}_a \times \omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon dx. \end{aligned}$$

Il existe donc une constante $C > 0$ qui soit telle que :

$$\int_{\tilde{E}_3} |\nabla(\Psi u)|^2 \delta^\varepsilon \, dx \leq C \int_{\tilde{Q}_a \times \omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx, \quad (19)$$

$$\int_{\tilde{E}_4} |\nabla((1 - \Psi)u)|^2 \delta^\varepsilon \, dx \leq C \int_{\tilde{Q}_a \times \omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx. \quad (20)$$

(17) et (18) conjointement avec les inégalités (19) et (20), nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{Q}_a \times \omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx &\geq C \left(\int_{E_3} |u|^q \delta^\alpha \, dx \right)^{2/q} + \left(\int_{E_4} |u|^q \delta^\alpha \, dx \right)^{2/q} \\ &\geq C \left(\int_{Q_a \times \omega} |u|^q \delta^\alpha \, dx \right)^{2/q}. \end{aligned} \quad (21)$$

2. Dans un deuxième temps, puisque toutes les intégrales impliquées dans l'inégalité sont invariantes par translation suivant la variable y , il s'ensuit que la constante obtenue en (21) sera la même quel que soit $a \in \mathbb{Z}^l$. Ensuite, considérons la partition suivante de Ω (à un ensemble de mesure nulle près) :

$$\bigcup_{a \in \mathbb{Z}^l} Q_a \times \omega$$

qui est telle que chaque élément $x \in \Omega$ appartient à au plus 2^l ensembles $\tilde{Q}_a \times \omega$. Finalement, grâce à l'inégalité (21), nous pouvons conclure que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx &\geq (2^l + 1)^{-1} \sum_{a \in \mathbb{Z}^l} \int_{\tilde{Q}_a \times \omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx \\ &\geq C \sum_{a \in \mathbb{Z}^l} \left(\int_{Q_a \times \omega} |u|^q \delta^\alpha \, dx \right)^{2/q} \\ &\geq C \left(\int_{\Omega} |u|^q \delta^\alpha \, dx \right)^{2/q}. \quad \square \end{aligned}$$

5. Conclusion. Les méthodes qui ont été présentées ici, c'est-à-dire : l'emploi de plusieurs inégalités sur différentes parties du domaine original de même que le procédé de recollement des fonctions ainsi tronquées, nous semblent pouvoir être appliquées avec succès à bon nombre de problèmes semblables. Nous croyons en outre possible et ce, en nous basant sur le travail dans le cas unidimensionnel effectué par Opic et Kufner dans leur ouvrage [10], d'exhiber des bornes supérieures de la constante optimale $HS_{\varepsilon, b, q}(\Omega)$. En effet, il faut savoir que la valeur de la constante optimale dans ce type d'inégalités et dans bien d'autres similaires, est fortement reliée à l'existence d'une fonction minimisante (voir entre autres [2, 4, 6, 9, 11, 14, 15]). Une prochaine étape pourrait consister en l'étude, à l'aide des lemmes de décomposition développés

dans [5], de la généralisation que voici, similaire à celle considérée dans [6] en ce qui concerne les inégalités de Hardy,

$$HS_\lambda := \inf_{u \in D_\varepsilon^{1,2}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx - \lambda \int_\Omega p u^2 \delta^\varepsilon \, dx}{\left(\int_\Omega |u|^q \delta^\alpha \, dx \right)^{2/q}}$$

où les conditions sur p seront déterminées de manière à garantir l'existence de l'intégrale correspondante. Il nous semble possible sans trop spéculer d'obtenir, à l'instar de ce qui fut montré dans [2] et [6], une valeur critique λ^* faisant en sorte qu'il n'existera une fonction minimisante réalisant la valeur HS_λ que si $\lambda > \lambda^*$.

Une généralisation des précédents résultats aux domaines éventuellement cylindriques présentés par Ramos, Wang et Willem dans [11], nous semble tout à fait envisageable. Soulignons que les hypothèses devant être satisfaites par ces domaines correspondent à des conditions aux limites apparaissant dans certaines EDP.

English extended abstract. Our main goal is to show Hardy-Sobolev type inequalities hold in a class of unbounded domains. Results concerning bounded domains are well known by now (see [10]) but nothing has been done yet in the case of unbounded domains except, perhaps, in the case of simple domains like $\mathbb{R}^N \setminus 0$. Until the end, we shall take $N \geq 3$ and we shall exclusively consider domains Ω whose boundaries, $\partial\Omega$, are not the empty set. After that, we shall let:

$$\delta(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega)$$

and for $0 \leq \varepsilon < 1$, we shall say *Hardy's inequality* holds in Ω if there exists $C > 0$ such that

$$\int_\Omega u^2 \delta^{\varepsilon-2} \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx, \quad \forall u \in D(\Omega), \quad (22)$$

where $D(\Omega)$ is the space of C^∞ functions with compact support in Ω and where constant C rely on the domain. Now we introduce inequalities we shall be interested by in the rest of the paper.

Definition 1. Let $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $0 \leq \varepsilon < 1$ and $(\varepsilon - 2)/2 \leq b \leq \varepsilon/2$. We shall say that an *Hardy-Sobolev type inequality* holds in Ω if

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^q \delta(x)^\alpha \, dx \right)^{2/q} \leq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \delta(x)^\varepsilon \, dx, \quad \forall u \in D(\Omega), \quad (23)$$

where $\alpha := bq$ with q given by the expression:

$$q := \frac{2N}{N - 2 + \varepsilon - 2b}. \quad (24)$$

Definition 2. Let $N \geq 3$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ an open set. The Hilbert space $D_\varepsilon^{1,2}(\Omega)$ will be obtained by completing the space $D(\Omega)$ with respect to the scalar product:

$$(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \delta^\varepsilon \, dx.$$

In addition, it easy to see that space is a sensible choice since, if in Ω Hardy-Sobolev inequality holds then norm $|\cdot|_{q,\alpha}$ of a function $u \in D_\varepsilon^{1,2}(\Omega)$ will be bounded by the norm of that function in $D_\varepsilon^{1,2}(\Omega)$. Here is a lemma due to Caffarelli, Kohn and Nirenberg (see [3]) which will be very useful later.

Lemma 3. *Let $N \geq 3$, $0 \leq \varepsilon < 1$, $(\varepsilon - 2)/2 \leq b \leq \varepsilon/2$ and q given by (24). Then for each u in $D(\mathbb{R}^N)$, we have:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q |x|^{bq} dx \right)^{2/q} \leq S(\varepsilon/2, b, \mathbb{R}^N) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 |x|^\varepsilon dx,$$

where $S(\varepsilon/2, b, \mathbb{R}^N)$ is a positive constant.

Davies in [7] show that value of optimal constant in inequality (22) rely greatly on regularity of the boundary. It is for that reason we shall consider the following assumption:

(H) Ω is a domain with a C^2 compact boundary.

Now let introduce our main result:

Theorem 4. *(Hardy-Sobolev type inequalities) Let $N \geq 3$, Ω a domain in $\mathbb{R}^N$ satisfying assumption (H) and the following real numbers $0 \leq \varepsilon < 1$, $(\varepsilon - 2)/2 \leq b \leq \varepsilon/2$. Then we may find a constant $C > 0$ for which the Hardy-Sobolev inequality (23) is satisfied by all function in $u \in D(\Omega)$, with $\alpha := bq$ and where the value of q is given by (24).*

Main idea of the proof. We begin by partitioning domain Ω as follow:

$$\Omega_\beta, B^c := \Omega \setminus \overline{B(0, 5R)} \text{ and } K := \Omega \setminus (\Omega_\beta \cup B^c).$$

The main idea is to use lemma 3 “far of the boundary”, one dimensional Hardy’s inequality “near the boundary” and Poincare’s inequality in the remaining part of Ω . But, to do that, we have to truncate initial function $u \in D(\Omega)$ and have to “rectify” it, in order to be able to use preceding results. So we need some auxiliary functions Ψ on set B^c and φ on compact set K , $\Psi, \varphi \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \Psi, \varphi \leq 1$ and defined by:

$$\Psi(x) := \begin{cases} 1, & \text{if } x \in B^c \\ 0, & \text{if } x \in \Omega \text{ is such that } |x| < 4R. \end{cases}$$

and by:

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0, & \text{if } x \in \Omega_{\beta/2} \text{ or if } x \in B^c, \\ 1, & \text{if } x \notin \Omega_\beta \text{ and } |x| < 4R. \end{cases}$$

We shall overcome “pasting” problem by using polar coordinates and by making a symmetric extension (with respect to variable r) of truncated functions. $\square$

Next, our aim is to answer the following question: does it exist a class of domain with noncompact boundary for which inequality (23) holds? Cylindrical domains are probably the nicest domains having this particularity.

Definition 5. Let $N \geq 2$, $l \in \mathbb{N}^*$ such that $N - l > 0$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Ω will be a *strip-like or cylindrical domain*, if we can find a domain $\omega \subset \mathbb{R}^{N-l}$ which allow us to express Ω in the form:

$$\Omega := \mathbb{R}^l \times \omega.$$

Definition 6. Let $l \geq 1$, a positive integer and $a = (a_1, a_2, \dots, a_l) \in \mathbb{Z}^l$. We shall refer by *cubes* and we shall denote respectively Q_a and $\tilde{Q}_a$, the following subsets of $\mathbb{R}^l$:

$$Q_a := \prod_{i=1}^l]a_i, a_i + 1[\quad \text{and} \quad \tilde{Q}_a := \prod_{i=1}^l]a_i - 1/3, a_i + 4/3[.$$

In order to be able to show the next result, we have to make the additional assumption that ω is also a *bounded* domain. It will imply that $M := \text{diam}(\omega)$ will be an upper bound of function $\delta(x)$.

Theorem 7. Let $N \geq 4$, $l \geq 1$ positive integers satisfying $N - l \geq 3$ and let ω , a bounded domain of $\mathbb{R}^{N-l}$ with a C^2 boundary. So we may asserts that, for cylindrical domain $\Omega := \mathbb{R}^l \times \omega$, taking as we did in theorem 4, $0 \leq \varepsilon < 1$ and $(\varepsilon - 2)/2 \leq b \leq \varepsilon/2$, there exists a constant $C > 0$ such that Hardy-Sobolev inequality (23) holds for all function $u \in D(\Omega)$, where $\alpha := bq$ and where q is given again by expression (24).

Main idea of the proof. We first prove, using theorem 4 and the fact that Hardy's inequality (22) holds in Ω , this inequality:

$$\int_{\tilde{Q}_a \times \omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx \geq C \left(\int_{Q_a \times \omega} |u|^q \delta^\alpha \, dx \right)^{2/q},$$

holds in sets of the form $\tilde{Q}_a \times \omega$. Moreover, by translation invariance of the preceding inequality, same constant C will be obtained for all $a \in \mathbb{Z}^l$. After that, we consider this specific partition of Ω (up to a negligible set):

$$Q_a \times \omega = (Q_a \times \omega_{\beta/2}) \dot{\cup} (Q_a \times (\omega \setminus \omega_{\beta/2})).$$

Since each $x \in \Omega$ belongs to at most 2^l sets $\tilde{Q}_a \times \omega$, we may conclude:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx &\geq (2^l + 1)^{-1} \sum_{a \in \mathbb{Z}^l} \int_{\tilde{Q}_a \times \omega} |\nabla u|^2 \delta^\varepsilon \, dx \\ &\geq C \sum_{a \in \mathbb{Z}^l} \left(\int_{Q_a \times \omega} |u|^q \delta^\alpha \, dx \right)^{2/q} \\ &\geq C \left(\int_{\Omega} |u|^q \delta^\alpha \, dx \right)^{2/q}. \quad \square \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
2. H. Brezis et M. Marcus, *Hardy's inequalities revisited*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **25** (1997), 217–237.
3. L. Caffarelli, R. Kohn et L. Nirenberg, *First order interpolation inequalities with weights*, Composition Math. **53** (1984), 259–275.
4. F. Colin, *Hardy's Inequality in unbounded Domains*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **17**; no. 2 (2001), 277–284.
5. F. Colin, *Inégalités de Hardy sur des domaines non bornés*, Thèse de doctorat (Ph.D.), Université de Sherbrooke, Sherbrooke, 2002.
6. F. Colin et Y. Hupperts, *Minimisation Problems related to generalized Hardy's Inequalities*; Paraîtra dans Nonlinear Analysis.
7. E. B. Davies, *The Hardy Constant*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **46** (1995), 417–431.
8. A. Kufner, *Imbedding theorems for general Sobolev weight spaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **23** (1969), 373–386.
9. M. Marcus, V. J. Mizel et Y. Pinchover, *On the best constant for Hardy's inequality in $\mathbb{R}^N$* , Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 3237–3255.
10. B. Opic et A. Kufner, *Hardy-type Inequalities*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 219, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.
11. M. Ramos, Z.-Q. Wang et M. Willem, *Positive solutions for elliptic equations with critical growth in unbounded domains*, Calculus of variations and differential equations, Technion 1988, Chapman and Hall, Boca Raton, 1999, pp. 192–199.
12. Z.-Q. Wang et M. Willem, *Singular minimization problems*, J. Differential Equations **161** (2000), 307–320.
13. M. Willem, *Analyse harmonique réelle*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1995.
14. M. Willem, *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol. 24, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.
15. M. Willem, *A decomposition lemma and critical minimization problems*; To appear in The Proceedings of the Conference of the Morningside Center of Mathematics, Beijing (1999).
16. J. Wloka, *Partial differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

FABRICE COLIN

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

SHERBROOKE (QUÉBEC),

J1K 2R1, CANADA

COURRIEL : `fabrice.colin@dm1.usherb.ca`