

GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE D'HÉRON POUR TOUTE RACINE SIMPLE D'UNE ÉQUATION NON LINÉAIRE

JAAK PEETRE

RÉSUMÉ. Deslauriers et Dubuc [DD] ont montré que l'approximation dans la procédure classique d'Héron, pour trouver la racine cubique d'un nombre, est en fait cubique et non seulement quadratique, comme on pourrait le croire de prime abord. Nous montrons, dans la présente note, que la même méthode convenablement modifiée, peut être appliquée à pratiquement n'importe quelle fonction $g(\xi)$, non seulement la racine cubique $\sqrt[3]{\xi}$. L'idée consiste essentiellement à remplacer la fonction $g(\xi)$ sur un intervalle donné (α, β) , par une fonction rationnelle homographique ajustée de façon appropriée $g^*(\xi)$. L'erreur commise, $g^*(\xi) - g(\xi)$, est d'ordre de $(\beta - \alpha)^3$. La méthode peut être appliquée, par exemple, au calcul numérique des fonctions sinus et tangente ainsi qu'à d'autres fonctions reliées. En fait, une légère extension de notre méthode, faisant appel à la dérivée au sens de Schwarz, produit même une approximation dont l'erreur est de l'ordre $(\beta - \alpha)^4$.

ABSTRACT. Deslauriers and Dubuc [DD] have shown that the approximation in the classical procedure by Heron for finding the cubic root of a number in fact is cubic, not just quadratic, as one might believe at first sight. In this note we indicate that the same method, conveniently modified, can be applied to practically any other function $g(\xi)$, not just the cubic root $\sqrt[3]{\xi}$. Roughly speaking, our idea is to replace $g(\xi)$ on a given interval (α, β) by an appropriately adjusted fractional linear function $g^*(\xi)$. The error $g^*(\xi) - g(\xi)$ is of the magnitude $(\beta - \alpha)^3$. For instance, the method applies to the numerical calculation of sines and tangents as well as of other related functions. Indeed, a slight extension of our method, involving the Schwarz derivative, also gives an approximation with an error of the magnitude $(\beta - \alpha)^4$.

Dans un article assez récent [DD], les auteurs montrent que la méthode classique d'Héron d'Alexandrie [He] (vers l'an 60 après J.-C.) pour trouver la racine cubique converge en effet cubiquement, non seulement quadratiquement, ce qui est une surprise. Nous allons montrer ci-dessous que la même méthode, légèrement modifiée, s'applique à presque n'importe quelle fonction.

Généralisation. Rappelons d'abord brièvement en quoi consiste la méthode d'Héron. Soit $\xi > 0$, le nombre dont on cherche la racine cubique, soit $x = \sqrt[3]{\xi}$. Autrement dit, il est question de résoudre l'équation $x^3 = \xi$. Supposons qu'on connaît déjà deux valeurs

Reçu le 17 mai 1999 et, sous forme définitive, le 11 décembre 2000.

approchées a et b de x , avec $a < x < b$. Alors on obtient une approximation encore plus proche en formant la quantité x^* comme voici :

$$x^* = \frac{a^2(b^3 - \xi) - b^2(a^3 - \xi)}{a(b^3 - \xi) - b(a^3 - \xi)}. \quad (1)$$

Remarque. On note que x^* est une valeur moyenne de a et b , donc en particulier $a < x^* < b$.

Notre première généralisation de (1) est la formule

$$x^* = \frac{a^2(f(b) - \xi) - b^2(f(a) - \xi)}{a(f(b) - \xi) - b(f(a) - \xi)} \quad (2)$$

où $f(x)$ est une fonction quelconque. L'équation $x^3 = \xi$ est donc ici remplacée par $f(x) = \xi$. On peut maintenant démontrer qu'on a une approximation cubique si, et seulement si, f satisfait à l'équation différentielle $xf'' = 2f'$. La solution de cette équation est $f = Ax^3 + B$. On retrouve donc essentiellement le cas de la racine cubique.

Pour trouver une formule plus générale, il faut remplacer la formule (2) par

$$x^* = \frac{a\phi(a)(f(b) - \xi) - b\phi(b)(f(a) - \xi)}{\phi(a)(f(b) - \xi) - \phi(b)(f(a) - \xi)} \quad (3)$$

où $\phi(x)$ est une nouvelle fonction.

Exemple. Si $\phi(x) = x$ on retrouve (2).

Pour analyser ce cas général, il sera commode de passer à la fonction inverse. Il sera aussi commode de s'imaginer qu'on a deux droites, une droite *latine* de point générique x et l'autre *grecque* de point générique ξ . Soit donc $g(\xi)$ l'inverse de la fonction $f(x)$ et posons aussi $\psi(\xi) = \phi(g(\xi))$. On voit alors que (3) admet l'interprétation suivante : on approche la fonction donnée $g(\xi)$ par une fonction homographique $g^*(\xi)$, à savoir la fonction

$$g^*(\xi) = \frac{g(\alpha)\psi(\alpha)(\beta - \xi) - g(\beta)\psi(\beta)(\alpha - \xi)}{\psi(\alpha)(\beta - \xi) - \psi(\beta)(\alpha - \xi)}; \quad (4)$$

ça résulte de (3) en posant formellement $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. C'est la formule (4) qui sera notre formule de base.

Analyse du reste. Considérons la différence

$$g^*(\xi) - g(\xi) = \frac{(g(\alpha) - g(\xi))\psi(\alpha)(\beta - \xi) - (g(\beta) - g(\xi))\psi(\beta)(\alpha - \xi)}{\psi(\alpha)(\beta - \xi) - \psi(\beta)(\alpha - \xi)} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}. \quad (5)$$

Désormais nous allons supposer ici que g et ψ sont suffisamment dérivables. On supposera également que $\psi(\xi) \neq 0$. Notre idée de base est d'utiliser le développement de Taylor de $\mathcal{N}$ et de $\mathcal{D}$ autour du point ξ supposé à l'intérieur de l'intervalle (a, b) .

Examinons d'abord dénominateur $\mathcal{D}$. On a

$$\psi(\alpha) = \psi(\xi) + \psi'(\xi)(\alpha - \xi) + O((\beta - \alpha)^2) \quad \psi(\beta) = \psi(\xi) + \psi'(\xi)(\beta - \xi) + O((\beta - \alpha)^2).$$

Ici, ainsi que dans ce qui suit, le symbole O , et plus tard o , indique l'ordre du terme du reste. D'où il vient

$$\mathcal{D} = \psi(\alpha)(\beta - \xi) - \psi(\beta)(\alpha - \xi) = \psi(\xi)(\beta - \alpha) + O((\beta - \alpha)^3). \quad (6)$$

Donc $\mathcal{D}$ se comporte comme $\psi(\xi)(\beta - \alpha)$ si α et β sont assez petits.

Remarque. En écrivant

$$\mathcal{D} = \psi(\alpha)\psi(\beta) \left[\frac{\beta - \xi}{\psi(\beta)} - \frac{\alpha - \xi}{\psi(\alpha)} \right],$$

on pourrait aussi appliquer directement le théorème des accroissements finis à l'expression entre les crochets.

Passons à étudier le numérateur $\mathcal{N}$. On trouve

$$g(\alpha) - g(\xi) = [g'(\xi) + \frac{1}{2}g''(\xi)(\alpha - \xi) + \frac{1}{6}g'''(\xi)(\alpha - \xi)^2 + o((\beta - \alpha)^2)](\alpha - \xi);$$

$$\psi(\alpha) = \psi(\xi) + \psi'(\xi)(\alpha - \xi) + \frac{1}{2}\psi''(\xi)(\alpha - \xi)^2 + o((\beta - \alpha)^2),$$

d'où

$$\begin{aligned} (g(\alpha) - g(\xi))\psi(\alpha)(\beta - \xi) &= [g'\psi + \frac{1}{2}(g''\psi + g'\psi')(\alpha - \xi) + \\ &\quad + \frac{1}{6}(g'''\psi + 3g''\psi' + 3g'\psi'')(\alpha - \xi)^2 + \\ &\quad + o((\beta - \alpha)^2)] \times (\alpha - \xi)(\beta - \xi), \end{aligned}$$

les fonctions au second membre ainsi que leurs dérivées étant évaluées au point ξ . On a une expression analogue avec α et β changés l'un pour l'autre. En prenant la différence de ces deux expressions, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= [\frac{1}{2}(g''\psi + 2g'\psi') \\ &\quad + \frac{1}{6}(g'''\psi + 3g''\psi' + 3g'\psi'')(\alpha + \beta - 2\xi) \\ &\quad + o(\beta - \alpha)] \times (\alpha - \beta)(\alpha - \xi)(\beta - \xi); \end{aligned} \quad (7)$$

pour cela on notera que $(\alpha - \xi) - (\beta - \xi) = \alpha - \beta$ ainsi que $(\alpha - \xi)^2 - (\beta - \xi)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 2\xi)$. On en conclut que pour que l'approximation soit cubique il faut et il suffit que la fonction ψ satisfasse à l'équation différentielle $g''\psi + g'\psi' = 0$. Cette équation admet l'intégrale première $\psi^2 g' = K$, K étant une constante d'intégration. Or, en tout cas, ψ est déterminée à une constante multiplicative près. Pour pouvoir continuer, nous allons désormais supposer que la dérivée de g est positive. On peut alors prendre

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{g'}}, \quad (8)$$

ce qu'on admettra toujours dans ce qui suit. (En termes de lettres latines :

$$\phi = \sqrt{f'}.)$$

Avec ce choix la formule (4) prend la forme définitive suivante :

$$g^*(\xi) = \frac{\frac{g(\alpha)}{\sqrt{g'(\alpha)}}(\beta - \xi) - \frac{g(\beta)}{\sqrt{g'(\beta)}}(\alpha - \xi)}{\frac{1}{\sqrt{g'(\alpha)}}(\beta - \xi) - \frac{1}{\sqrt{g'(\beta)}}(\alpha - \xi)}. \quad (9)$$

Nous pouvons résumer notre résultat obtenu ci-dessus comme suit.

Théorème 1. Soit g une fonction définie sur un intervalle compact I ; on suppose qu'en tout point $g' > 0$, g''' existe et est continue, que $\alpha, \beta \in I$ et que $\alpha < \xi < \beta$ et que la fonction $g^*(\xi)$ est donnée par la formule (9). Alors, la différence $g^*(\xi) - g(\xi)$ est de la $O(\beta - \alpha)^3$ lorsque $\beta - \alpha$ tend vers zéro.

Exemples. 1. Soit $g(\xi) = \xi^{\frac{1}{3}}$, $g'(\xi) = \frac{1}{3}\xi^{\frac{1}{3}}$. Il vient

$$g^*(\xi) = \frac{\alpha^{\frac{2}{3}}(\beta - \xi) - \beta^{\frac{2}{3}}(\alpha - \xi)}{\alpha^{\frac{1}{3}}(\beta - \xi) - \beta^{\frac{1}{3}}(\alpha - \xi)}. \quad (10)$$

En écrivant $a = \alpha^{\frac{1}{3}}$, $b = \beta^{\frac{1}{3}}$, on retrouve (1), notre formule de départ.

2. Plus généralement, soit $g(\xi) = \xi^{\frac{1}{m}}$, $g'(\xi) = \frac{1}{m}\xi^{\frac{1}{m}-1}$ où, en premier lieu, on a en vue le cas m , un nombre impair (bien qu'en principe, m pourrait être n'importe quel exposant positif, voir ci-dessous). On a alors, comme généralisation de (10),

$$g^*(\xi) = \frac{\alpha^{\frac{m+1}{2m}}(\beta - \xi) - \beta^{\frac{m+1}{2m}}(\alpha - \xi)}{\alpha^{\frac{m-1}{2m}}(\beta - \xi) - \beta^{\frac{m-1}{2m}}(\alpha - \xi)}. \quad (11)$$

Donc, nous avons l'extension de la méthode d'Héron au cas d'une racine d'ordre quelconque impair. (Évidemment, pour $m = 3$, (11) redonne (10).)

Notre procédé n'est pas du tout limité aux fonctions polynomiales.

3. $g(\xi) = \sin \xi$, $g'(\xi) = \cos \xi$. Dans ce cas, on trouve

$$g^*(\xi) = \frac{\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}}(\beta - \xi) - \frac{\sin \beta}{\sqrt{\cos \beta}}(\alpha - \xi)}{\frac{1}{\sqrt{\cos \alpha}}(\beta - \xi) - \frac{1}{\sqrt{\cos \beta}}(\alpha - \xi)}. \quad (12)$$

Nous avons fait une petite expérience. En supposant connues les valeurs du sinus pour les dix points consécutifs $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots, 90^\circ$, nous avons calculé moyennant la formule (12) les valeurs correspondantes du sinus pour $2^\circ, 12^\circ, 22^\circ, \dots, 82^\circ$. Voici le résultat sous la forme d'un tableau :

ξ	$g(\xi) = \sin \xi$	$g^*(\xi)$	$g^\dagger(\xi)$
2°	0,0348995	0,0349428	0,0347296
12°	0,207912	0,207959	0,207323
22°	0,374607	0,374661	0,373616
32°	0,529919	0,529985	0,528558
42°	0,669131	0,669214	0,667439
52°	0,788011	0,788126	0,786041
62°	0,882948	0,883124	0,880759
72°	0,951057	0,95141	0,948716
82°	0,990268	—	0,987846

On y donne aussi, pour la comparaison, les valeurs **exactes** du sinus ainsi que les valeurs approchées obtenues par la méthode traditionnelle fondée sur l'approximation linéaire, c'est-à-dire qu'on prend, au lieu de g^* , la fonction $g^\dagger$,

$$g^\dagger(\xi) = \frac{g(\alpha)(\beta - \xi) - g(\beta)(\xi - \alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Pour $\xi = 82^\circ$ Mathematica y a répondu « Indeterminate », parce qu'il a eu de la difficulté avec la valeur nulle de la dérivée pour $\xi = 90^\circ$, difficulté qu'on peut aisément surmonter en chassant les dénominateurs. Autrement, comme le lecteur peut s'en convaincre, notre méthode est bien supérieure à la traditionnelle.

Amélioration. Or on peut faire encore mieux. On remarquera qu'à la suite de ψ (voir (8)), on peut écrire (7), après un petit calcul, sous la forme

$$\mathcal{N} = -\frac{1}{12} \left[\frac{g'''}{g'^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{g''^2}{g'^{\frac{3}{2}}} \right] (\alpha - \beta)(\alpha - \xi)(\beta - \xi)(\alpha + \beta - 2\xi) + o((\beta - \alpha)^5).$$

D'après (5) on a également

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\sqrt{g'(\xi)}} (\beta - \alpha) + O((\beta - \alpha)^3).$$

Donc on trouve le résultat suivant.

Théorème 2. *On suppose de plus que $g \in C^4(I)$. Alors l'expression*

$$g^*(\xi) - g(\xi) - \frac{1}{12} \left[g'''(\xi) - \frac{3}{2} \frac{g''(\xi)^2}{g'(\xi)} \right] (\alpha - \xi)(\beta - \xi)(\alpha + \beta - 2\xi)$$

est $O((\beta - \alpha)^4)$ lorsque $\beta - \alpha$ tend vers zéro. Autrement dit, l'approximation est biquadratique.

Remarque. Il est intéressant de noter que le dernier terme de l'expression ci-dessus (voir ce qui est écrit entre les crochets) contient implicitement la *dérivée de Schwarz*, bien connue en analyse complexe (le lecteur pourra consulter, par exemple, le chapitre 10 du livre [Hi]) :

$$\{g, \xi\} \stackrel{\text{def}}{=} -2\sqrt{g'} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{\sqrt{g'}} \right) = \frac{g'''}{g'} - \frac{3}{2} \frac{g''^2}{g'^2},$$

ce qui est écrit entre les crochets vaut $g'(\xi)\{g, \xi\}$. (Étant donné l'invariance évidente de notre théorie par homographies de la droite grecque, l'apparence de la dérivée de Schwarz n'est pas étonnante en soi.) On peut donc, en principe, remplacer la valeur approchée x^* de $x = g(\xi)$ de tout à l'heure (donnée par (3) avec notre choix préféré de ψ , voir (8)) par

$$x^{**} = x^* - \frac{1}{12}g'(\xi)\{g, \xi\}(\alpha - \xi)(\beta - \xi)(\alpha + \beta - 2\xi). \quad (14)$$

Un cas particulier que nous avons trouvé assez avantageux d'un point de vue pratique, est lorsqu'on connaît une équation différentielle de type $g' = H(g)$ où H est une fonction connue de x . Alors on a

$$\{g, \xi\} = H''H - \frac{1}{2}H'^2,$$

H et ses dérivées étant prises au point $x = g(\xi)$. On peut donc modifier la définition de x^{**} comme voici

$$x^{**} = x^* - \frac{1}{12}(H''H^2 - \frac{1}{2}H'^2H)(\alpha - \xi)(\beta - \xi)(\alpha + \beta - 2\xi),$$

où, en commettant une très petite erreur, il est permis de faire l'évaluation de H au point x^* .

Exemple. Soit encore une fois $g(\xi) = \xi^{\frac{1}{3}}$. Alors, on a $H(x) = \frac{1}{3}x^{-2}$, donc $H'(x) = -\frac{2}{3}x^{-3}$, $H''(x) = 2x^{-4}$, et il vient

$$\{g, \xi\} = \frac{4}{9}\xi^{-2}.$$

(Dans le cas plus général $g(\xi) = \xi^{\frac{1}{m}}$ on obtient d'une façon analogue

$$\{g, \xi\} = \frac{m^2-1}{2m^2}\xi^{-2}.$$

On trouve, pour la racine cubique $x = \sqrt[3]{\xi}$ d'un nombre positif donné ξ , l'approximation

$$x^{**} = x^* \left(1 - \frac{1}{81}\xi^{-3}(\alpha - \xi)(\beta - \xi)(\beta + \alpha - 2\xi)\right) \quad (13)$$

ou, en termes de lettres latines,

$$x^{**} = x^* \left(1 - \frac{1}{81}\xi^{-3}(a^3 - \xi)(b^3 - \xi)(a^3 + b^3 - 2\xi)\right) \quad (14)$$

x^* étant l'approximation d'Héron (1).

Exemple. Prenons encore le cas particulier considéré par Héron lui-même, dans son livre *Metrica* [He], (c.f. [DD]), à savoir $\xi = 100$, $\alpha = 64$, $\beta = 125$ (ou $a = 4$, $b = 5$). Il s'agit donc du calcul du nombre $x = \sqrt[3]{100} = 4,64159$. Dans ce cas la formule (13) nous donne

$$x^{**} = \frac{1169857}{252000} = 4,64229$$

tandis que d'après (1) on a

$$x^* = \frac{65}{14} = 4,64286$$

(ce dernier est le résultat d'Héron). Il vient $4,64159 < 4,64229 < 4,64286$ et on obtient les différences $x^* - x = 0,00126831$ et $x^{**} - x = 0,000700849$ et, par suite, $x^* - x^{**} = 0,00056746$. C'est donc une petite amélioration, d'à peu près 50 %.

L'arbitre m'a proposé de reformuler mes résultats, formulés jusqu'ici en termes des variables grecques, aussi en termes des variables latines ; c'est-à-dire au lieu d'un procédé pour trouver la valeurs $g(\xi)$ de la fonction g , il s'agit maintenant de résoudre l'équation $f(x) = \xi$. Pour cela soit x^* la quantité définie dans (3), avec le choix $\phi(x) = \sqrt{f'(x)}$; c'est-à-dire que

$$x^* = \frac{a\sqrt{f'(a)}(f(b) - \xi) - b\sqrt{f'(b)}(f(a) - \xi)}{\sqrt{f'(a)}(f(b) - \xi) - \sqrt{f'(b)}(f(a) - \xi)} \quad (15)$$

et posons alors

$$x^{**} = x^* - c(\xi - f(a))(f(b) - \xi)(f(a) + f(b) - 2\xi). \quad (16)$$

où

$$c = \frac{1}{12f'^4(x)} \left[f'''(x) - \frac{3}{2} \frac{f''(x)^2}{f'(x)} \right].$$

Alors on peut énoncer le résultat final suivant.

Théorème 3. Soit f une fonction définie sur un intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$; on suppose qu'en tout point $f' > 0$ et f''' existe et est continue et que pour $a < b$, $a \in I$, $b \in I$, aura lieu $f(a) < \xi < f(b)$ de sorte qu'il y a une racine unique x à l'équation $f(x) = \xi$ avec $a < x < b$. Alors les différences $x^* - x$ et $x^{**} - x$, où x^* et x^{**} sont donnés par (15) et (16) sont respectivement $o((b-a)^3)$ lorsque $b-a$ tend vers 0. Si f admet une dérivée quatrième continue, l'expression $x^{**} - x$ est $O((b-a)^4)$. Autrement dit, l'approximation est biquadratique.

On peut le voir soit par un calcul direct, soit en tenant compte de la formule (c.f. [Hi])

$$\{g, \xi\} = -\{f, x\} \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2.$$

L'arbitre m'a également suggéré d'étudier l'exemple suivant, illustrant ce théorème. Pour cela on devrait remarquer d'abord que si l'on remplace

$$\frac{1}{12f'^4(x)} \left[f'''(x) - \frac{3}{2} \frac{f''(x)^2}{f'(x)} \right]$$

par

$$\frac{1}{12f'^4(x^*)} \left[f'''(x^*) - \frac{3}{2} \frac{f''(x^*)^2}{f'(x^*)} \right]$$

dans l'équation (16) on obtient encore une approximation biquadratique de la racine x .

Exemple. On considère l'équation non linéaire $f(x) = x^5 - 4x - 2 = 0$. On la retrouve dans le livre [K]. Selon son auteur, cette équation est irrésoluble par radicaux. On a $f(1) = -5 < 0$ ainsi que $f(2) = 22 > 0$. Comme $f'(x) > 0$ dans l'intervalle $(1, 2)$, il en résulte qu'on a une racine x et une seule dans cet intervalle. En effet $f(3/2) = -\frac{13}{32} = -0,40625$. Donc x doit être assez proche de 1,5. En effet, travaillant avec Mathematica on trouve à l'aide de la commande FindRoot (qui n'est autre que la méthode de Newton) $x = 1,51851$. D'autre part, la commande Root donne, plus exactement, $x = 1,518512153$. Cela suggère de prendre dans le théorème $a = 1,51$, $b = 1,52$, ce qui donne les valeurs $x^* = 1,518512215$ et $x^{**} = 1,518512155$. En fait, la différence entre ces valeurs et la valeur exacte de tout à l'heure est 6×10^{-7} et 2×10^{-9} respectivement, c'est-à-dire d'un ordre de grandeur prédit par notre théorie.

Note. L'idée d'approximer des fonctions par des homographies n'est pas tout à fait nouvelle. En effet, G. K. Kristiansen a eu l'amabilité de me faire savoir qu'il a, jadis, publié un algorithme écrit en ALGOL pour la détermination de la racine d'une équation basé nettement sur cette idée (voir la revue BIT vol. 3 (1963), dans la section intitulée «ALGOL programming», pages 205-207).

Remerciements. En terminant, je voudrais m'adresser à l'arbitre. Il a non seulement corrigé mes nombreuses fautes d'orthographe, mais il m'a aussi donné plusieurs suggestions pour améliorer la présentation du texte. Je lui en suis infiniment reconnaissant.

English extended abstract. Deslauriers and Dubuc [DD] have shown that the approximation in the classical procedure by Heron (around 60 B.C.) for finding the cubic root of a number in fact is cubic, not just quadratic, as one might believe. In this note, we indicate that the same method, conveniently modified, can be applied to practically any other function $g(\xi)$, not just the cubic root $\sqrt[3]{\xi}$.

Let us recall briefly what Heron's method is about. Let $\xi > 0$ be the number whose cubic root we are seeking and set $x = \sqrt[3]{\xi}$. In other words, we want to solve the equation $x^3 = \xi$. Suppose that one knows already two approximate values a and b of x , with $a < x < b$. Then one obtains an even better approximation by forming the quantity x^* in (1)

Our first generalisation of (1) is the formula (2). The equation $x^3 = \xi$ is thus replaced by $f(x) = \xi$. One can show that one obtains a cubic approximation if and only if f satisfies the differential equation $xf'' = 2f'$, which is solved by $f = Ax^3 + B$. Hence we are back in the case of the cubic root.

In order to get a more general formula we replace (2) by (3), where $\phi(x)$ is a new function.

In order to analyze this general case, it turns out to be expedient to pass to the inverse function. It will also be convenient to imagine that one has to lines, a *Latin* line with generic point x and another *Greek* with generic point ξ . Let thus $g(\xi)$ be the inverse of the function $f(x)$ and set also $\psi(\xi) = \phi(g(\xi))$. Then (3) admits the following interpretation: one approaches the given function $g(\xi)$ by a fractional linear function $g^*(\xi)$, namely the function in (4).

In order to analyse the remainder we write in (5) the difference $g^*(\xi) - g(\xi)$ as a quotient $\mathcal{N}/\mathcal{D}$. We expand subsequently the quantities $\mathcal{N}$ and $\mathcal{D}$, numerator and

denominator, about the point ξ according to Taylor's theorem. From (6) and (7), we infer that a convenient choice of ψ (and φ) is the one indicated in (8).

The result obtained up to this point is summarized in Theorem 1, to the effect that, in modest assumptions on g (in particular, it has to be decreasing in a suitable interval $\alpha < \xi < \beta$), the difference $g^*(\xi) - g(\xi)$ is $O(\beta - \alpha)^3$ when $\beta - \alpha$ tends to zero. Some simple examples 1-3 follow. In particular, we consider in 2 the case of other powers than the third. In 3 we illustrate our procedure at the hand of the computation of sines (see the table). The same method is applicable to many similar functions.

In a following formula we give an approximate formula for the quantity $\mathcal{N}$. This leads to an improved result contained in Theorem 3. The point is that now we get even *biquadratic* approximation, not only cubic.

As an illustration we reconsider, in an example, Heron's computation [He] of the cube root of 100, taking with him $\alpha = 64$, $\beta = 125$ (or $a = 4$, $b = 5$). With our refined procedure we get a slightly better approximation than Heron.

Following a suggestion of the referee we reformulate our principal result (Theorem 3) also in terms of Latin variables as Theorem 4. We conclude with an example (likewise proposed by the referee) solving a certain cubic equation considered by Kurosh in his book [K].

BIBLIOGRAPHIE

- [DD] G. Deslauriers et S. Dubuc, *Le calcul de la racine cubique selon Héron*, Elem. Math. **51** (1996), 28–34.
- [He] Héron d'Alexandrie, *Les métriques*, Opera omnia, vol. 3, B, G. Teubner, Leipzig, 1903 (texte grec et traduction allemande par H. Schöne).
- [Hi] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley, Londres, 1976.
- [K] A. G. Kurosh, *Algebraicheskie uravneniya proizvol'nykh stepeney. Troisième édition.*, Traduction française sous le titre Équations algébriques de degré quelconque. Éditions Mir, Moscou, 1974., Izdat. "Nauka", Moscou, 1983 (En russe).

J. PEETRE

CENTRE FOR MATHEMATICAL SCIENCES

LUND UNIVERSITY

BOX 118

S-221 00 LUND

SWEDEN

COURRIEL : jaak@maths.lth.se