

EXISTENCE DE VALEURS PROPRES POUR LES SYSTÈMES MULTIVOQUES : RÉSULTATS ANCIENS ET NOUVEAUX

PHILIPPE LAVILLEDIEU ET ALBERTO SEEGER

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous passons en revue divers résultats d'existence pour le problème de valeur propre généralisée $\lambda Bx \in F(x)$. Nous établissons aussi un certain nombre de résultats nouveaux. Ici, $B : H \rightarrow H$ et $F : H \rightrightarrows H$ sont des opérateurs définis sur un espace hilbertien réel. Le caractère multivoque de F permet non seulement de modéliser les problèmes de valeurs propres pour les inéquations variationnelles, mais aussi d'aborder d'autres questions mathématiques d'intérêt : existence de trajectoires non triviales pour une classe d'inclusions différentielles, contrôlabilité d'un processus convexe, etc.

ABSTRACT. In this paper, we review several existence results for the generalized eigenvalue problem $\lambda Bx \in F(x)$. We establish also a certain number of new results. Here, $B : H \rightarrow H$ and $F : H \rightrightarrows H$ are operators defined on a real Hilbert space. The multivaluedness of F allows us not only to cover the spectral analysis of variational inequalities, but also to deal with other questions of interest: existence of nontrivial trajectories for a class of differential inclusions, controllability of convex processes, etc.

1. Introduction. Il existe une très riche littérature consacrée à l'étude du problème de valeur propre généralisée :

$$\left. \begin{array}{l} \text{trouver un nombre } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et un vecteur non nul } x \in H \text{ tels que} \\ \lambda Bx = Ax. \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

Comme beaucoup d'auteurs, nous supposons ici que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace hilbertien réel. Les opérateurs $A : H \rightarrow H$ et $B : H \rightarrow H$ peuvent être linéaires ou non, cette différence n'étant pas essentielle dans le contexte de ce travail.

L'équation écrite ci-dessus peut admettre diverses interprétations suivant le contexte où l'on est placé. Assez souvent, elle est utilisée pour exprimer une condition d'équilibre ou de stationnarité. Pour des raisons d'ordre théorique, ainsi que pratique, nous allons

Reçu le 4 juillet 2000 et, sous forme définitive, le 28 novembre 2000.

nous intéresser à un problème abstrait de valeur propre faisant intervenir un opérateur univoque $B : H \rightarrow H$ et un opérateur multivoque $F : H \rightrightarrows H$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{trouver un nombre } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et un vecteur non nul } x \in H \text{ tels que} \\ \lambda Bx \in F(x). \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

Ce modèle plus général permet d'exprimer l'équilibre d'un système soumis à des contraintes unilatérales. Rappelons à cet effet l'exemple classique du flambement d'une poutre :

Exemple 1.1. Considérons une poutre horizontale fixée aux extrémités gauche ($s = 0$) et droite ($s = 1$) et soumise à une force axiale P . Le flambement ne peut se produire que si la magnitude de cette force est supérieure à une certaine charge critique. Cette charge critique est la plus petite valeur $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que l'équation

$$\lambda \int_0^1 \frac{x'(s)}{\sqrt{1 + [x'(s)]^2}} v'(s) ds = \int_0^1 x''(s) v''(s) ds, \quad \forall v \in H$$

(principe des travaux virtuels) soit satisfaite par une fonction non nulle $x \in H$. Ici $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est interprétée comme un déplacement virtuel de la poutre par rapport à sa position horizontale. L'espace de déplacements est $H = \{u \in H^2(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\}$, où $H^2(0, 1)$ désigne l'espace de Sobolev usuel. H devient un espace hilbertien lorsqu'il est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 \{u(s)v(s) + u'(s)v'(s) + u''(s)v''(s)\} ds.$$

On est donc en présence d'un problème du type (1.1), où $A : H \rightarrow H$ et $B : H \rightarrow H$ sont des opérateurs définis par

$$\langle Au, v \rangle = \int_0^1 u''(s)v''(s) ds, \quad \forall u, v \in H$$

et

$$\langle Bu, v \rangle = \int_0^1 \frac{u'(s)}{\sqrt{1 + [u'(s)]^2}} v'(s) ds, \quad \forall u, v \in H$$

respectivement. Le principe des travaux virtuels mentionné ci-dessus exprime tout simplement la condition de stationnarité usuelle

$$\langle \nabla E(x), v \rangle = 0, \quad \forall v \in H$$

(équation d'Euler-Lagrange) correspondant à la minimisation de l'énergie potentielle

$$u \in H \mapsto E(u) := \frac{1}{2} \int_0^1 [u''(s)]^2 ds - \lambda \int_0^1 \left(\sqrt{1 + [u'(s)]^2} - 1 \right) ds.$$

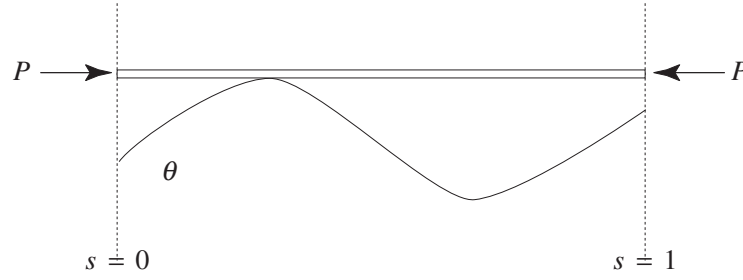


Figure 1. Déplacement contraint par un obstacle unilatéral décrit par une fonction

Considérons maintenant le cas où le déplacement de la poutre est contraint à un obstacle unilatéral décrit par une fonction $\theta : [0, 1] \rightarrow]-\infty, 0]$ (voir figure 1). Dans une telle situation, le principe des travaux virtuels prend la forme d'une inéquation variationnelle :

$$x \in K \text{ et } \int_0^1 x''(s)[v''(s) - x''(s)]ds - \lambda \int_0^1 \frac{x'(s)}{\sqrt{1 + [x'(s)]^2}} [v'(s) - x'(s)]ds \geq 0, \quad \forall v \in K,$$

où $K := \{u \in H : u \geq \theta \text{ sur } [0, 1]\}$ est l'ensemble des déplacements admissibles. Bien entendu, cette inéquation variationnelle correspond à la condition nécessaire

$$x \in K \text{ et } \langle \nabla E(x), v - x \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K$$

pour que x soit un minimum de E sur l'ensemble convexe K . Elle peut s'écrire sous la forme succincte

$$\lambda Bx \in (A + N_K)(x),$$

où $N_K : H \rightrightarrows H$ désigne le cône normal à K (voir section 3). Ce problème et quelques variantes ont été abordés par de nombreux auteurs, notamment [13, 18, 29, 30, 38].

Nous donnons aussi un exemple d'un problème de valeur propre qui sort du cadre des inéquations variationnelles.

Exemple 1.2. Soit $T \subset \mathbb{R}$ un intervalle quelconque. On souhaite trouver une fonction $u : T \rightarrow H$ de classe C^k vérifiant l'inclusion différentielle

$$\sum_{i=0}^k a_i u^{(i)}(t) \in F(u(t)), \quad \forall t \in T. \quad (1.3)$$

Ici les coefficients $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ ne dépendent pas de la variable temporelle $t \in T$. Le côté droit de cette inclusion est décrit par un opérateur multivoque $F : H \rightrightarrows H$ positivement homogène, c'est-à-dire un opérateur satisfaisant

$$F(\alpha \xi) = \alpha F(\xi), \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall \xi \in H.$$

On peut supposer que F satisfait la condition de normalisation $0 \in F(0)$. Dans ce cas, l'inclusion (1.3) admet la fonction nulle $t \in T \mapsto u(t) = 0$ comme solution triviale. Afin de trouver d'autres solutions, on peut essayer la technique suivante : d'abord on

trouve un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur non nul $x \in H$ vérifiant $\lambda x \in F(x)$. Il s'agit donc de résoudre un problème de valeur propre pour l'opérateur multivoque F . Ensuite, on trouve un réel $s \in \mathbb{R}$ vérifiant l'équation polynomiale

$$\sum_{i=0}^k a_i s^i = \lambda.$$

Cette démarche permet de construire une solution non triviale de (1.3), à savoir,

$$u(t) := e^{st}x, \quad \forall t \in T.$$

La technique précédente s'applique en particulier au système dynamique

$$u'(t) \in F(u(t)), \quad \forall t \geq 0. \quad (1.4)$$

Dans [6], les auteurs ont mis en lumière le rôle joué par le concept de valeur propre pour caractériser la contrôlabilité de (1.4). Tel que démontré dans [31], le concept de valeur propre a aussi son mot à dire dans l'étude asymptotique des trajectoires issues de (1.4). Les détails peuvent être consultés dans les références [6] et [31].

L'existence de solutions pour le problème (1.2) est une question importante qui mérite d'être traitée. Le but de ce travail est non seulement de passer en revue les différents résultats existentiels disséminés à travers la littérature, mais aussi d'apporter quelques éléments nouveaux.

Afin de fixer la terminologie et la notation, commençons par écrire :

Définition 1.3. Soit H un espace hilbertien réel. L'ensemble

$$\sigma_B(F) := \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda Bx \in F(x), \quad \text{pour un certain } x \in H \setminus \{0\}\}$$

est appelé le *spectre ponctuel* de $F : H \rightrightarrows H$ relatif à $B : H \rightarrow H$. Chaque élément de cette ensemble est dit une *valeur propre* de F relative à B . Toute référence à B sera omise lorsque cet opérateur est l'identité sur H . Ainsi,

$$\sigma(F) := \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda x \in F(x), \quad \text{pour un certain } x \in H \setminus \{0\}\}$$

est appelé simplement le spectre ponctuel de F .

2. Problèmes linéaires de complémentarité. Dans cette section, on suppose que K est un cône convexe fermé de H . Les vecteurs de K sont interprétés comme des éléments «positifs» de l'espace H . La recherche de vecteurs propres «positifs» d'un certain opérateur $A : H \rightarrow H$ peut être abordée selon la méthode de Krein et Rutman (1948) inspirée des travaux classiques de O. Perron (1907) et de G. Frobenius (1912). D'après cette approche, il s'agit tout simplement de résoudre le problème :

$$\left. \begin{array}{l} \text{trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } x \in H \setminus \{0\} \text{ tels que} \\ Ax = \lambda x, \quad x \in K \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

Toutefois, on peut reprocher à cette méthode le fait que l'équation d'équilibre $Ax = \lambda x$ n'est valable que lorsque l'état $x \in H$ se trouve à l'intérieur du cône admissible K . Dès que x est placé sur la frontière de K , l'équilibre du système n'est plus décrit par une équation, mais plutôt par des *conditions de complémentarité*.

On arrive ainsi à la définition suivante dans laquelle on fait intervenir le *cône dual*

$$K^+ := \{p \in H : \langle p, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in K\}.$$

Définition 2.1. Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur linéaire continu. Le réel λ est dit une K -valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul $x \in H$ tel que

$$x \in K, \quad Ax - \lambda x \in K^+ \quad \text{et} \quad \langle x, Ax - \lambda x \rangle = 0. \quad (2.2)$$

Le problème écrit ci-dessus s'obtient comme cas particulier de (1.2) lorsque B est l'identité et F est l'opérateur positivement homogène ayant pour graphe

$$\text{Gr}F = \{(x, y) \in H \times H : x \in K, \quad Ax - y \in K^+, \quad \langle x, Ax - y \rangle = 0\}.$$

Autrement dit, une K -valeur propre de A n'est autre qu'une valeur propre de F . Bien entendu, lorsque le cône K est l'espace H tout entier, la condition (2.2) se réduit à $Ax = \lambda x$.

Un premier résultat d'existence de K -valeurs propres concerne le cas où A est *symétrique*, c'est-à-dire

$$\langle Ay, x \rangle = \langle y, Ax \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

Lemme 2.2. Soit K un cône convexe fermé de H . Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur linéaire continu symétrique vérifiant les deux propriétés suivantes :

- a) $x \in H \mapsto \langle Ax, x \rangle$ est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement ;
- b) il existe $x \in K \setminus \{0\}$ tel que $\langle Ax, x \rangle \leq 0$.

Alors A admet une K -valeur propre négative ou nulle.

Preuve. Considérons le problème de minimisation

$$\text{Minimiser} \left\{ \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle : x \in K \cap B_H \right\},$$

où $B_H := \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ est la boule unité fermée de H . Compte tenu de l'hypothèse a) et de la compacité faible de l'ensemble $K \cap B_H$, ce problème admet au moins une solution x_0 . Grâce à l'hypothèse b), on peut supposer que le vecteur x_0 est non nul. En posant $\lambda := \langle Ax_0, x_0 \rangle / \|x_0\|^2$, il suffit de montrer que $Ax_0 - \lambda x_0 \in K^+$. Pour cela, on considère $\Sigma_0 := \{x \in H : \|x\| = \|x_0\|\}$ et la fonction $G : H \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$G(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \frac{\lambda}{2} (\|x\|^2 - \|x_0\|^2).$$

On constate que x_0 minimise G sur l'ensemble $K \cap \Sigma_0$. Fixons v dans K . Si ce vecteur n'est pas opposé à x_0 , on peut construire dans $K \cap \Sigma_0$ une trajectoire de la manière suivante :

$$t \in [0, 1] \mapsto u(t) = \frac{\|x_0\|}{\|tv + (1-t)x_0\|} (tv + (1-t)x_0).$$

Il est clair que la fonction $t \in [0, 1] \mapsto g(t) := G(u(t))$ admet $t = 0$ comme minimum. En conséquence

$$g'_+(0) = \langle G'(u(0)), u'(0) \rangle = \langle Ax_0 - \lambda x_0, u'(0) \rangle \geq 0, \text{ avec } u'(0) = v - \frac{\langle x_0, v \rangle}{\|x_0\|^2} x_0.$$

Sachant que $\langle Ax_0 - \lambda x_0, x_0 \rangle = 0$, on en déduit l'inégalité $\langle Ax_0 - \lambda x_0, v \rangle \geq 0$, laquelle reste vraie dans le cas où v et x_0 sont opposés. $\square$

Théorème 2.3. *Soit K un cône convexe fermé de H et $A : H \rightarrow H$ un opérateur linéaire continu symétrique. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :*

- a) $x \in H \mapsto \langle Ax, x \rangle - \alpha \|x\|^2$ est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement ;
- b) il existe $x \in K \setminus \{0\}$ tel que $\langle Ax, x \rangle \leq \alpha \|x\|^2$.

Alors A admet une K -valeur propre.

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme 2.2 à l'opérateur $A - \alpha I$. $\square$

Corollaire 2.4. *Supposons que l'espace hilbertien H soit de dimension finie. Soit $K \neq \{0\}$ un cône convexe fermé de H . Alors, tout opérateur linéaire symétrique $A : H \rightarrow H$ possède au moins une K -valeur propre.*

Le corollaire 2.4 n'est plus valable si la dimension de H est infinie. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer $H = K = L^2[0, 1]$ et l'opérateur linéaire continu symétrique $A : H \rightarrow H$ défini par

$$(Ax)(t) = tx(t) \quad p.p. \ t \in [0, 1].$$

Il est connu que cet opérateur n'admet pas de valeur propre (cf. [9]).

Si l'on sort du contexte symétrique, l'existence de K -valeurs propres n'est plus garantie, même en dimension finie. Il suffit de considérer l'exemple :

$$H = \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & 0 & 1 \\ * & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \{0\} \times \mathbb{R}^2.$$

Toutefois, on peut remédier à cette situation en imposant des hypothèses additionnelles sur le cône K . Rappelons qu'un ensemble non vide $S \subset H$ est dit une *semelle* (ou une base) de $K \subset H$ si S ne contient pas l'origine $0 \in H$, et $K = \{\alpha p : \alpha \in \mathbb{R}_+, p \in S\}$.

Théorème 2.5. *Supposons que le cône K admette une semelle convexe compacte. Alors tout opérateur linéaire continu $A : H \rightarrow H$ possède au moins une K -valeur propre.*

Preuve. Ce résultat a été démontré dans [39] en utilisant l'inégalité de Fan. Nous donnons ici une démonstration alternative basée sur le théorème du point fixe de

Bohnenblust et Karlin [10]. Soit S une semelle convexe compacte de K et $\Phi : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\Phi(x, y) := -\langle Ax, y \rangle + \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \langle x, y \rangle.$$

Considérons la fonction multivoque $T : S \rightrightarrows S$ donnée par

$$T(x) := \left\{ y \in S : \Phi(x, y) \geq \max_{v \in S} \Phi(x, v) \right\}.$$

On constate que chaque $T(x)$ est un ensemble convexe fermé non vide. D'autre part, l'ensemble

$$GrT := \{(x, y) \in S \times S : y \in T(x)\}$$

est fermé. Donc, $T : S \rightrightarrows S$ est une fonction multivoque semi-continue supérieurement. D'après le théorème de Bohnenblust et Karlin, il existe un point $\bar{x} \in S$ tel que $\bar{x} \in T(\bar{x})$. Il est clair que

$$\Phi(\bar{x}, v) \leq \Phi(\bar{x}, \bar{x}) = 0, \quad \forall v \in S,$$

d'où, on en déduit que $\lambda = \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle / \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle$ est une K -valeur propre de A . $\square$

Corollaire 2.6. *Soit $K \neq \{0\}$ un cône convexe fermé de H . Supposons que K soit localement compact et ne contienne pas de droite. Alors tout opérateur linéaire continu $A : H \rightarrow H$ possède au moins une K -valeur propre.*

Nous nous abstenons ici de commenter la cardinalité de l'ensemble

$$\sigma(A; K) := \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \text{ est une } K\text{-valeur propre de } A\}.$$

Les travaux de Quittner [35, 36] montrent que de nombreuses situations sont possibles selon la nature du couple (A, K) . Chez Kucera [26, 27, 28] on peut trouver une classification détaillée des éléments de $\sigma(A; K)$. Quant à la fermeture topologique de $\sigma(A; K)$, cette question a été abordée par Gøvelen *et al.* [21].

3. Inéquations variationnelles et docilité. La définition de K -valeur propre d'un opérateur $A : H \rightarrow H$ peut être reformulée en utilisant le langage des inéquations variationnelles. En effet, si $K \subset X$ est un cône convexe fermé, alors le système (2.2) est équivalent à

$$x \in K \quad \text{et} \quad \langle Ax - \lambda x, v - x \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K. \quad (3.1)$$

La formulation variationnelle (3.1) prend toute son importance au-delà du cadre conique, c'est-à-dire lorsque l'ensemble admissible K est un convexe fermé quelconque.

Dans l'intérêt de l'exposé, il est utile de rappeler maintenant une notion standard de l'analyse convexe. Dans le cas où K est un ensemble convexe fermé de H , on dit que

$$N_K(x) := \begin{cases} \{p \in H : \langle p, v - x \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K\}, & \text{si } x \in K; \\ \emptyset, & \text{si } x \notin K, \end{cases}$$

est le *cône normal* à K en $x \in H$. L'opérateur multivoque $N_K : H \rightrightarrows H$ permet d'écrire l'inéquation variationnelle (3.1) sous la forme succincte

$$\lambda x \in (A + N_K)(x).$$

Comme nous l'avons déjà vu dans l'exemple 1.1, on a intérêt à examiner un problème légèrement plus général, à savoir

$$\lambda Bx \in (A + N_K)(x). \quad (3.2)$$

Théorème 3.1. *Soit $A, B : H \longrightarrow H$ deux opérateurs linéaires continus symétriques et $K \subset H$ un ensemble convexe fermé. Supposons vérifiées les hypothèses suivantes :*

- a) $\{x \in H : \langle Bx, x \rangle = 1\}$ est faiblement séquentiellement fermé et rencontre K ;
- b) $x \in H \longmapsto \langle Ax, x \rangle$ est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement ;
- c) $x \in H \longmapsto \langle Ax, x \rangle$ est coercive sur K au sens que

$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow \infty \\ x \in K}} \langle Ax, x \rangle = \infty ;$$

- d) pour chaque $x \in K$ vérifiant $\langle Bx, x \rangle = 1$, l'intervalle $\{\langle Bx, u \rangle : u \in K\}$ est un voisinage de 1.

On déduit alors que $\sigma_B(A + N_K)$ est non vide.

Preuve. Ceci correspond à une version particulière du théorème 5.1 examiné ultérieurement. $\square$

Dans le cadre des opérateurs non symétriques, la question de l'existence de valeurs propres peut être réglée en exigeant à K de se comporter d'une manière « docile ».

Définition 3.2. Un ensemble $K \subset H$ est dit *docile* s'il peut se représenter sous la forme

$$K = TS = \{ts : t \in T, s \in S\},$$

où $T \subset \mathbb{R}_+$ est un intervalle fermé contenant 1, et $S \subset H$ est un convexe compact non vide ne contenant pas l'origine.

Afin de se familiariser avec la notion de docilité, il est utile d'observer les faits suivants :

- a) tout ensemble docile est nécessairement convexe et fermé ;
- b) tout cône ayant une semelle convexe compacte est un ensemble docile ;
- c) on peut supposer que 1 appartient à l'intérieur de T lorsque cet intervalle ne se réduit pas à un singleton.

Dans le théorème suivant et par la suite, la notation H_w désigne l'espace H muni de la topologie faible. On peut vérifier aisément que le résultat énoncé ci-dessous est une généralisation du théorème 2.5.

Théorème 3.3. Soit $A, B : H \rightarrow H_w$ deux opérateurs continus (non nécessairement linéaires) et $K \subset H$ un ensemble docile. Supposons que $\langle Bx, x \rangle \neq 0, \forall x \in K \setminus \{0\}$. Sous ces hypothèses, on déduit que $\sigma_B(A + N_K)$ est non vide.

Preuve. Écrivons $K = TS$ et définissons $\Phi : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Phi(x, y) := -\langle Ax, y \rangle + \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle Bx, x \rangle} \langle Bx, y \rangle.$$

Cette fonction vérifie les conditions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \forall y \in S, \Phi(\cdot, y) \text{ est semi-continue inférieurement ;} \\ \forall x \in S, \Phi(x, \cdot) \text{ est concave ;} \\ \forall y \in S, \Phi(y, y) = 0. \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

En utilisant l'inégalité de Fan [5], on garantit l'existence d'un $\bar{x} \in S$ tel que

$$\sup_{y \in S} \Phi(\bar{x}, y) \leq 0,$$

c'est-à-dire

$$\left\langle -A\bar{x} + \frac{\langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle}{\langle B\bar{x}, \bar{x} \rangle} B\bar{x}, y \right\rangle \leq 0, \quad \forall y \in S.$$

En prenant $\lambda = \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle / \langle B\bar{x}, \bar{x} \rangle$ on obtient

$$\langle \lambda B\bar{x} - A\bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \lambda B\bar{x} - A\bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq 0, \quad \forall y \in K.$$

Ceci montre que

$$\lambda B\bar{x} - A\bar{x} \in N_K(\bar{x}), \quad \text{avec } \bar{x} \neq 0,$$

ce qui termine la preuve. $\square$

Le théorème précédent est non seulement un résultat intéressant par lui-même, mais il permet de traiter une inéquation variationnelle encore plus générale. Notons que (3.2) correspond à un cas particulier de l'inéquation variationnelle

$$\lambda Bx \in (A + \partial h)(x), \quad (3.4)$$

où $x \in H \rightrightarrows \partial h(x) := \{p \in H : h(v) \geq h(x) + \langle p, v - x \rangle \quad \forall v \in H\}$ désigne l'opérateur sous-différentiel de la fonction convexe $h : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Compte tenu de la définition de cet opérateur sous-différentiel, (3.4) exprime la condition

$$\langle Ax - \lambda Bx, v - x \rangle + h(v) \geq h(x) \quad \forall v \in H. \quad (3.5)$$

La proposition suivante considère une situation plutôt pathologique qui doit être réglée séparément. Ensuite, nous énonçons le résultat principal de cette section. Rappelons qu'une fonction $h : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite *propre* si son domaine effectif

$$\text{dom } h := \{x \in H : h(x) < +\infty\}$$

n'est pas vide.

Proposition 3.4. *Soit $A, B : H \rightarrow H_w$ deux opérateurs continus et $h : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, semi-continue inférieurement et propre. Si $\text{dom } h$ est un ensemble convexe compact ne contenant pas l'origine, alors $\sigma_B(A + \partial h) = \mathbb{R}$.*

Preuve. Soit λ un réel quelconque. Pour montrer que λ appartient à $\sigma_B(A + \partial h)$, il suffit d'appliquer l'inégalité de Fan à la fonction $\Phi : \text{dom } h \times \text{dom } h \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi(x, y) := -\langle Ax, y - x \rangle + \lambda \langle Bx, y - x \rangle + h(x) - h(y). \quad \square$$

Théorème 3.5. *On considère deux opérateurs continus $A, B : H \rightarrow H_w$ et une fonction $h : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe semi-continue inférieurement. Supposons que $\text{dom } h$ soit un ensemble docile et que $\langle Bx, x \rangle \neq 0$ pour tout $x \in (\text{dom } h) \setminus \{0\}$. L'ensemble $\sigma_B(A + \partial h)$ est alors non vide.*

Preuve. Pour établir la preuve du théorème, nous allons utiliser la régularisée de Moreau-Yosida de la fonction h . Pour tout entier $k > 0$, considérons la régularisée de Moreau-Yosida

$$h_k(x) := \inf_{u \in H} \left\{ h(u) + \frac{k}{2} \|x - u\|^2 \right\}, \quad \forall x \in H. \quad (3.6)$$

Considérons aussi l'application $J_k : H \rightarrow H$, où $J_k x$ correspond à l'unique solution de ce problème de minimisation. Cette technique de régularisation permet de se ramener au contexte du théorème 3.3. Notre démonstration sera divisée en trois étapes :

1. *Solutions approchées.* La fonction $h_k : H \rightarrow \mathbb{R}$ étant différentiable au sens de Fréchet, notons par ∇h_k sa dérivée de Fréchet. Pour chaque entier k , on applique le théorème 3.3 aux opérateurs $(A + \nabla h_k)$ et B , et à l'ensemble docile $\text{dom } h$. Écrivons

$$\text{dom } h = TS, \quad \text{avec } T \text{ et } S \text{ comme dans la définition 3.2.}$$

Ainsi il existe une suite $\{x^k\} \subset S$ et une suite $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ vérifiant

$$\langle Ax^k + \nabla h_k(x^k) - \lambda_k Bx^k, v - x^k \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \text{dom } h. \quad (3.7)$$

Dû à la compacité de l'ensemble S , on peut supposer, quitte à prendre une sous-suite, que $\{x^k\}$ converge vers un élément $x \in S$.

2. *Bornes de la suite $\{\lambda_k\}$.* Commençons par écrire l'inégalité (3.7) sous la forme :

$$\lambda_k \langle Bx^k, v - x^k \rangle \leq \langle Ax^k, v - x^k \rangle + \langle \nabla h_k(x^k), v - x^k \rangle \quad \forall v \in \text{dom } h.$$

D'autre part, rappelons les propriétés suivantes pour la régularisée h_k :

$$\langle \nabla h_k(x^k), v - x^k \rangle \leq h_k(v) - h_k(x^k), \quad \forall v \in H;$$

$$h_k(v) \leq h(v), \quad \forall v \in H;$$

$$h(J_k x^k) \leq h_k(x^k).$$

On aboutit ainsi à une nouvelle inégalité :

$$\lambda_k \langle Bx^k, v - x^k \rangle \leq \langle Ax^k, v - x^k \rangle + h(v) - h(J_k x^k), \quad \forall v \in \text{dom } h. \quad (3.8)$$

Il est facile de montrer que la suite $\{J_k x^k\}$ converge vers x . En effet, il suffit d'utiliser les propriétés suivantes

$$\left. \begin{array}{l} \forall z \in \text{dom } h, \quad \{J_k z\} \text{ converge vers } z \\ \forall z, y \in H, \quad \|J_k z - J_k y\| \leq \|z - y\| \end{array} \right\}$$

et d'écrire

$$\|J_k x^k - x\| \leq \|J_k x^k - J_k x\| + \|J_k x - x\| \leq \|x^k - x\| + \|J_k x - x\|.$$

La convergence de $\{J_k x^k\}$ vers x assure l'inégalité

$$\limsup \{-h(J_k x^k)\} \leq -h(x)$$

et, par conséquent, il existe une fonction $M : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que

$$\lambda_k \langle Bx^k, v - x^k \rangle \leq M(v) < +\infty, \quad \forall v \in \text{dom } h.$$

En particulier,

$$\lambda_k \langle Bx^k, tx - x^k \rangle \leq M(tx) < +\infty, \quad \forall t \in T.$$

Le cas où T se réduit au singleton $\{1\}$ correspond à la situation déjà abordée dans la proposition 3.4. On peut donc supposer que

$$[1 - \epsilon, 1 + \epsilon] \subset T$$

pour un certain $\epsilon > 0$. En observant que

$$\langle Bx^k, (1+\epsilon)x - x^k \rangle \rightarrow \epsilon \langle Bx, x \rangle \neq 0 \quad \text{et} \quad \langle Bx^k, (1-\epsilon)x - x^k \rangle \rightarrow -\epsilon \langle Bx, x \rangle \neq 0,$$

on parvient à montrer que $\{\lambda_k\}$ doit être bornée.

3. Passage à la limite. La suite $\{\lambda_k\}$ étant bornée, on peut supposer, quitte à prendre une sous-suite, que $\{\lambda_k\}$ converge vers un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Écrivons l'inégalité (3.8) sous la forme

$$\lambda_k \langle Bx^k, v - x^k \rangle - \langle Ax^k, v - x^k \rangle - h(v) \leq -h(J_k x^k), \quad \forall v \in \text{dom } h$$

et passons à la limite supérieure de chaque côté. On obtient ainsi

$$\lambda \langle Bx, v - x \rangle - \langle Ax, v - x \rangle - h(v) \leq -h(x), \quad \forall v \in \text{dom } h$$

c'est-à-dire,

$$\langle Ax - \lambda Bx, v - x \rangle + h(v) \geq h(x), \quad \forall v \in H. \quad \square$$

4. Inéquations variationnelles et pseudo-monotonie. Dans cette section on examine à nouveau l'inéquation variationnelle (3.5). À la différence de la section 3, les hypothèses contraignantes portent sur les opérateurs A et B et non plus sur la fonction h . Le caractère docile de $\text{dom } h$ n'est maintenant plus nécessaire ; en revanche, les opérateurs A et B sont issus de fonctions différentiables au de Fréchet. De plus, A et B vérifient d'autres propriétés rappelées ci-dessous :

Définition 4.1. Un opérateur $A : H \longrightarrow H$ est dit *pseudo-monotone* si pour chaque suite $\{x^k\} \subset H$ convergeant faiblement vers un $x \in H$ et vérifiant

$$\limsup \langle Ax^k, x^k - x \rangle \leq 0,$$

on a

$$\langle Ax, x - v \rangle \leq \liminf \langle Ax^k, x^k - v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Définition 4.2. Un opérateur $A : H \longrightarrow H$ est dit *hémi-continu* si quels que soient $u \in H$ et $v \in H$, la fonction $t \longmapsto A((1-t)u + tv)$ est continue de $[0, 1]$ dans H_w .

Définition 4.3. Un opérateur $B : H \longrightarrow H$ est *complètement continu* si la convergence faible d'une suite $\{x^k\} \subset H$ vers $x \in H$ entraîne la convergence en norme de $\{Bx^k\}$ vers Bx .

Remarque. Tout opérateur complètement continu est pseudo-monotone. Il en est de même pour tout opérateur monotone hémi-continu.

Le théorème suivant est essentiellement dû à Kubrusly et Oden [25]. Rappelons qu'une fonction $\xi : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite *cœrcitive* si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \xi(x) = \infty.$$

Théorème 4.4. Soit $A : H \rightarrow H$, $B : H \rightarrow H$ et $h : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que :

- a) A est la dérivée de Fréchet d'une fonction cœrcitive $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(0) = 0$;
- b) B est la dérivée de Fréchet d'une fonction $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ avec $g(0) = 0$;
- c) A est pseudo-monotone et hémi-continu;
- d) A transforme les bornés en bornés;
- e) B est complètement continu;
- f) h est convexe, semi-continue inférieurement, $h(0) = 0$ et $h(x) \geq 0, \forall x \in H$;
- g) $\{g = 1\} := \{x \in H : g(x) = 1\}$ rencontre $\text{dom } h$ et $Bx \neq 0, \forall x \in \{g = 1\}$;
- h) $\forall x \in \{g = 1\} \cap \text{dom } h$, il existe $v \in \text{dom } h$ tel que $\langle Bx, x \rangle \cdot \langle Bx, v - x \rangle > 0$.

Le problème de valeur propre (3.5) admet alors une solution.

Preuve. 1. *Solutions approchées.* On montre tout d'abord que pour chaque entier $k > 0$ il existe un réel λ_k et un vecteur non nul $x^k \in \{g = 1\}$ tels que

$$Ax^k + \nabla h_k(x^k) - \lambda_k Bx^k = 0, \quad (4.1)$$

où h_k est la régularisée de Moreau-Yosida définie en (3.6). En effet l'opérateur $A + \nabla h_k$ est clairement hémi-continu et transforme les bornés en bornés. À l'aide de la pseudo-monotonie de A et de la monotonie de ∇h_k , on montre que l'opérateur $A + \nabla h_k$ est pseudo-monotone. Compte tenu de ce qui précède et d'un résultat dû à Browder [11], la semi-continuité inférieure séquentielle faible de $f + h_k$ est garantie. Il est clair que la fonction $f + h_k$ est cœrcitive. D'autre part, grâce à l'hypothèse e), l'ensemble $\{g = 1\}$ est faiblement séquentiellement fermé. On conclut que le problème

$$\text{Minimiser } \{f(x) + h_k(x) : g(x) = 1\}$$

admet une solution non nulle x^k . On a nécessairement $Bx^k \neq 0$, ce qui permet d'appliquer un théorème de Browder [12] et d'assurer l'existence d'un réel λ_k tel que (4.1) soit vérifiée.

2. *Bornes pour les suites $\{x^k\}$ et $\{\lambda^k\}$.* La relation

$$f(x^k) \leq h_k(x^k) + f(x^k) \leq h_k(u) + f(u) \leq h(u) + f(u) \quad \forall u \in \{g = 1\} \cap \text{dom } h \quad (4.2)$$

et la coercivité de f impliquent que la suite $\{x^k\}$ est bornée. On peut donc supposer, quitte à prendre une sous-suite, que $\{x^k\}$ converge faiblement vers un élément $x \in \{g = 1\}$. L'hypothèse d) garantit que la suite $\{f(x^k)\}$ est bornée et, par conséquent, la relation (4.2) permet d'affirmer que $\{h_k(x^k)\}$ est bornée. Après avoir extrait une sous-suite, on conclut que

$$h_k(x^k) = \frac{k}{2} \|x^k - J_k x^k\|^2 + h(J_k x^k)$$

converge vers un réel. En remarquant que $0 \leq h(J_k x^k) \leq h_k(x^k)$, on déduit la convergence de $\|x^k - J_k x^k\|^2$ vers 0. Ainsi $\{J_k x^k\}$ converge faiblement vers x et $h(x) \leq \liminf \{h(J_k x^k)\} < +\infty$, c'est-à-dire, $x \in \text{dom } h$. Sachant que $\langle Bx, x \rangle \neq 0$, on suppose dans un premier temps que $\langle Bx, x \rangle > 0$. En multipliant l'égalité (4.1) par $v - x^k$ et en utilisant les inégalités

$$\langle \nabla h_k(x^k), v - x^k \rangle \leq h_k(v) - h_k(x^k) \quad \text{et} \quad h_k(v) \leq h(v),$$

on aboutit à

$$\lambda_k \langle Bx^k, v - x^k \rangle \leq \langle Ax^k, v - x^k \rangle + h(v) - h_k(x^k), \quad \forall v \in H. \quad (4.3)$$

En choisissant $v \in \text{dom } h$ tel que $\langle Bx, v - x \rangle > 0$, on conclut que $\{\lambda_k\}$ est majorée. Pour minorer $\{\lambda_k\}$ il suffit de prendre $v = 0$ dans l'inégalité (4.3). Le cas où $\langle Bx, x \rangle < 0$ se traite d'une manière similaire. On peut ainsi supposer que la suite $\{\lambda_k\}$ converge vers un réel λ .

3. *Passage à la limite.* Pour terminer la preuve, montrons que (λ, x) est solution de (3.5). On choisit $v = x$ dans (4.3) et on utilise l'inégalité $h_k(x^k) \geq h(J_k x^k)$ pour obtenir

$$\langle Ax^k, x^k - x \rangle \leq h(x) - h(J_k x^k) - \lambda_k \langle Bx^k, x - x^k \rangle,$$

ce qui permet de conclure que $\limsup \langle Ax^k, x^k - x \rangle \leq 0$. Puisque A est pseudo-monotone, on peut écrire

$$\langle Ax, x - v \rangle \leq \liminf \langle Ax^k, x^k - v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Ainsi, à l'aide de (4.3), on arrive à :

$$\begin{aligned} \langle Ax, x - v \rangle &\leq h(v) + \lambda \langle Bx, x - v \rangle + \liminf \{-h(J_k x^k)\} \\ &\leq h(v) + \lambda \langle Bx, x - v \rangle + \limsup \{-h(J_k x^k)\} \\ &\leq h(v) - h(x) + \lambda \langle Bx, x - v \rangle. \end{aligned}$$

Ceci montre que (3.5) admet (λ, x) comme solution. $\square$

Remarque. On aurait pu énoncer les hypothèses (g) et (h) avec un ensemble de niveau de la forme $\{g = R\}$, où $R > 0$ est quelconque. Cela n'aurait pas signifié pour autant un gain de généralité.

Une version particulière du théorème 4.4 avait déjà été démontrée en 1976 par Naumann et Wenk [32]. Dans leur travail, la notion de pseudo-monotonie avait été mise en valeur. Avec un type de monotonie plus forte, Riddell [37] avait obtenu un résultat du même genre.

5. Inéquations variationnelles et condition de régularité. Dans cette section, on continue à examiner l'inéquation variationnelle (3.5) lorsque les opérateurs A et B sont issus de fonctions différentiables au sens de Fréchet. Les valeurs propres de (3.5) sont interprétées comme des multiplicateurs de Lagrange associés à un certain problème d'optimisation. Une hypothèse dite de «régularité» s'avère indispensable pour garantir l'existence de tels multiplicateurs.

Le résultat suivant est dû à Kubrusly [24], mais sa démonstration est totalement différente de la nôtre.

Théorème 5.1 [24]. *Soit $A, B : H \longrightarrow H$ deux opérateurs continus et $h : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe propre. Supposons les hypothèses suivantes :*

- a) *A est la dérivée de Fréchet d'une fonction $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(0) = 0$;*
- b) *B est la dérivée de Fréchet d'une fonction $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ avec $g(0) = 0$;*
- c) *l'ensemble $\{g = 1\}$ est faiblement séquentiellement fermé et rencontre $\text{dom } h$;*
- d) *$f + h : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est coercitive et faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement ;*
- e) *$\forall x \in \{g = 1\} \cap \text{dom } h$, l'intervalle $\{ \langle Bx, u - x \rangle : u \in \text{dom } h \}$ est un voisinage de 0.*

Le problème de valeur propre (3.5) admet alors une solution.

Preuve. Les hypothèses c) et d) garantissent l'existence d'un vecteur $\bar{x} \in \text{dom } h$ solution du problème

$$\text{Minimiser} \{f(x) + h(x) : g(x) = 1\}.$$

Ce vecteur est non nul puisque $g(0) = 0$. On vérifie aisément que le couple $(\bar{x}, \bar{x})$ est solution de

$$\text{Minimiser} \{f(x) + h(u) : (x, u) \in H \times \text{dom } h, x - u = 0, g(x) - 1 = 0\}.$$

Associé à ce dernier problème, considérons le Lagrangien

$$L(x, u, v, \lambda) := f(x) + h(u) + \langle v, x - u \rangle - \lambda(g(x) - 1).$$

On désire appliquer un théorème dû à Ioffe et Tihomirov [22] et conclure l'existence d'un couple $(v, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ de multiplicateurs de Lagrange vérifiant les conditions d'optimalité

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{x}, v, \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad L(\bar{x}, \bar{x}, v, \lambda) = \inf_{u \in \text{dom } h} L(\bar{x}, u, v, \lambda).$$

On obtient ainsi

$$A\bar{x} + v - \lambda B\bar{x} = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, \bar{x} \rangle - h(\bar{x}) = \sup_{u \in \text{dom } h} \{ \langle v, u \rangle - h(u) \},$$

ou encore, $-A\bar{x} + \lambda B\bar{x} \in \partial h(\bar{x})$, ce qui est la conclusion voulue. Il convient toutefois de préciser que le théorème de Ioffe et Tihomirov ne peut être appliqué que sous une condition dite de «régularité». En examinant leur démonstration (voir pages 90-91), on s'aperçoit que dans le cas présent il suffit de considérer la condition de régularité

$$\forall \alpha \neq 0, \quad \forall v \in N_{\text{dom } h}(\bar{x}), \quad \text{il existe } (d, u) \in H \times \text{dom } h \quad \text{tel que} \\ \langle v, d + \bar{x} - u \rangle + \alpha \langle B\bar{x}, d \rangle < 0,$$

laquelle est assurée grâce à l'hypothèse e). $\square$

Remarque. Le cas particulier où $A = 0$ avait été abordé en 1976 par Benci et Micheletti [7] avec une condition de régularité légèrement plus faible. Signalons que l'hypothèse de régularité e) est trivialement satisfaite si $\text{dom } h$ est un cône.

6. Le cas purement potentiel. Dans cette section on considère l'inéquation variationnelle (3.5) dans le cas particulier où $A = 0$ et $B = I$.

On rappelle que la *conjuguée* d'une fonction propre $q : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est la fonction $q^* : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$q^*(y) := \sup_{x \in H} \{ \langle y, x \rangle - q(x) \}, \quad \forall y \in H.$$

Théorème 6.1 [15]. *Soit $h : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement. Admettons les hypothèses suivantes :*

- a) $h(0) = 0$ et $h(x) \geq 0 \quad \forall x \in H$;
- b) $\text{dom } h \neq \{0\}$;
- c) l'ensemble $\{h = 0\}$ est borné ;
- d) la conjuguée de $h + \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ est faiblement séquentiellement continue.

Alors il existe un réel $\lambda > 0$ et un vecteur non nul $x \in H$ tels que $\lambda x \in \partial h(x)$.

Preuve. Soit g la conjuguée de $h + \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$. Un calcul direct montre que $g : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$g(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - h_1(x) \quad \text{avec} \quad h_1(x) = \inf_{u \in H} \{ h(u) + \frac{1}{2}\|x - u\|^2 \}. \quad (6.1)$$

Notons par Jx l'unique solution du problème de minimisation écrit ci-dessus. En utilisant les transformations $z = (1 + \lambda)x$ et $\mu = 1/(1 + \lambda)$, on montre que l'équation multivoque

$$\lambda x \in \partial h(x) \quad \text{avec} \quad \lambda > 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0$$

équivalent à l'équation univoque

$$\mu z = Jz \quad \text{avec} \quad 0 < \mu < 1 \quad \text{et} \quad z \neq 0.$$

Grâce à l'hypothèse a), on déduit facilement les propriétés suivantes :

$$\partial h(0) = \{J = 0\} = \{g = 0\}, \quad \{h = 0\} = \{g - \frac{1}{2}\|\cdot\|^2 = 0\} \text{ et } 0 \leq g \leq \frac{1}{2}\|\cdot\|^2.$$

En ajoutant les hypothèses b) et c), on montre une propriété un peu plus technique, à savoir :

$$\{g(x) : h(x) = 0\} \neq \{g(x) : x \in H\}. \quad (6.2)$$

En effet, grâce à l'hypothèse c), il existe un réel $M > 0$ tel que $\{h = 0\} \subset \{\frac{1}{2}\|\cdot\|^2 \leq M\}$ et par conséquent $\{g(x) : h(x) = 0\} \subset [0, M]$. De plus, l'hypothèse b) équivaut à $\partial h(0) \neq H$; il est donc possible de trouver $y_0 \in H$ et $z_0 \in H$ tels que $h(z_0) < \langle y_0, z_0 \rangle$. On choisit $t \geq 1$ assez grand de sorte que $\langle ty_0, z_0 \rangle \geq h(z_0) + \frac{1}{2}\|z_0\|^2 + M + 1$. Dans ce cas,

$$g(ty_0) = (h + \frac{1}{2}\|\cdot\|^2)^*(ty_0) \geq \langle ty_0, z_0 \rangle - h(z_0) - \frac{1}{2}\|z_0\|^2 \geq M + 1.$$

La propriété (6.2) est ainsi démontrée. Cette condition garantit l'existence d'un réel $R > 0$ tel que

$$\{g = R\} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \{g = R\} \cap \{h = 0\} = \emptyset.$$

Compte tenu de l'hypothèse d), le problème

$$\text{Minimiser} \quad \{\frac{1}{2}\|x\|^2 : g(x) = R\}$$

admet une solution non nulle $z \in H$. Notons que $g : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au sens de Fréchet et $\nabla g(z) = Jz \neq 0$. Un résultat dû à Browder [12] garantit l'existence d'un multiplicateur de Lagrange $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha Jz = z$. Puisque $\alpha \neq 0$, on peut introduire $\mu := 1/\alpha$ et écrire $Jz = \mu z$. À partir des relations

$$0 \leq \langle Jz - J0, z - 0 \rangle = \langle Jz, z \rangle = \mu \|z\|^2,$$

$$|\mu| \|z\| = \|Jz\| = \|Jz - J0\| \leq \|z - 0\| = \|z\|,$$

on déduit que $\mu \in]0, 1]$. Le cas $\mu = 1$ est à exclure car il entraînerait $h(z) = 0$. $\square$

On peut trouver une extension de ce théorème dans [1]. L'hypothèse d) n'est pas toujours facile à vérifier dans la pratique. Il est utile de savoir que cette hypothèse est assurée par la condition :

$$\{x \in H : \|x\| \leq c \quad \text{et} \quad h(x) \leq c\} \text{ est compact pour tout réel } c \geq 0.$$

Compte tenu de l'hypothèse a), l'opérateur monotone ∂h ne peut pas avoir de valeur propre strictement négative. Si $\{h = 0\} \neq \{0\}$, il est évident que $\lambda = 0$ est une valeur propre de ∂h .

On termine cette section par un résultat concernant l'existence d'une quantité dénombrable de valeurs propres pour l'opérateur ∂h .

Théorème 6.2 [16]. Soit H un espace de Hilbert réel séparable de dimension infinie. Soit $h : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement. Admettons les hypothèses suivantes :

- a) $h(0) = 0$ et $h(x) \geq 0, \forall x \in H$;
- b) h est une fonction paire, c.-à-d. $h(x) = h(-x), \forall x \in H$;
- c) l'opérateur $(I + \partial h)^{-1} : H \longrightarrow H$ est complètement continu ;
- d) $\partial h(0)$ est borné.

Il existe alors une suite $\{(x_n, \lambda_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H \times \mathbb{R}$ vérifiant

$$x_n \neq 0 \quad x_n \longrightarrow 0, \quad \lambda_n > 0, \quad \lambda_n \longrightarrow \infty$$

et telle que $\lambda_n x_n \in \partial h(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Preuve. On considère la fonction g introduite dans la preuve du théorème précédent. Cette fonction est différentiable au sens de Fréchet de dérivée

$$\nabla g(z) = (I + \partial h)^{-1}(z) = Jz, \quad \forall z \in H.$$

Les transformations $z = (1 + \lambda)x$ et $\mu = 1 + \lambda$ nous montrent l'équivalence entre le système multivoque

$$\lambda x \in \partial h(x) \quad \text{avec} \quad \lambda > 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0$$

et l'équation univoque

$$z = \mu Jz \quad \text{avec} \quad \mu > 1 \quad \text{et} \quad z \neq 0.$$

On appliquera le célèbre théorème de Amann [2] à ce dernier problème. Remarquons tout d'abord que la parité de h garantit la condition

$$J(-z) = J(z), \quad \forall z \in H.$$

Par ailleurs, à partir de

$$\partial h(0) = \{J = 0\} = \{g = 0\},$$

on déduit que

$$g(z) \neq 0 \implies Jz \neq 0$$

et

$$M_R := \{z \in H : \|z\| = R, g(z) \neq 0\} = \{z \in H : \|z\| = R, z \notin \partial h(0)\} \quad \forall R > 0.$$

Finalement, le fait que $\partial h(0)$ soit borné permet de choisir un rayon R tel que $M_R \neq \emptyset$ et

$$\text{Sup}\{\text{gen}(\Omega) : \Omega \subset M_R, \Omega \text{ est compact et symétrique}\} = \infty,$$

où $\text{gen}(\Omega)$ désigne le genus de Ω (voir [2]). Les hypothèses du théorème de Amann étant remplies, on déduit l'existence d'une suite $\{(z_n, \mu_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H \times \mathbb{R}$ vérifiant

$$z_n = \mu_n Jz_n, \quad \|z_n\| = R, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dans le cas particulier où nous sommes placés, ce théorème nous permet aussi d'affirmer que $G(z_n) \longrightarrow 0$. La monotonie de J montre que

$$\langle Jz_n, z_n \rangle > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quitte à prendre une sous-suite de $\{z_n\}$, on peut montrer que $\langle Jz_n, z_n \rangle \longrightarrow 0$ et donc

$$\mu_n = \frac{R^2}{\langle Jz_n, z_n \rangle} \longrightarrow \infty.$$

La preuve est donc achevée. $\square$

Remarque. Le théorème 6.2 étend un résultat de Dias [14].

7. Opérateurs multivoques semi-continus supérieurement. Dans les sections précédentes, nous avons abordé le cas d'un opérateur multivoque $F : H \rightrightarrows H$ ayant la structure particulière

$$F = \text{opérateur univoque} + \text{sous-différentiel d'une fonction convexe.} \quad (7.1)$$

Dans cette section, on se place dans un contexte plus abstrait puisqu'il n'est pas nécessaire de préciser la forme spécifique de F . De la structure (7.1), on retient seulement une propriété très peu contraignante, à savoir :

$$F \text{ est à valeurs convexes fermées.} \quad (7.2)$$

Bien entendu, la condition (7.2) doit être complétée avec quelques hypothèses plus lourdes afin de garantir la non vacuité de $\sigma(F)$.

Avant d'énoncer le résultat suivant, rappelons que

$$T_K(x) := \text{adh} \left[\bigcup_{t>0} \frac{1}{t}(K - x) \right]$$

désigne le cône tangent en x à l'ensemble convexe $K \subset H$. On introduit aussi la notation $K \in \Xi(H) \stackrel{\text{def}}{\iff} K \neq \{0\}$ est un cône convexe fermé de H tel que $\text{int}[K^+] \neq \emptyset$.

Théorème 7.1. *Soit $F : H_w \rightrightarrows H_w$ un opérateur multivoque semi-continu supérieurement à valeurs convexes fermées bornées. Pour que F admette une valeur propre, il suffit que la condition de tangentialité*

$$F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in K \quad (7.3)$$

soit satisfaite pour un certain $K \in \Xi(H)$.

Preuve. Nous allons appliquer un théorème classique d'équilibre [5] à un certain opérateur multivoque $E : H \rightrightarrows H$ ayant des propriétés convenables relatives à une partie convexe $C \subset H$. Cette démarche nous permettra d'obtenir la conclusion désirée. Commençons par la construction de C . Choisissons p dans l'intérieur de K^+ et $r > 0$ de sorte que

$$p - rq \in K^+, \quad \forall q \in B_H. \quad (7.4)$$

Posons

$$C := \{x \in K : \langle p_0, x \rangle = 1\} \quad \text{avec} \quad p_0 := r^{-1}p.$$

Il est aisé de voir que C est une partie convexe fermée non vide de H . La condition (7.4) se traduit par

$$\langle p_0, x \rangle \geq \|x\|, \quad \forall x \in K,$$

ce qui montre l'inclusion $C \subset B_H$. Bref, C est une partie faiblement compacte. On introduit maintenant l'opérateur multivoque

$$x \in H \rightrightarrows E(x) := \{\pi_x(y) : y \in F(x)\},$$

où $\pi_x : H \longrightarrow H$ est l'application linéaire continue définie par

$$\pi_x(y) := y - \langle p_0, y \rangle x.$$

Pour chaque $x \in C$, l'ensemble $E(x)$ est convexe fermé borné non vide. On doit s'assurer que, pour chaque $q \in H$, la fonction

$$x \in H_w \longmapsto \sup_{z \in E(x)} \langle z, q \rangle = \sup_{y \in F(x)} \{\langle y, q \rangle - \langle p_0, y \rangle \langle x, q \rangle\}$$

est semi-continue supérieurement. Mais ceci s'obtient en utilisant le célèbre théorème du maximum de Berge [8]. Pour appliquer le théorème d'équilibre mentionné ci-dessus, il reste à vérifier la condition de tangentialité

$$E(x) \cap T_C(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in C.$$

D'après [5] on peut écrire, pour tout $x \in C$, les relations

$$T_C(x) = T_K(x) \cap \{\langle p_0, \cdot \rangle = 0\} \quad \text{et} \quad T_K(x) = \text{adh}[K + \mathbb{R}x].$$

On constate alors que

$$\pi_x(T_K(x)) \subset T_C(x), \quad \forall x \in C. \quad (7.5)$$

En effet, si $x \in C$ et $y \in T_C(x)$, on a

$$\pi_x(y) = y - \langle p_0, y \rangle x \in \text{adh}[K + \mathbb{R}x] + \mathbb{R}x \subset \text{adh}[K + \mathbb{R}x] = T_K(x)$$

et

$$\langle p_0, \pi_x(y) \rangle = \langle p_0, y \rangle - \langle p_0, y \rangle \langle p_0, x \rangle = 0.$$

Compte tenu de (7.3) et (7.5), on a

$$E(x) \cap T_C(x) \supset \pi_x(F(x)) \cap \pi_x(T_K(x)) \supset \pi_x[F(x) \cap T_K(x)] \neq \emptyset, \quad \forall x \in C.$$

Comme toutes les hypothèses du théorème d'équilibre sont vérifiées, il existe un vecteur $\bar{x} \in C$ tel que $0 \in E(\bar{x})$. On conclut ainsi l'existence de $\bar{y} \in F(\bar{x})$ tel que $0 = \bar{y} - \langle p_0, \bar{y} \rangle \bar{x}$. Puisque $\bar{x}$ est non nul, le réel $\lambda = \langle p_0, \bar{y} \rangle$ est une valeur propre de F . $\square$

Théorème 7.2. Soit $F : H_w \rightrightarrows H_w$ un opérateur multivoque semi-continu supérieurement à valeurs convexes fermées bornées. Supposons que la condition

$$F(x) \cap K \neq \emptyset, \forall x \in K \quad (7.6)$$

soit satisfaite pour un certain $K \in \Xi(H)$. Alors F admet une valeur propre positive ou nulle.

Preuve. Pour établir la preuve de ce résultat, il suffit de reprendre exactement la démonstration du théorème 7.1. mais avec l'opérateur

$$x \in H \rightrightarrows E(x) := \{\pi_x(y) : y \in F(x) \cap K\}.$$

Cette fois-ci $\bar{y} \in F(\bar{x}) \cap K$ et donc la valeur propre $\lambda = \langle p_0, \bar{y} \rangle$ est positive ou nulle. $\square$

On s'intéresse par la suite au cas où F est un *processus convexe fermé*, c'est-à-dire, F a pour graphe un cône convexe fermé contenant l'origine de $H \times H$. Cette classe d'opérateurs multivoques a été étudiée sous différents aspects par de nombreux auteurs.

Dans le résultat énoncé ci-dessous, on utilise la notation

$$N(R) := \sup_{\substack{x \in D(R) \\ x \neq 0}} \inf_{y \in R(x)} \frac{\|y\|}{\|x\|},$$

où $D(R) := \{x \in H : R(x) \neq \emptyset\}$ désigne le domaine de $R : H \rightrightarrows H$.

Corollaire 7.3 [5]. Soit H un espace de Hilbert de dimension finie et $F : H \rightrightarrows H$ un processus convexe fermé. On admet que pour un certain $K \in \Xi(H)$, la condition de tangentialité (7.3) soit satisfaite. On suppose de plus que pour l'opérateur multivoque $R : H \rightrightarrows H$ défini par

$$R(x) = \begin{cases} F(x) \cap T_K(x), & \text{si } x \in K; \\ \emptyset, & \text{si } x \notin K, \end{cases}$$

la quantité $N(R)$ est finie. Alors F admet une valeur propre.

Preuve. On prend $r \in \mathbb{R}$ tel que $r > N(R)$ et on considère l'opérateur $\tilde{F} : H \rightrightarrows H$ défini par $\tilde{F}(x) = F(x) \cap r\|x\|B_H$. On constate que $\tilde{F}$ est semi-continue supérieurement et à valeurs convexes fermées bornées. De plus $\tilde{F}$ satisfait la condition de tangentialité (7.3). On sait, en effet, que

$$\inf_{y \in F(x) \cap T_K(x)} \|y\| < r\|x\|, \forall x \in K.$$

Ainsi $F(x) \cap T_K(x)$ rencontre $r\|x\|B_H$ et donc

$$\tilde{F}(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset, \forall x \in K.$$

On peut maintenant appliquer le théorème 7.1 à $\tilde{F}$ et conclure que F admet une valeur propre. $\square$

Rappelons que l'*adjoint* (ou transposé) d'un processus convexe fermé $G : H \rightrightarrows H$ est l'opérateur $F : H \rightrightarrows H$ défini par :

$$y \in F(x) \iff \langle y, v \rangle \leq \langle x, w \rangle, \forall v \in H, \forall w \in G(v).$$

Par construction, F s'avère être aussi un processus convexe fermé.

Corollaire 7.4 [40]. *Supposons que $F : H \rightrightarrows H$ soit l'adjoint d'un certain processus convexe fermé $G : H \rightrightarrows H$. Admettons les deux hypothèses suivantes :*

- a) $G(v) \neq \emptyset, \forall v \in H$;
- b) *la condition d'invariance $G(v) \subset T_P(v), \forall v \in P$, est satisfaite pour un certain cône convexe fermé $P \neq H$ d'intérieur non vide.*

Alors F admet une valeur propre.

Preuve. D'après [5], l'hypothèse b) entraîne la condition de tangentialité (7.3) avec $K = P^+ \in \Xi(H)$. À l'aide de résultats provenant de [4, 5], on montre que $F : H_w \rightrightarrows H_w$ est semi-continue supérieurement à valeurs convexes fermées bornées. On peut ainsi appliquer le théorème 7.1. $\square$

Remarque. Le corollaire 7.4 avait déjà été établi dans [6] dans le cas où H est de dimension finie. Les auteurs de cet article ont appliqué un tel résultat pour l'étude de la contrôlabilité des processus convexes. À ce propos, le lecteur peut aussi consulter [34].

Corollaire 7.5 [17]. *Supposons que F soit l'adjoint d'un certain processus convexe fermé $G : H \rightrightarrows H$. Admettons les deux hypothèses suivantes :*

- a) $G(v) \neq \emptyset, \forall v \in H$;
- b) *la condition d'invariance $G(v) \subset P, \forall v \in P$, est satisfaite pour un certain cône convexe fermé $P \neq H$ d'intérieur non vide.*

Alors F admet une valeur propre positive ou nulle.

Preuve. Comme dans le corollaire précédent, on peut s'assurer que $F : H_w \rightrightarrows H_w$ est semi-continue supérieurement à valeurs convexes fermées bornées. L'hypothèse b) permet de garantir la condition (7.6) avec $K = P^+ \in \Xi(H)$. On peut donc appliquer le théorème 7.2. $\square$

Nous avons passé ainsi en revue la plupart des résultats existentiels pour les valeurs propres de systèmes multivoques. Bien entendu, la liste ne saurait être exhaustive. Nous avons omis, d'une part, des résultats concernant les systèmes ayant une structure trop particulière (par exemple, [3]). D'autre part, nous avons exclu une famille de résultats prouvés par le biais de la théorie du degré topologique. Une des raisons de ce choix est de ne pas alourdir l'exposé avec des outils excessivement techniques. Nous invitons le lecteur intéressé à consulter [19, 36].

English extended abstract. In this work, we review several existence results for the generalized eigenvalue problem $\lambda Bx \in F(x)$, where $B : H \longrightarrow H$ and $F : H \rightrightarrows H$ are operators defined on a real Hilbert space. More precisely, we explore various assumptions on B and F that guarantee the nonemptiness of

$$\sigma_B(F) := \{ \lambda \in \mathbb{R} : \lambda Bx \in F(x) \text{ for some } x \in H \setminus \{0\} \}.$$

The above set is called the point spectrum of F relative to B .

Section 2 of this paper deals with the particular case in which B is the identity mapping $I : H \longrightarrow H$, and F is defined by means of linear complementarity conditions. The next theorem captures most of the relevant information.

Theorem. *Let $K \subset H$ be a closed convex cone, and $A : H \longrightarrow H$ be a continuous linear operator. The existence of solutions to the eigenvalue problem*

$$(LCP) \quad x \in K, \quad Ax - \lambda x \in K^+, \quad \langle x, Ax - \lambda x \rangle = 0,$$

is guaranteed under any of the following two assumptions:

H₁) K admits a convex compact base;

H₂) A is symmetric. Moreover, there is a constant $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $A - \alpha I$ is weakly sequentially lower-semicontinuous, and $\langle (A - \alpha I)x, x \rangle \leq 0$ for some $x \in K \setminus \{0\}$.

Section 3 discusses the existence of solutions to the eigenvalue problem

$$(VI) \quad \langle Ax - \lambda Bx, v - x \rangle + h(v) \geq h(x), \quad \forall v \in H,$$

where $A, B : H \longrightarrow H$ are nonlinear operators, and $h : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is a convex function.

The variational inequality is, of course, a generalization of the linear complementarity problem. The next existence result relies on the concept of docility (see Definition 3.2). The notation H_w indicates that H is endowed with the weak topology.

Theorem. *Let $A, B : H \longrightarrow H_w$ be continuous operators, and $h : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be a convex lower-semicontinuous function. Suppose that $\text{dom } h := \{x \in H : h(x) < +\infty\}$ is a docile set, and $\langle Bx, x \rangle \neq 0$ whenever $x \in (\text{dom } h) \setminus \{0\}$. Then, the eigenvalue problem (VI) admits a solution.*

Sections 4 and 5 deal also with the variational inequality, but now $A = \nabla f$ and $B = \nabla g$ are Fréchet differentials of suitable functions $f, g : H \longrightarrow \mathbb{R}$. This particular structure has been studied extensively in the literature. We discuss in detail a result (Theorem 4.4) due to [25], and another (Theorem 5.1) due to [24].

Section 6 deals with the eigenvalue problem $\lambda x \in \partial h(x)$, where $\partial h : H \rightrightarrows H$ stands for the subdifferential mapping associated to the convex function $h : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. This case has been treated exhaustively by Dias and collaborators (see [14, 15, 16]). Theorems 6.1 and 6.2 summarize the essential aspects of their contributions.

Section 7 is devoted to the eigenvalue problem $\lambda x \in F(x)$, where $F : H \rightrightarrows H$ is a general operator with closed convex values. A key role in the discussion is played by a “tangentiality” condition of the type

$$(TC) \quad \exists K \in \Xi(H) \quad \text{such that} \quad F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in K,$$

where $K \in \Xi(H)$ means that $K \neq \{0\}$ is a closed convex cone in H with $\text{int}[K^+] \neq \emptyset$. The “invariance” condition

$$(IC) \quad \exists K \in \Xi(H) \quad \text{such that} \quad F(x) \cap K \neq \emptyset, \quad \forall x \in K$$

is, of course, stronger than (TC). It can be shown that:

Theorem. Let $F : H_w \rightrightarrows H_w$ be an upper-semicontinuous operator with convex, closed, and bounded values. Then,

- a) The tangentiality condition ensures that F admits at least one eigenvalue;
- b) The invariance condition implies that F has at least one nonnegative eigenvalue.

As particular cases of the above theorem, one recovers existence results by [5, 17, 40] and others.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. F. Abeasis, J. P. Dias et A. Lopes-Pinto, *Sur les valeurs propres du sous-différentiel d'une fonction convexe avec un noyau non borné*, C. R. Acad. Sci. Paris **278** (1974), 1197–1199.
2. H. Amann, *Lusternik-Schnirelman theory and nonlinear eigenvalue problems*, Math. Ann. **199** (1972), 55–72.
3. J. P. Aubin, *Propriétés de Perron-Frobenius pour des correspondances*, C. R. Acad. Sci. Paris **286** (1978), 911–914.
4. J. P. Aubin et A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer Verlag, Berlin, 1984.
5. J. P. Aubin et H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.
6. J. P. Aubin, H. Frankowska et C. Olech, *Controllability of convex processes*, SIAM J. Control Optim. **24** (1986), 1192–1211.
7. V. Benci et A. M. Micheletti, *Su un problema di autovalori per disequazioni variazionali*, Annali Mat. Pura Appl. **107** (1976), 359–371.
8. C. Berge, *Espaces Topologiques. Fonctions multivoques*, Dunod, Paris, 1959.
9. A. M. Bertier, *Spectral Theory and Wave Operators for the Schrödinger Equation*, Research Notes in Mathematics Series 71, Pitman, Boston, 1982.
10. H. F. Bohnenblust et S. Karlin, *On a theorem of Ville*, Contributions to the Theory of Games, (éd. H. Kuhn et A. Tucker), vol. I, University Press, Princeton, 1950, pp. 155–160.
11. F. Browder, *Pseudo-monotone operators and the direct method of the calculus of variations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **38** (1970), 268–277.
12. F. Browder, *Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 176–183.
13. M. Degiovanni, *On the buckling of thin elastic plate subjected to unilateral constraints*, Nonlinear Variational Problems II, (éd. A. Marino et M. K. V. Murthy), Pitman; Research Notes in Mathematics Series, vol. 193, 1989, pp. 161–180.
14. J. P. Dias, *Un théorème de Sturm-Liouville pour une classe d'opérateurs non linéaires maximaux monotones*, J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 400–405.
15. J. P. Dias, *Variational inequalities and eigenvalue problems for nonlinear maximal monotone operators in a Hilbert space*, Amer. J. Math. **97** (1976), 905–914.
16. J. P. Dias et J. Hernandez, *A Sturm-Liouville theorem for odd multivalued maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **53** (1975), 72–74.
17. T. C. Dieu et V. N. Phat, *On the Krein-Rutman theorem and its applications to controllability*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 495–500.
18. C. Do, *Problème de valeurs propres pour une inéquation variationnelle sur un cône et application au flambement unilatéral d'une plaque mince*, C. R. Acad. Sci. Paris **280** (1975), 45–48.
19. G. Fournier et M. Martelli, *Eigenvectors for nonlinear maps*, Topological Meth. in Nonlinear Analysis **2** (1993), 203–224.
20. G. Frobenius, *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*, S.-B. Preuss. Akad. Wiss., Berlin, 1912, pp. 456–477.

21. D. Goeleven, V. H. Nguyen et M. Thera, *Nonlinear eigenvalue problems governed by a variational inequality of von Karman's type: a degree theoretic approach*, Topological Meth. in Nonlinear Analysis **2** (1993), 253–276.
22. A. D. Ioffe et V. M. Tihomirov, *Theory of Extremal Problems*, North-Holland, 1978.
23. M. G. Krein et M. A. Rutman, *Linear operators leaving invariant a cone in Banach spaces*, Uspekhi Math.Nauk, USSR **1** (1948), 3–95 (en russe).
24. R. S. Kubrusly, *Variational methods for nonlinear eigenvalue inequalities*, Differential and Integral Equations **3** (1990), 923–932.
25. R. S. Kubrusly et J. T. Oden, *Nonlinear eigenvalues problem characterized by variational inequalities with applications to the post-buckling analysis of unilaterally supported plates*, Nonlinear Analysis, Th. Meth. & Appl. **5** (1981), 1265–1284.
26. M. Kucera, *A new method for obtaining eigenvalues of variational inequalities of the special type*, Comment. Math. Univ. Carolinae **18** (1977), 205–210.
27. M. Kucera, *A new method for obtaining eigenvalues of variational inequalities based on bifurcation theory*, Casopis pro pestovani matematiky **104** (1979), 389–411.
28. M. Kucera, *A new method for obtaining eigenvalues of variational inequalities: operators with multiple eigenvalues*, Czechoslovak Math. Journal **32** (1982), 197–207.
29. V. K. Le, *Some global bifurcation results for variational inequalities*, J. Diff. Equations **131** (1996), 39–78.
30. V. K. Le et K. Schmitt, *Global Bifurcation in Variational Inequalities*, Applied Mathematical Sciences, vol. 123, Springer Verlag, New York, 1997.
31. A. Leizarowitz, *Eigenvalues of convex processes and convergence properties of differential inclusions*, Set-Valued Analysis **2** (1994), 505–527.
32. J. Naumann et H. U. Wenk, *On eigenvalue problems for variational inequalities*, Rend. di Matematica **6** (1976), 439–463.
33. O. Perron, *Zur Theorie der Über Matrizen*, Math. Ann. **64** (1907), 248–263.
34. V. N. Phat, *Constrained Control Problems of Discrete Processes*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, vol. 42, World Scientific, Singapore, 1996.
35. P. Quittner, *A note to E. Miersemann's paper on higher eigenvalues of variational inequalities*, Comment. Math. Univ. Carolinae **26** (1985), 665–674.
36. P. Quittner, *Spectral analysis of variational inequalities*, Comment. Math. Univ. Carolinae **27** (1986), 605–629.
37. R. C. Riddell, *Eigenvalue problems for nonlinear elliptic variational inequalities on a cone*, J. Functional Anal. **26** (1977), 333–355.
38. F. Schuricht, *Bifurcation from minimax solutions by variational inequalities in convex sets*, Nonlinear Analysis, Th. Meth. & Appl. **26** (1996), 91–112.
39. A. Seeger, *Eigenvalue analysis of equilibrium processes defined by linear complementarity conditions*, Linear Algebra and Appl. **292** (1999), 1–14.
40. N. K. Son, *On the existence of positive eigenvalues for convex set-valued maps*, Journal of Mathematics **22** (1994), 109–113.

P. LAVILLEDIEU ET A. SEEGER
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
 UNIVERSITÉ D'AVIGNON
 84000 AVIGNON
 FRANCE