

FORMES COMBINATOIRES QUADRATIQUES

PIERRE AUGER

RÉSUMÉ. La classification des quadriques est un résultat classique de la théorie des coniques. Nous présentons ici une classification des *formes combinatoires quadratiques*, c'est-à-dire des $\mathbb{C}$ -espèces bisortes $F(X, Y)$ de degré ≤ 2 , qui étend la classification des quadriques.

ABSTRACT. The classification of quadrics is a classical result in the theory of conics. In this paper, we introduce a classification of *combinatorial quadratic forms*, i. e. two-sort $\mathbb{C}$ -species $F(X, Y)$ of degree ≤ 2 , which extends the classification of quadrics.

1. Introduction. Soit $\mathcal{E}_{X,Y}$ la classe des espèces de structures bisortes, et soit $\mathbb{C}\|X, Y\|$ la $\mathbb{C}$ -algèbre large du monoïde commutatif libre engendré par les classes d'isomorphie d'espèces atomiques bisortes. Alors, le foncteur $\Delta : \mathcal{E}_{X,Y} \rightarrow \mathbb{C}\|X, Y\|$ qui, à une espèce bisorte, fait correspondre son développement de type moléculaire, induit une bijection entre l'ensemble $\mathcal{E}_{X,Y}/\sim$ des classes d'isomorphie d'espèces bisortes et l'ensemble $\mathbb{C}\|X, Y\|$, bijection qui, en fait, est un isomorphisme d'algèbres pour les lois d'addition et de multiplication définies sur chacun de ces deux ensembles. Cela permet ainsi de se ramener, dans la mesure où on ne considère essentiellement les espèces de structures qu'à isomorphie près, à des calculs entre séries formelles.

Dans cet article, nous considérons la partie $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ des éléments de degré ≤ 2 de l'algèbre $\mathbb{C}\|X, Y\|$. Soit $\mathfrak{M}_{X,Y}$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'espèces moléculaires bisortes. L'ensemble des éléments de degré ≤ 2 de $\mathfrak{M}_{X,Y}$ étant représenté par

$$\mathcal{E}_2 = \{1, X, Y, X^2, XY, Y^2, E_2(X), E_2(Y)\},$$

on voit que les éléments de degré ≤ 2 de l'algèbre $\mathbb{C}\|X, Y\|$ ne sont autres que les combinaisons linéaires formelles, à coefficients dans $\mathbb{C}$, d'éléments de $\mathcal{E}_2$. En particulier, si les coefficients de $E_2(X)$ et de $E_2(Y)$ d'un élément donné de $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ sont tous deux nuls, alors cet élément s'identifie canoniquement à une forme quadratique. Ainsi, dans la mesure où les éléments de $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ s'interprètent comme des objets analogues aux formes quadratiques, voire comme des objets plus généraux que celles-ci, on est naturellement conduit à envisager une classification de l'ensemble $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ qui soit analogue à la classification des quadriques en théorie des coniques. Nous donnons en fait ici une classification qui coïncide avec cette classification-là lorsqu'on se restreint au sous-ensemble de $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ formé des polynômes de degré ≤ 2 en les indéterminées X et Y , à coefficients réels. Rappelons que la relation sous-jacente à la

Reçu le 14 novembre 2000 et, sous forme définitive, le 5 mai 2001.

classification des quadriques en théorie des coniques est celle de la géométrie affine du plan $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que deux quadriques sont équivalentes pour cette géométrie si l'une de ces quadriques peut être obtenue de l'autre par suite d'une transformation¹ affine du plan. Par analogie, nous définissons sur l'ensemble $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ une relation d'équivalence prolongeant cette relation-là, deux éléments $F, G \in \mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ étant équivalents si, par définition, l'un peut être obtenu de l'autre par suite d'une *transformation affine* des variables X et Y , c'est-à-dire s'il existe une matrice carrée inversible sur $\mathbb{C}$, d'ordre 2, $A = (a_{ij})$, ainsi qu'une matrice colonne sur $\mathbb{C}$, d'ordre 2, $B = (b_1, b_2)^\top$ telles que l'on ait

$$G(X, Y) = F(a_{11}X + a_{12}Y + b_1, a_{21}X + a_{22}Y + b_2).$$

Notons au passage que, les espèces moléculaires de degré ≤ 2 étant séparables, c'est-à-dire s'exprimant comme produits d'espèces de structures unisortes, la substitution ci-dessus se ramène à la substitution de $\mathbb{C}$ -espèces (unisortes) à terme constant non nécessairement nul dans une autre (cf. [1, 7, 12] pour la définition de ce type de substitution). Nous donnons plus loin une formule explicite pour une telle substitution.

Finalement, précisons que notre classification présente l'intérêt de ramener le problème de la résolution de l'équation combinatoire de la forme

$$F(X, Y) = 0$$

où $F \in \mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$, au problème de la résolution de l'équation combinatoire de cette même forme avec F appartenant cette fois à la réunion d'un petit nombre de familles de formes combinatoires à un paramètre complexe. Il est clair en effet que si G est une forme combinatoire canonique équivalente à F , et si $\Phi(T), \Psi(T)$ sont deux $\mathbb{C}$ -espèces en la variable T de degré ≤ 1 satisfaisant à l'équation

$$G(\Phi(T), \Psi(T)) = 0,$$

alors, on a, pour certains coefficients $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \leq i, j \leq 2$, $b_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$,

$$F(a_{11}\Phi(T) + a_{12}\Psi(T) + b_1, a_{21}\Phi(T) + a_{22}\Psi(T) + b_2) = 0,$$

c'est-à-dire qu'on obtient bien ainsi, du même coup, un couple de $\mathbb{C}$ -espèces solution de l'équation $F(X, Y) = 0$.

Le lecteur qui voudrait élargir sa compréhension des diverses considérations apparaissant ici pourra consulter l'article fondamental [8], ou encore, pour une exposition pédagogique de la théorie des espèces de structures, l'ouvrage [2, 3] ; pour la question plus précise des espèces moléculaires (éventuellement multisortes), on pourra aussi consulter [10] pour une présentation détaillée de cette notion, et [1], pour certaines propriétés des espèces moléculaires bisortes ; au surplus, on consultera [4] pour certaines des notions rencontrées ici, dont par exemple celle d'algèbre large d'un monoïde.

2. Congruence. Soit $\mathbb{C}\|X, Y\|$ la $\mathbb{C}$ -algèbre large du monoïde commutatif libre engendré par les classes d'isomorphie d'espèces atomiques bisortes en les indéterminées X et Y . Dans ce texte, nous appellerons *forme combinatoire* tout élément de degré fini de cette algèbre. De plus, par abus de langage, nous appellerons *formes combinatoires quadratiques* les formes combinatoires de degré ≤ 2 ; nous noterons $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ la

¹Nous adoptons la tradition française voulant qu'une transformation soit une bijection (cf. [6]). Dans le cas présent, une telle application est donc inversible.

partie de $\mathbb{C}\|X, Y\|$ formée des formes combinatoires quadratiques. Autrement dit, soit $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des éléments de degré ≤ 2 de $\mathfrak{M}_{X,Y}$. Rappelons que l'on a

$$\mathcal{E}_2 = \{1, X, Y, E_2(X), X^2, XY, Y^2, E_2(Y)\}. \quad (1)$$

Alors, les formes combinatoires quadratiques ne sont autres que les combinaisons linéaires formelles, à coefficients dans $\mathbb{C}$, d'éléments de $\mathcal{E}_2$.

Soit Φ et Ψ , des formes combinatoires de degré ≤ 1 , c'est-à-dire des expressions de la forme $aX + bY + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, et soit $F(X, Y) = \sum_{M \in \mathcal{E}_2} f_M M \in \mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$. On a alors, par définition,

$$F(\Phi, \Psi) = \sum_{M \in \mathcal{E}_2} f_M M(\Phi, \Psi).$$

Rappelons que si $M \in \mathcal{E}_2$ et $M \neq \{E_2(X), E_2(Y)\}$ alors le développement du terme $M(\Phi, \Psi)$ s'obtient au moyen du calcul algébrique usuel. Par contre, les développements respectifs des termes de la forme $E_2(\Phi)$ s'obtiennent au moyen de la formule

$$\begin{aligned} E_2(aX + bY + c) &= aE_2(X) + \binom{a}{2}X^2 + abXY + \binom{b}{2}Y^2 + bE_2(Y) + \\ &\quad + acX + bcY + \frac{1}{2}c(c+1). \end{aligned} \quad (2)$$

Cette formule résulte de la relation

$$E_2(X + Y) = E_2(X) + XY + E_2(Y),$$

plus intuitive d'un point de vue combinatoire, et des règles de substitution des $\mathbb{C}$ -espèces générales (cf. [1, 7, 12]).

Dans la suite de ce texte, nous noterons V le vecteur défini par $V = (X, Y)^\top$. De plus, soit $\mathfrak{I}$ le groupe des transformations affines de l'espace $\mathbb{C}^2$, et soit $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ le groupe des automorphismes linéaires de ce même espace. Rappelons que tout élément $T \in \mathfrak{I}$ s'identifie canoniquement à un couple (A, B) avec $A \in \text{Aut}(\mathbb{C}^2)$, $B \in \mathbb{C}^2$. Désormais, nous identifierons A et sa représentation matricielle par rapport à la base canonique ; d'autre part, nous supposons que B appartient plutôt à l'espace $\mathbb{C}^{2 \times 1}$ des matrices colonne d'ordre 2, à coefficients complexes. Finalement, nous poserons,

$$F((\Phi, \Psi)^\top) = F(\Phi, \Psi)$$

où Φ et Ψ désignent des formes combinatoires de degré 1 arbitraires.

Soit l'application

$$\alpha : (\mathbb{C}^* \times \mathfrak{I}) \times \mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2} \\ ((z, T), F) \longmapsto (z, T) \cdot F = z F(AV + B), \quad (3)$$

où nous avons posé $T = (A, B)$, avec $A \in \text{Aut}(\mathbb{C}^2)$, $B \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$. Nous notons alors $F^T(X, Y) = F(AV + B)$, c'est-à-dire

$$F^T(X, Y) = F(a_{11}X + a_{12}Y + b_1, a_{21}X + a_{22}Y + b_2).$$

lorsque l'on pose $A = (a_{ij})$, $B = (b_1, b_2)^\top$.

Proposition 2.1. L'application α est une action à droite du groupe $\mathbb{C}^* \times \mathfrak{I}$ sur l'ensemble $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$.

La démonstration de ce résultat est facile et est donc omise.

On sait que toute action d'un groupe sur un ensemble induit une relation d'équivalence sur cet ensemble, à savoir la relation d'équivalence dont les classes sont les orbites de l'action considérée.

Définition 2.2. Soit $F, G \in \mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$. On dit que F et G sont *congrues* si elles appartiennent à la même orbite de l'action α . Nous notons alors $F \equiv G$.

3. Relation d'ordre. Rappelons d'abord que, par définition, le *support* d'une forme combinatoire $F \in \mathbb{C}\|X, Y\|$, que nous noterons $\text{supp } F$, est la partie de $\mathfrak{M}_{X,Y}$ formée des éléments M tels que $[M] F \neq 0$.

Munissons l'ensemble $\mathcal{E}_2$ de l'ordre total suivant :

$$1 \prec X \prec Y \prec X^2 \prec XY \prec Y^2 \prec E_2(X) \prec E_2(Y). \quad (4)$$

Nous allons utiliser cet ordre total sur $\mathcal{E}_2$ pour définir un préordre sur $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$. Nous aurons besoin à cette fin de la définition suivante.

Définition 3.1. Soit $F \in \mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$, $F \neq 0$, et soit $\mu(F)$ la liste des éléments du support de F rangés en ordre décroissant. On dit alors que $\mu(F)$ est le *mot décroissant associé* à F . Dans le cas où $F = 0$, on convient de poser $\mu(F) = ()$, le symbole $()$ désignant la liste vide.

Exemple 3.2. Soit $F(X, Y) = 1/3 + (3/2)Y + \sqrt{2}E_2(X) + XY$. Alors, $\mu(F) = (E_2(X), XY, Y, 1)$.

Définition 3.3. Soit $F, G \in \mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$. On dit que F est inférieur ou égal à G pour l'ordre lexicographique si $\mu(F) \leq_{\text{lex}} \mu(G)$, où $\leq_{\text{lex}}$ désigne l'ordre lexicographique. Nous notons alors $F \preceq G$.

Exemple 3.4. Soit $G(X, Y) = 2E_2(X) - iXY + Y^2 + Y + 7$ et $F(X, Y) = E_2(Y) + \sqrt{2}$. On a alors $G(X, Y) \preceq F(X, Y)$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir le préordre annoncé plus haut.

Définition 3.5. Soit $F, G \in \mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$. On note alors $F \leq G$ si F et G sont congrues et si $\mu(F)$ est inférieur ou égal à $\mu(G)$ pour l'ordre lexicographique.

Proposition 3.6. La relation $\leq$ définie sur $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ est un préordre.

Cette proposition étant une conséquence immédiate des définitions, la démonstration en est omise.

Il est bien connu que tout préordre défini sur un ensemble donné induit une relation d'équivalence sur cet ensemble, à savoir la relation $\mathcal{R}$ telle que, quels que soient x, y appartenant à l'ensemble considéré, on ait

$$(x, y) \in \mathcal{R} \iff (x, y) \in \mathcal{P} \text{ et } (y, x) \in \mathcal{P},$$

$\mathcal{P}$ désignant le préordre donné. De plus, la relation induite par $\mathcal{P}$ sur les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ est alors une relation d'ordre. Il est donc loisible de se proposer de trouver les classes minimales par rapport à cette relation-ci. C'est précisément ce que nous nous proposons de faire à la section suivante ; en fait, les théorèmes 4.2 et 4.4 donnent un ensemble de familles à au plus un paramètre complexe, la réunion de ces familles formant un système de représentants des classes minimales.

La proposition suivante énonce une propriété qu'ont en commun les représentants d'un même classe minimale.

Proposition 3.7. Soit $F, G \in \mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$. Si F et G vérifient les relations $F \leq G$, $G \leq F$, alors $\text{supp } F = \text{supp } G$.

Ce résultat étant immédiat, la démonstration en est omise.

4. Formes canoniques. Nous appelons, par définition, *formes canoniques* les formes combinatoires données au théorème 4.2 ainsi que les formes combinatoires appartenant à la réunion des familles à au plus un paramètre complexe (I) à (X) plus bas. Comme nous l'avons mentionné en introduction, la réunion de ces familles forme un système de représentants des classes de congruence de formes combinatoires quadratiques, chacun des éléments de cette réunion étant un représentant d'une classe minimale pour la relation d'ordre associée au préordre $\leq$ défini à la section précédente. La méthode employée ici consiste en fait à réduire le plus possible le support d'une forme combinatoire quadratique arbitraire et, cela fait, de rejeter le paramètre dans un terme de plus petit degré possible, en ayant en vue d'attribuer des coefficients entiers aux autres termes. Comme on le verra, il est toujours possible d'obtenir une forme combinatoire dont tous les coefficients, hormis celui associé au paramètre, soient des entiers.

Définition 4.1. Soit $F(X, Y)$ une forme combinatoire quadratique. Si les coefficients respectifs de $E_2(X)$ et de $E_2(Y)$ de F sont nuls, on dit que F est une forme combinatoire quadratique *classique* ; dans le cas contraire, on dit que c'est une forme *non classique*.

Nous donnons d'abord sans démonstration les formes canoniques associées aux formes combinatoires quadratiques classiques ; ce résultat résulte en fait à peu près immédiatement de la classification bien connue des quadriques en théorie des coniques, classification qui, rappelons-le, est due au célèbre philosophe et mathématicien du XVII^e siècle René Descartes [5]. (cf. [11] pour une exposition récente de la question.) Peut-être est-il bon de rappeler que, dans la classification classique, on considère les orbites de l'action du groupe affine du plan $\mathbb{R}^2$ sur l'ensemble des coniques du plan, alors qu'ici on considère plutôt les orbites de l'action du groupe affine de l'espace $\mathbb{C}^2$ sur l'ensemble des « coniques complexes », c'est-à-dire sur l'ensemble des formes quadratiques à coefficients complexes.

Théorème 4.2. Soit $F(X, Y)$ une forme combinatoire quadratique classique. Alors, F est congrue à une, et une seule, des formes combinatoires suivantes :

$$\begin{aligned} &0, \\ &1, \\ &X, \\ &X^2, \\ &X^2 + 1, \\ &X^2 + Y, \\ &X^2 + Y^2, \\ &X^2 + Y^2 + 1. \end{aligned}$$

Lemme 4.3. L'ensemble des formes combinatoires quadratiques non classiques est fermé par congruence.

Démonstration. Il est en effet évident que l'ensemble des formes combinatoires classiques est lui-même fermé par congruence. L'assertion à démontrer résulte alors immédiatement de ce que la relation de congruence est une relation d'équivalence. $\square$

Le théorème suivant, qui constitue le résultat central de cet article, correspond en fait au cas des formes combinatoires quadratiques non classiques.

Théorème 4.4. Soit $F(X, Y)$ une forme combinatoire quadratique non classique. Alors, parmi les formes combinatoires suivantes, il en existe une et une seule qui soit congrue à F :

- (I) $E_2(X) + t, \quad t \in \mathbb{C}$
- (II) $E_2(X) + Y$
- (III) $E_2(X) + Y^2 + t, \quad t \in \mathbb{C}$
- (IV) $2E_2(X) - X^2 + tX, \quad t \in \mathbb{C}$
- (V) $2E_2(X) - X^2 - X + 1$
- (VI) $2E_2(X) - X^2 + Y$
- (VII) $2E_2(X) - X^2 + Y^2 + tX, \quad t \in \mathbb{C}$
- (VIII) $2E_2(X) - X^2 + Y^2 - X + 1$
- (IX) $E_2(X) + XY$
- (X) $E_2(X) + XY + 1.$

La suite de ce texte est consacrée à la démonstration du théorème ci-dessus. Indiquons d'abord les grandes lignes de cette démonstration. Introduisons la $\mathbb{C}$ -espèce auxiliaire

$$\Omega_2(X) = 2E_2(X) - X^2.$$

Il est clair que l'ensemble $\mathcal{F}_2$ défini par

$$\mathcal{F}_2 = \{1, X, Y, X^2, XY, Y^2, \Omega_2(X), \Omega_2(Y)\} \quad (5)$$

forme une base de $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$. Nous nous proposons dans ce qui va suivre de présenter un système de représentants des classes de congruence de $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$, exprimés par rapport à cette base, en exploitant le fait que la forme combinatoire Ω_2 satisfait à la relation de pseudo-linéarité suivante :

$$\Omega_2(\alpha X + \beta Y + \gamma) = \alpha\Omega_2(X) + \beta\Omega_2(Y) + \gamma, \quad (6)$$

où α, β et γ désignent des nombres complexes arbitraires. Cette relation se déduit aisément de la formule (2).

Munissons l'ensemble $\mathcal{F}_2$ de l'ordre total

$$1 \prec X \prec Y \prec X^2 \prec XY \prec Y^2 \prec \Omega_2(X) \prec \Omega_2(Y). \quad (7)$$

Nous allons trouver un système de représentants des classes de congruence de $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$, qui seront exprimés par rapport à cette nouvelle base et qui seront minimaux par rapport au préordre obtenu en remplaçant $(\mathcal{E}_2, \prec)$ par $(\mathcal{F}_2, \prec)$ dans l'énoncé de la définition 3.3. Une fois un tel système de représentants obtenu, il suffira d'exprimer chacun de ces représentants par rapport à la base canonique, c'est-à-dire par rapport à la base $\mathcal{E}_2$; nous déduirons ensuite des formes obtenues un système de représentants

des classes de congruence, chacun de ces représentants étant lui-même un représentant de la sous-classe minimale (en fait minimum) de sa classe de congruence, par rapport à cette base-ci.

Montrons d'abord que la partie homogène de degré 2 de toute forme combinatoire quadratique non classique est congrue soit à une forme combinatoire de la forme

$$\Omega_2(X) + \delta X^2 + \delta' Y^2, \quad (8)$$

où $\delta, \delta' \in \{0, 1\}$, soit à

$$\Omega_2(X) + XY, \quad (9)$$

chacune de ces formes combinatoires étant un représentant d'une sous-classe minimum de sa classe de congruence. Cela revient à montrer qu'il existe une matrice carrée inversible sur $\mathbb{C}$, d'ordre 2, $A = (a_{ij})$, ainsi qu'une constante $k \in \mathbb{C}^*$ telles que la partie homogène de degré 2 de

$$k F(a_{11}X + a_{12}Y, a_{21}X + a_{22}Y)$$

soit de la forme de l'une des $\mathbb{C}$ -espèces ci-dessus. Ainsi, une fois cela posé, on est ramené à montrer que toute forme combinatoire quadratique est de la forme $G(X, Y) + dX + eY + f$, avec $G(X, Y)$ une forme combinatoire qui est soit de la forme (8), soit la forme (9); c'est précisément ce que nous ferons ensuite.

Soit $F(X, Y)$ une forme combinatoire quadratique; posons

$$F(X, Y) = \alpha \Omega_2(X) + aX^2 + 2bXY + cY^2 + \gamma \Omega_2(Y) + dX + eY + f.$$

Soit de plus $A = (a_{ij})$, une matrice carrée d'ordre 2 à éléments dans $\mathbb{C}$. On a alors

$$\begin{aligned} F(a_{11}X + a_{12}Y, a_{21}X + a_{22}Y) = & \\ & (\alpha a_{11} + \gamma a_{21}) \Omega_2(X) + \\ & + (aa_{11}^2 + 2ba_{11}a_{21} + ca_{21}^2) X^2 + \\ & + 2(aa_{11}a_{12} + b(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) + ca_{21}a_{22}) XY + \\ & + (aa_{12}^2 + 2ba_{12}a_{22} + ca_{22}^2) Y^2 + \\ & + (\alpha a_{12} + \gamma a_{22}) \Omega_2(Y) + \\ & + (da_{11} + ea_{21}) X + \\ & + (da_{12} + ea_{22}) Y + \\ & + f. \end{aligned}$$

Lemme 4.5. Soit $F(X, Y) = \alpha \Omega_2(X) + aX^2 + cY^2$, avec $\alpha, a, c \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Alors, $F(X, Y)$ est congrue à une forme combinatoire de la forme (8), avec $\delta = 0$ (resp. $\delta' = 0$) si $a = 0$ (resp. $c = 0$) et $\delta = 1$ (resp. $\delta' = 1$) si $a \neq 0$ (resp. $c \neq 0$).

Démonstration. Soit $a' = a/\alpha$, $c' = c/\alpha$. Il est alors clair que la forme

$$G(X, Y) = \Omega_2(X) + a' X^2 + c' Y^2$$

est congrue à $F(X, Y)$. On peut donc sans perte de généralité démontrer cet énoncé plutôt pour $G(X, Y)$. Notons d'abord que $a = 0$ (resp. $c = 0$) si, et seulement si, $a' = 0$ (resp. $c' = 0$). Ainsi, ce résultat est démontré dans le cas où l'on a $a = 0 = c$, puisqu'alors on a $G(X, Y) = \Omega_2(X)$. Il reste donc à considérer les trois cas suivants, à savoir,

i) $a = 0, c \neq 0$; soit $k = 1/\sqrt{c'}$, $\sqrt{c'}$ désignant l'une quelconque des deux racines de c' . On a alors

$$G(X, kY) = \Omega_2(X) + Y^2;$$

ii) $a \neq 0, c = 0$; soit $k = 1/a'$. On a alors dans ce cas

$$\frac{1}{k} G(kX, Y) = \Omega_2(X) + X^2;$$

iii) $a \neq 0 \neq c$; posons $k = 1/a'$, $l = 1/\sqrt{a'c'}$, où $\sqrt{a'c'}$ désigne l'une quelconque des deux racines de $a'c'$. On a alors

$$a' G(kX, lY) = \Omega_2(X) + X^2 + Y^2. \quad \square$$

Notons que toute forme combinatoire quadratique non classique est congrue à une forme combinatoire quadratique dont le coefficient de $\Omega_2(X)$ est non nul. En effet, soit F une forme combinatoire quadratique non classique dont le coefficient de $\Omega_2(X)$ est nul. On vérifie alors aisément que $F(X, Y)$ est congrue à la forme combinatoire quadratique $F(Y, X)$; comme de plus on a

$$[\Omega_2(X)]F(Y, X) = [\Omega_2(Y)]F(X, Y),$$

on en déduit immédiatement, par hypothèse, $[\Omega_2(X)]F(Y, X) \neq 0$.

Proposition 4.6. Soit $F(X, Y)$ une forme combinatoire quadratique homogène non classique. Posons

$$F(X, Y) = \alpha \Omega_2(X) + a X^2 + 2b XY + c Y^2 + \gamma \Omega_2(Y).$$

avec $\alpha, a, b, c, \gamma \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Alors,

i) si $\alpha b = \gamma a$ ou $2\alpha\gamma b \neq \gamma^2 a + \alpha^2 c$, $F(X, Y)$ est congrue à une forme combinatoire de la forme

$$\Omega_2(X) + \delta X^2 + \delta' Y^2, \tag{10}$$

avec $\delta, \delta' \in \{0, 1\}$;

ii) sinon, $F(X, Y)$ est congrue à

$$\Omega_2(X) + XY. \tag{11}$$

Démonstration. Soit $G(X, Y) = F(X - \gamma Y, \alpha Y)$. Il est alors clair que G est congrue à F . Nous allons montrer que si les conditions en i) sont remplies, alors G est congrue à une forme combinatoire de la forme (10). Posons

$$G(X, Y) = \alpha' \Omega_2(X) + a' X^2 + 2b' XY + c' Y^2 + \gamma' \Omega_2(Y).$$

Notons d'abord qu'il résulte de la définition de G que l'on a en fait $\gamma' = 0$. Or, on a

$$[XY]G = \alpha b - \gamma a, \quad [Y^2]G = a\gamma^2 - 2b\alpha\gamma + c\alpha^2.$$

Ainsi, les conditions

$$\alpha b = \gamma a \quad \text{ou} \quad 2\alpha\gamma b \neq \alpha^2 a + \gamma^2 a$$

expriment simplement que le coefficient de XY de G est nul *ou* que le coefficient de Y^2 de cette même forme est non nul ; autrement dit, ces conditions expriment que l'on a, en fait, $b' = 0$ ou $c' \neq 0$. Or, si $b' = 0$, on peut déjà conclure, en vertu du lemme précédent, puisque $\gamma' = 0$, que $G(X, Y)$ est congrue à une forme combinatoire de la forme (10). Nous allons donc désormais pouvoir supposer $b' \neq 0$ et $c' \neq 0$. Montrons alors dans ce cas qu'il existe une matrice inversible $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ telle que $G(AV)$ soit de la forme (10) ; en vertu du lemme 4.5, il suffit donc pour ce faire de montrer qu'il existe une matrice inversible A qui soit telle que les coefficients respectifs de XY et de $\Omega_2(Y)$ de $G(AV)$ soient nuls.

Or, on a, d'une part, puisque $\gamma' = 0$,

$$[\Omega_2(Y)]G(AV) = \alpha' a_{12};$$

ainsi, on en déduit immédiatement la condition nécessaire $a_{12} = 0$; il est alors nécessaire, pour que A soit inversible, que l'on ait $a_{22} \neq 0$. Posons $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$. On a alors

$$[XY]G(AV) = 2(b'a_{11} + c'a_{21}).$$

On en déduit la condition nécessaire $a_{21} \neq 0$, puisque dans le cas contraire on devrait également avoir $a_{11} = 0$, et alors la matrice A ne serait évidemment pas inversible. Supposons donc $a_{21} \neq 0$. On peut alors poser a_{11} et a_{21} de sorte que l'on ait

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = -\frac{c'}{b'}$$

et alors, on vérifie aisément que la matrice A obtenue est inversible, le déterminant de A étant différent de 0. On obtient de la sorte, par construction, une forme dont les coefficients respectifs de XY et de $\Omega_2(Y)$ sont nuls, et ainsi, en vertu du lemme 4.5, cette forme est bien congrue à une forme combinatoire de la forme (10).

Montrons maintenant ii). Les relations

$$\alpha b \neq \gamma a, \quad 2\alpha\gamma b = \gamma^2 a + \alpha^2 c,$$

expriment en fait que l'on a $[XY]G \neq 0$, $[Y^2]G = 0$, autrement dit, que l'on a $b' \neq 0$, $c' = 0$. Nous allons d'abord montrer que sous ces hypothèses, il existe une matrice carrée inversible d'ordre 2, $A = (a_{ij})$, telle que les coefficients respectifs de X^2 et de Y^2 de $G(AV)$ soient nuls. Notons d'abord que l'on a, dans le cas présent, puisque $c' = 0$,

$$[X^2]G(AV) = a'a_{11}^2 + 2b'a_{11}a_{21}, \quad (12)$$

$$[Y^2]G(AV) = a'a_{12}^2 + 2b'a_{12}a_{22}. \quad (13)$$

Or, pour la même raison qu'en i), il est nécessaire, afin d'annuler le coefficient de $\Omega_2(Y)$ de $G(AV)$, que l'on ait $a_{12} = 0$; posons donc $a_{12} = 0$. De plus, posons $a_{22} = 1$. On vérifie alors immédiatement que la relation (13) est satisfaite. D'autre part, pour annuler le coefficient de X^2 de $G(AV)$, il suffit, dans le cas $a' = 0$, de poser

$a_{11} = 1$, $a_{21} = 0$, tandis que dans le cas $a' \neq 0$, il suffit d'attribuer des valeurs à a_{11} et a_{21} de façon à ce que l'on ait

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = -\frac{2b'}{a'}.$$

Ainsi, la matrice A obtenue est bien dans chaque cas inversible et telle que les coefficients respectifs de X^2 et de Y^2 de $G(AV)$ soient nuls ; autrement dit, on a

$$G(AV) = \alpha'' \Omega_2(X) + b'' XY,$$

pour certains coefficients $\alpha'', b'' \in \mathbb{C}$.

Soit alors $k = 1/\alpha''$ et $l = \alpha''/b''$. On a ainsi

$$G(kX, lY) = \Omega_2(X) + XY,$$

ce qui achève de montrer que $F(X, Y)$ est, dans le cas présent, congrue à la forme (11). $\square$

Les propositions qui suivent permettront d'obtenir les familles à un paramètre complexe (I') à (X') plus loin, dont la réunion, comme on le verra, forme un système de représentants des classes de congruence de l'ensemble des formes combinatoires quadratiques non classiques.

Soit encore une fois $F(X, Y)$ une forme combinatoire quadratique non classique. Rappelons que nous nous proposons de trouver une forme combinatoire congrue à F qui soit minimale lorsqu'exprimée par rapport à la base $\mathcal{F}_2$. Comme nous l'avons déjà observé, on peut donc sans perte de généralité supposer $F(X, Y)$ de la forme

$$G(X, Y) + dX + eY + f,$$

où $G(X, Y)$ est de la forme (8) ou, sinon, est la forme (9). Nous allons donc considérer successivement chacun de ces cas.

Proposition 4.7. Soit $F(X, Y) = \Omega_2(X) + dX + eY + f$. Alors,

- i) si $e \neq 0$, $F(X, Y)$ est congrue à la forme (III') ;
- ii) sinon, F est congrue à une forme combinatoire de la forme (I'), sauf dans le cas où $d = -1$, auquel cas elle est congrue à la forme (II') lorsque $f = 0$ et à la forme (I') avec $t = -1$ lorsque $f \neq 0$.

Démonstration. i) Soit

$$G(X, Y) = \Omega_2(X) + dX + Y + f.$$

La forme $G(X, Y)$ étant congrue à $F(X, Y)$, puisqu'en effet on a $G(X, Y) = F(X, Y/e)$, on peut donc se ramener à montrer que $G(X, Y)$ est congrue à la forme (III'). Or, cela résulte immédiatement de ce que l'on a

$$G(X, -dX + Y - f) = \Omega_2(X) + Y.$$

- ii) Considérons d'abord le cas où l'on a $d \neq -1$. On pose alors $x_o = -f/(d+1)$; on a alors

$$F(X + x_o, Y) = \Omega_2(X) + dX,$$

ce qui montre bien que dans ce cas $F(X, Y)$ est congrue à une forme combinatoire de la forme (I'). D'autre part, si $d = -1$ et si $f \neq 0$, alors on vérifie que, quel que soit $x \in \mathbb{C}$, on a

$$F(X + x, Y) = \Omega_2(X) - X + f, \quad (14)$$

ce qui montre bien que dans ce cas le support de F ne peut être réduit. Finalement, la relation

$$\frac{1}{f}F(fX, Y) = \Omega_2(X) - X + 1$$

montre bien que F est, dans ce cas, congrue à la forme (II'); si par contre $f = 0$, on conclut immédiatement de l'identité (14) que F est congrue à la forme $\Omega_2(X) - X$, qui correspond bien au cas particulier où l'on pose $t = -1$ dans (I'). $\square$

Proposition 4.8. Soit $F(X, Y) = \Omega_2(X) + X^2 + dX + eY + f$. Alors,

- i) si $e = 0$, $F(X, Y)$ est congrue à une forme combinatoire de la forme (IV');
- ii) sinon $F(X, Y)$ est congrue à la forme combinatoire (V').

Démonstration. i) On a en effet dans ce cas

$$F(X - d/2, Y) = \Omega_2(X) + X^2 - d(d+2)/4 + f.$$

ii) Soit $G(X, Y) = \Omega_2(X) + X^2 + dX + Y + f$. Alors, $G(X, Y)$ est bien congrue à F : il suffit en effet pour s'en convaincre de noter que $G(X, Y) = F(X, Y/e)$. On peut donc se ramener à montrer que $G(X, Y)$ est congrue à la forme (V'). Or, cela résulte immédiatement de l'identité

$$G(X, -dX + Y - f) = \Omega_2(X) + X^2 + Y. \quad \square$$

Proposition 4.9. Soit $F(X, Y) = \Omega_2(X) + Y^2 + dX + eY + f$. Alors,

- i) si $d = -1$, $F(X, Y)$ est congrue à la forme (VII') si $f - e^2/4 \neq 0$ et à la forme (VI') avec $t = -1$ sinon ;
- ii) sinon, $F(X, Y)$ est congrue à une forme combinatoire de la forme (VI').

Démonstration. ii) Posons $x_0 = (e^2/4 - f)/(1 + d)$. On a alors

$$F(X + x_0, Y - e/2) = \Omega_2(X) + Y^2 + dX.$$

i) On a

$$F(X, Y - e/2) = \Omega_2(X) + Y^2 - X - e^2/4 + f.$$

Ainsi, si $f - e^2/4 = 0$, on en déduit immédiatement que F est congrue à (VI') avec $t = -1$. Autrement, on a, lorsque l'on pose $k = f - e^2/4$, $G(X, Y) = F(X, Y - e/2)$,

$$\frac{1}{k}G(X/k, Y/\sqrt{k}) = \Omega_2(X) + Y^2 - X + 1,$$

$\sqrt{k}$ désignant l'une quelconque des deux racines de k ; ainsi $F(X, Y)$ est bien congrue dans ce cas à la forme (VII'). $\square$

Proposition 4.10. Soit $F(X, Y) = \Omega_2(X) + X^2 + Y^2 + dX + eY + f$. Alors, $F(X, Y)$ est congrue à une forme combinatoire de la forme (VIII').

Démonstration. Il suffit en effet de noter que l'on a

$$F(X - d/2, Y - e/2) = \Omega_2(X) + X^2 + Y^2 + f',$$

où on a posé $f' = -d/2 + (d^2 + e^2)/4 + f$. $\square$

Proposition 4.11. Soit $F(X, Y) = \Omega_2(X) + XY + dX + eY + f$. Alors,

- i) si $f = (1 + d)e$, $F(X, Y)$ est congrue à la forme (IX');
- ii) sinon, $F(X, Y)$ est congrue à la forme (X').

Démonstration. i). On a en effet dans ce cas

$$F(X - e, Y - d) = \Omega_2(X) + XY.$$

ii) Posons $k = f - (1 + d)e$. On a alors

$$\frac{1}{k} F(kX - e, Y - d) = \Omega_2(X) + XY + 1. \quad \square$$

Comme nous l'avons annoncé, les propositions ci-dessus nous permettent maintenant d'affirmer que la réunion des familles (à un paramètre complexe) suivantes forme un système de représentants des classes de congruence de l'ensemble des formes combinatoires quadratiques non classiques.

- (I') $\Omega_2(X) + tX, \quad t \in \mathbb{C}$
- (II') $\Omega_2(X) - X + 1$
- (III') $\Omega_2(X) + Y$
- (IV') $\Omega_2(X) + X^2 + t, \quad t \in \mathbb{C}$
- (V') $\Omega_2(X) + X^2 + Y$
- (VI') $\Omega_2(X) + Y^2 + tX, \quad t \in \mathbb{C}$
- (VII') $\Omega_2(X) + Y^2 - X + 1$
- (VIII') $\Omega_2(X) + X^2 + Y^2 + t, \quad t \in \mathbb{C}$
- (IX') $\Omega_2(X) + XY$
- (X') $\Omega_2(X) + XY + 1$

Démonstration du théorème 4.4. Nous allons utiliser les formes (I') à (X') pour en déduire un système de représentants des classes de congruence de l'ensemble des formes combinatoires quadratiques non classiques, qui soient exprimés par rapport à la base $\mathcal{E}_2$.

Dans chaque cas, on exprime d'abord la forme combinatoire générique par rapport à la base $\mathcal{E}_2$, puis on trouve une forme combinatoire de $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ qui soit congrue à la forme considérée et qui soit minimale lorsqu'elle est exprimée par rapport à cette base-ci. L'objectif est donc, dans chaque cas, de réduire le mot décroissant associé au support de la forme combinatoire obtenue après changement de base. Nous notons $\longrightarrow$ la transformation obtenue par la substitution $\Omega_2(X) = 2E_2(X) - X^2$.

Forme (I') : $\Omega_2(X) + tX \longrightarrow 2E_2(X) - X^2 + tX$. Cette forme est minimale. En effet, on a

$$\begin{aligned} \Omega_2(a_{11}X + x) + t(a_{11}X + x) &= a_{11}\Omega_2(X) + x + ta_{11}X + tx \\ &= 2a_{11}E_2(X) - a_{11}X^2 + ta_{11}X + x(1 + t). \end{aligned}$$

Ainsi, le mieux qu'on puisse faire est de poser $x = 0$, $a_{11} = 1$ et alors on trouve la forme (IV), c'est-à-dire

$$2E_2(X) - X^2 + tX.$$

Forme (II') : $\Omega_2(X) - X + 1 \longrightarrow 2E_2(X) - X^2 - X + 1$. Cette forme est minimale. On a en effet

$$\begin{aligned} & \Omega_2(a_{11}X + x) - (a_{11}X + x) + 1 \\ &= 2a_{11}E_2(X) - a_{11}X^2 - a_{11}X + 1. \end{aligned}$$

Ainsi, quel que soit x , on trouve la forme

$$-2a_{11}E_2(X) + a_{11}X^2 + a_{11}X + 1,$$

et alors il suffit de poser $a_{11} = -1$ pour obtenir la forme (V).

Forme (III') : $\Omega_2(X) + Y \longrightarrow 2E_2(X) - X^2 + Y$. Cette forme est minimale. On a en effet

$$\begin{aligned} & \Omega_2(a_{11}X + x) + (a_{21}X + a_{22}Y + y) \\ &= 2a_{11}E_2(X) - a_{11}X^2 + a_{21}X + a_{22}Y + x + y. \end{aligned}$$

Ainsi, le mieux qu'on puisse faire est de poser $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{21} = 0$, $x = y = 0$. On obtient alors la présente forme, c'est-à-dire la forme (VI).

Forme (IV') : $\Omega_2(X) + X^2 + t \longrightarrow 2E_2(X) + t$. Cette forme est minimale. On a en effet

$$\begin{aligned} & \Omega_2(a_{11}X + x) + (a_{11}X + x)^2 + t \\ &= 2a_{11}E_2(X) - a_{11}X^2 + a_{11}^2X^2 + 2xa_{11}X + x(1+x) + t, \end{aligned}$$

et ainsi, le mieux qu'on puisse faire est de poser $x = 0$, $a_{11} = 1$. On obtient bien de la sorte la présente forme combinatoire. Il suffit alors de diviser cette forme par 2 pour obtenir une forme combinatoire de la forme (I).

Forme (V') : $\Omega_2(X) + X^2 + Y \longrightarrow 2E_2(X) + Y$. Il est évident que cette forme est minimale, sachant que ni le terme en $E_2(X)$ ni le terme en Y ne peut disparaître par suite d'une substitution affine des variables X et Y . De plus, cette forme est congrue à la forme (II). Soit en effet $F(X, Y) = 2E_2(X) + Y$. On a alors évidemment

$$E_2(X) + Y = \frac{1}{2} F(X, 2Y).$$

Forme (VI') : $\Omega_2(X) + Y^2 + tX \longrightarrow 2E_2(X) - X^2 + Y^2 + tX$. Cette forme est minimale. On a en effet

$$\begin{aligned} & \Omega_2(a_{11}X + x) + (a_{22}Y + y)^2 + t(a_{11}X + x) \\ &= a_{11}(2E_2(X) - X^2) + x + a_{22}^2Y^2 + 2a_{22}yY + y^2 + ta_{11}x + tx. \end{aligned}$$

Ainsi, le mieux qu'on puisse faire est de poser $a_{11} = a_{22} = 1$, $x = y = 0$, et ainsi on trouve la forme (VII).

Forme (VII') : $\Omega_2(X) + Y^2 - X + 1 \longrightarrow 2E_2(X) - X^2 + Y^2 - X + 1$. Cette forme est minimale. On a en effet

$$\begin{aligned} & \Omega_2(a_{11}X + x) + (a_{22}Y + y)^2 - (a_{11}X + x) + 1 \\ &= a_{11}\Omega_2(X) + x + a_{22}^2Y^2 + 2a_{22}yY + y^2 - a_{11}X - x + 1. \end{aligned}$$

Ainsi, le mieux qu'on puisse faire est de poser $a_{11} = a_{22} = 1$, $x = y = 0$, et ainsi on trouve cette fois la forme (VIII).

Forme (VIII') : $\Omega_2(X) + X^2 + Y^2 + t \longrightarrow 2E_2(X) + Y^2 + t$. Cette forme est minimale. On a en effet

$$\begin{aligned} & \Omega_2(a_{11}X + x) + (a_{11}X + x)^2 + (a_{22}Y + y)^2 + t \\ &= 2a_{11}E_2(X) + a_{11}(a_{11} - 1)X^2 + a_{22}^2Y^2 \\ & \quad + 2a_{11}xX + 2a_{22}yY + x^2 + y^2 + x + t. \end{aligned}$$

Ainsi, le mieux qu'on puisse faire est de poser $a_{11} = a_{22} = 1$, $x = y = 0$ et alors on trouve une forme équivalente à la forme (III).

Forme (IX') : $\Omega_2(X) + XY \longrightarrow 2E_2(X) - X^2 + XY$. On a

$$E_2(X) + XY \leq 2E_2(X) - X^2 + XY. \quad (15)$$

On a en effet

$$\begin{aligned} & \Omega_2(a_{11}X + x) + (a_{11}X + x)(a_{21}X + a_{22}Y + y) \\ &= 2a_{11}E_2(X) + a_{11}(a_{21} - 1)X^2 + a_{11}a_{22}XY \\ & \quad + (a_{11}y + a_{21}x)X + a_{22}xY + xy. \end{aligned}$$

Ainsi, le mieux qu'on puisse faire est de poser $a_{11} = a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$, $x = y = 0$, et alors on trouve bien une forme équivalente à la forme (IX).

Forme (X') : $\Omega_2(X) + XY + 1 \longrightarrow 2E_2(X) - X^2 + XY + 1$. On déduit alors immédiatement de (15)

$$2E_2(X) + XY + 1 \leq 2E_2(X) - X^2 + XY + 1.$$

et ainsi on trouve bien la forme (X).

Remerciements. Le mérite d'avoir eu l'idée d'une extension de la classification classique des coniques à l'ensemble des formes combinatoires quadratiques revient à G. Labelle ; je remercie celui-ci de m'avoir suggéré ce problème. Je remercie également P. Leroux pour son soutien et ses commentaires.

English extended abstract. The classification of quadric curves is a well-known result in the theory of conics. In this paper we give a classification extending that one. Let $\mathbb{C}\|X, Y\|$ the large $\mathbb{C}$ -algebra associated with the commutative monoid generated by the isomorphism classes of two-sort species, and $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ be the subset of this algebra formed by the elements of degree at most 2. If we identify the two-sort atomic species 1, X , Y , $E_2(X)$, and $E_2(Y)$ with their respective isomorphism classes, the elements of this set are precisely the formal linear combinations

$$\alpha E_2(X) + aX^2 + 2bXY + cY^2 + \gamma E_2(Y) + dX + eY + f,$$

with $\alpha, a, b, c, \gamma, d, e, f \in \mathbb{C}$; indeed, we shall call these elements *combinatorial quadratic forms*. If we let $\alpha = \gamma = 0$ in the expression above, we obtain a combinatorial quadratic form which canonically identifies with a quadratic form. In this paper, we give a classification which extends the classification of quadratic forms with complex coefficients. More precisely, let $\mathfrak{J}$ be the group of affine transformations of the space $\mathbb{C}^2$, and denote by V the vector $(X, Y)^\top$, i.e. the transpose of the vector (X, Y) . We define an action of the group $\mathbb{C}^* \times \mathfrak{J}$ on the set $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ (1), whose orbits are precisely the classes of our classification. The main result of this paper gives a system of representatives for those orbits. To this end, we first totally order the set

$\{1, X, Y, E_2(X), XY, E_2(Y)\}$ (4); we then make the set $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ into a poset by defining $F \preceq G$ in $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ if $\mu(F) \leq_{\text{lex}} \mu(G)$ where $\mu(F)$ and $\mu(G)$ denote respectively the lists of the elements of the supports of F and G , arranged in decreasing order, and $\leq_{\text{lex}}$ denotes the lexicographical order. This binary relation allows us to give $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ the structure of a preorder by defining $F \leq G$ if F and G are in the same orbit, and $\mu(F) \leq_{\text{lex}} \mu(G)$. It is then well-known that the equivalence classes under $\leq$ can be made into a poset by defining $C \leq C'$ whenever there exists $F \in C$, $F' \in C'$ such that $F \leq F'$. Hence, the problem of classifying the combinatorial quadratic forms consists in determining a system of representatives for the minimal classes of this latter poset. We have indeed the following such representatives:

Theorem 4.4. Let $F(X, Y)$ be a non classical combinatorial quadratic form. Then, there exists exactly one form among the following which is congruent to F :

- (I) $E_2(X) + t, \quad t \in \mathbb{C}$
- (II) $E_2(X) + Y$
- (III) $E_2(X) + Y^2 + t, \quad t \in \mathbb{C}$
- (IV) $2E_2(X) - X^2 + tX, \quad t \in \mathbb{C}$
- (V) $2E_2(X) - X^2 - X + 1$
- (VI) $2E_2(X) - X^2 + Y$
- (VII) $2E_2(X) - X^2 + Y^2 + tX, \quad t \in \mathbb{C}$
- (VIII) $2E_2(X) - X^2 + Y^2 - X + 1$
- (IX) $E_2(X) + XY$
- (X) $E_2(X) + XY + 1.$

The approach used in the resolution of this problem consists partly in making use of the auxiliary one-sort $\mathbb{C}$ -species $\Omega_2 = 2E_2(X) - X^2$, this $\mathbb{C}$ -species satisfying the equation (6), i.e. having the property of *pseudo-linearity*. Indeed, the set $\mathcal{F}_2$ defined by (5) forms a basis of the homogeneous two-sort $\mathbb{C}$ -species of degree 2, and hence the bijection between the sets $\mathcal{E}_2$ (1) and $\mathcal{F}_2$ defined by assigning $E_2(X)$ to $\Omega_2(X)$ and $E_2(Y)$ to $\Omega_2(Y)$ results in a bijection between $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$ and the $\mathbb{C}$ -linear combinations of degree 2 of elements of (5). Furthermore, in the same manner as we did for $\mathbb{C}\|X, Y\|_{\leq 2}$, the total order (7) makes this latter set into a preposet with a relation that we denote by $\leq$, so we can consider the poset of the equivalence classes under $\leq$ of this latter preposet and, at the same time, the minimal classes of this poset. Moreover, we define a similar action of the group $\mathbb{C}^* \times \mathfrak{I}$ on this set of linear combinations.

Hence, let $F = F_2 + F_{\leq 1}$ be such an arbitrary linear combination, with F_2 its homogeneous component of degree 2. The approach consists to show that the linear component of an element of $\mathbb{C}^* \times \mathfrak{I}$ sending F_2 into a representative of a minimal class, is uniquely determined. Let λ be this linear component. The problem consisting in finding an affine transformation sending F into a form being a representative of a minimal class then reduces to the problem consisting in finding a translation sending $\lambda \cdot F$ into a form being a representative of a minimal class, as that results from the relation $T \cdot (\lambda \cdot F) = F_2 + T \cdot (\lambda \cdot F_{\leq 1})$, where T denotes an arbitrary translation. Finally, the method achieving the proof consists simply in a change of basis, verifying in each case that the $\mathbb{C}$ -species so obtained is indeed a representative of a minimal class;

when it is not, simple algebraic considerations allow us to reduce that representative to a “minimal” representative.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. Auger, *Analyse d'équations combinatoires en théorie des espèces*, Thèse de doctorat. Publications du LACIM, vol. 26, Université du Québec à Montréal, 2000.
2. F. Bergeron, G. Labelle, et P. Leroux, *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*, Publications du LACIM, Montréal, 1994.
3. ———, *Combinatorial species and tree-like structures*, Encyclopedia of Mathematics, vol. 67, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
4. N. Bourbaki, *Algèbre*, Hermann, Paris, 1964.
5. R. Descartes, *La géométrie*, Editions Jacques Gabay, Sceaux, 1991.
6. R. Godement, *Cours d'algèbre*, Hermann, Paris, 1966.
7. A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Math. **42** (1981), 1–82.
8. ———, *Foncteurs analytiques et espèces de structures*, dans Labelle et Leroux [9], pp. 126–159.
9. G. Labelle et P. Leroux (éd.), *Combinatoire énumérative*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1234, Springer-Verlag, 1986.
10. J. Labelle, *Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité*, Ann. Sci. Math. Québec **11** (1985), 31–58.
11. P. Leroux, *Algèbre linéaire: Une approche matricielle*, Modulo, Mont-Royal, 1983.
12. Y. N. Yeh, *The calculus of virtual species and K-species*, dans Labelle et Leroux [9], pp. 351–369.

P. AUGER
 LACIM - DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
 UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
 CASER POSTALE 8888, SUCCURSALE CENTRE-VILLE
 MONTRÉAL (QUÉBEC) H3C 3P8
 CANADA
 COURRIEL: auger@math.uqam.ca