

REMARQUES SUR LES SURRÉELS DONT LA FORME NORMALE SE DÉCOMPOSE INDÉFINIMENT

DENIS LEMIRE

RÉSUMÉ. Dans [L] l’auteur avait étudié les surréels ayant un développement strictement vertical. Ici, nous traitons le cas plus général des surréels ayant un développement infini, ce qui est équivalent à étudier les suites $\{x_n\}$ de surréels tel que $x_n = \omega^{a_{n+1}z(n+1)x_{n+1}}$ où les a_n sont des surréels et $z = z(0)z(1) \dots$ est de longueur ω .

ABSTRACT. In [L] the author studied the surreals having a strictly vertical development. Here we study the general case of the surreals with an infinite development, which is equivalent to study the sequences $\{x_n\}$ of surreals such that $x_n = \omega^{a_{n+1}z(n+1)x_{n+1}}$ where the a_n are surreals and $z = z(0)z(1) \dots$ of length ω .

Dans [L] l’auteur a étudié les surréels dont la décomposition successive en forme normale est strictement verticale, c’est-à-dire les surréels $x = x_0$ tels que pour tout $n < \omega$ $x_n \in \{\pm \omega^{x_{n+1}}\}$. Ici, nous étudierons le cas général, c’est-à-dire les surréels ayant des décompositions successives infinies.

Cet article est la deuxième partie d’un projet qui consiste à définir une somme infinie de nombres surréels et à définir une fonction d’ensemble à valeurs dans les surréels qui aurait des propriétés apparentées à une mesure.

Si nous notons par $\mathcal{I}_\omega$ l’ensemble des surréels positifs de longueur ω alors nous avons défini pour $z \in \pm \mathcal{I}_\omega$, E_z comme étant la classe des surréels x tel que $x = x_0 = z(0)\omega^{x_1}$, et pour tout n , $x_n = z(n)\omega^{x_{n+1}}$. Nous avons aussi montré qu’il y a un isomorphisme d’ordre entre $\mathbb{S}$ (la classe de tous les surréels) et E_z^1 . Si $z \in \mathcal{I}_\omega \setminus \{\omega\}$ l’isomorphisme est donné par

$$(\varphi_z(t))(\alpha) = \begin{cases} y_z(\alpha), & \text{si } \alpha < \epsilon_0 \\ t(\beta), & \text{si } \epsilon_\beta \leq \alpha < \epsilon_{\beta+1} \end{cases}$$

où y_z est l’élément canonique de E_z . Les éléments de E_ω sont donnés de la manière suivante: il y a tout d’abord une suite de ϵ_0 *plus*, ensuite, si nous notons par d_α la longueur de la α -ième suite de signe (où la 0-ième suite commence à ϵ_0) alors si la α -ième suite est positive d_α est un ϵ -nombre plus grand que $\epsilon_\beta = \sup_{\beta < \alpha} \{d_\beta : \text{la } \beta\text{-ième suite est positive}\}$ et si la α -ième suite est négative d_α est un multiple de $\omega^{\epsilon_\alpha \omega}$. L’isomorphisme est donné de la façon évidente.

Le théorème suivant est fondamental pour notre étude et se trouve dans [G].

Reçu le 2 mai 1997 et, sous forme définitive, le 13 février 1998.

¹Gonshor, [G], avait déjà trouvé l’isomorphisme pour $z = \omega$ et $z = 1/\omega$

Théorème 0. (1) La suite des signes de ω^a est formée de la juxtaposition suivante: Nous commençons par un +, ensuite chaque suite de plus de a induit une suite de ω^b plus où b est le nombre total de plus jusqu'à et incluant celle-ci. Chaque suite de moins induit une suite de $\omega^{b+1}c$ moins où b est le nombre total de plus jusqu'à la suite et c est la longueur de la suite.

- (2) La suite de $r\omega^a$ pour r positif est la suite de ω^a suivie de la suite de r en omettant le premier + et en répétant chaque signe ω^{a^+} fois où a^+ est le nombre total de plus de a .
- (3) Si r est négatif nous inversons les signes de (2).
- (4) La suite de signe de $\sum_{i < \Omega_a} r_i \omega^{a_i}$ est obtenue en juxtaposant les suites de signes des $r_i \omega^{a_i^0}$ où a_i^0 est la suite (réduite) obtenue en enlevant les moins suivants de la suite de a_i .
 - (i) Si $a_i(\delta) = \Leftrightarrow$ et $\exists j < i$ tel que $\forall \alpha \leq \delta [a_j(\alpha) = a_i(\alpha)]$ alors $a_i(\delta)$ est enlevé.
 - (ii) Si i est successeur, a_{i-1} suivi d'un moins est un segment initial de a_i et $r_{i-1} \in \mathcal{I}_\omega$ alors le dernier moins est retiré.

Les opérations données sont les opérations ordinales usuelles (qui ne coïncident pas aux opérations surréelles sur les ordinaux). Nous les noterons de la même façon que les opérations surréelles habituelles, le contexte de leur utilisation étant clair. A partir de ce résultat nous montrons facilement

Théorème 1. Si $a = \sum_{i < \Omega} r_i \omega^{a_i}$ et il existe $i < \Omega$ tel que $l(a) = l(a_i)$ alors Ω est un ordinal successeur, $i = \Omega \Leftrightarrow 1$ et $r_i \in \{\pm 1\}$. . $\square$

L'arbre de décomposition d'un surréel.

Soit $a = \sum_{i < \Omega} r_i \omega^{a_i}$ un nombre surréel, nous pouvons associer à ce surréel un arbre T_a de hauteur $\leq \omega$ où les noeuds $a_{(i_0, i_1, \dots, i_n)}$ sont donnés par: $a_0 = a$ est la racine de l'arbre et par la suite les $a_{(i_0, i_1, \dots, i_n)}$ sont donnés par

$$a_{(0, i_1, \dots, i_n)} = \sum_{i < \Omega_{(0, i_1, \dots, i_n)}} r_{(0, i_1, \dots, i_n, i)} \omega^{a_{(0, i_1, \dots, i_n, i)}},$$

l'arbre vide correspondant à 0.

Nous pouvons laisser tomber le zéro initial, celui-ci étant toujours présent de toute façon, ainsi, $(0, i_1, \dots, i_n)$ devient $(i_1, \dots, i_n)$.

Nous définissons sur les branches de T_a la relation $\prec$ de la façon suivante: Si $b_0 = (i_1, \dots, i_n, \dots)$ et $b_1 = (j_1, \dots, j_n, \dots)$ sont deux branches distinctes de T_a (c'est-à-dire qu'il existe un n tel que $i_n \neq j_n$) alors nous écrivons $b_0 \prec b_1$ si $i_{\bar{n}} < j_{\bar{n}}$ où $\bar{n}$ est le plus petit naturel tel que $i_n \neq j_n$ et nous disons que b_0 est plus à gauche que b_1 ou que b_1 est plus à droite que b_0 .

Soit $b = (i_1, i_2, \dots)$ une branche de T_a . Le théorème 0 nous dit que $\{l(a_{(i_1, \dots, i_n)})\}$: $(i_1, \dots, i_n)$ est un segment initial de b est une suite (possiblement finie) qui décroît avec la longueur du segment. Si b est infinie la suite $\{l(a_{(i_1, \dots, i_n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$ doit devenir constante et par le théorème 1 nous ne pouvons avoir $l(a_{(i_1, \dots, i_n)}) = l(a_{(i_1, \dots, i_{n+1})})$ que si $i_{n+1} = \Omega_{a_{(i_1, \dots, i_n)}} \Leftrightarrow 1$ et $r_{i_{n+1}} \in \{\pm 1\}$. D'où le résultat suivant.

Théorème 2. Soit a un surréel et T_a son arbre de décomposition.

- (1) Si $b = (i_1, \dots)$ est une branche infinie de T_a alors il existe $b' = (i_1, \dots, i_n)$, un segment initial de b tel que la branche $b'' = (i_{n+1}, \dots)$ est la branche la plus à droite de l'arbre ayant pour racine $a_{(i_1, \dots, i_n)}$.
- (2) La branche la plus à gauche de T_a est soit de longueur finie ou bien il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_{(0, \dots, 0)}$ (n zéros) appartient à E_z pour un $z \in \pm \mathcal{I}_\omega$. $\square$

Problème 1. Soit T un arbre de hauteur inférieure ou égale à ω tel que lui et tous ses sous-arbres satisfont les conditions du théorème. T est-il nécessairement l'arbre de décomposition d'un surréel?

L'auteur croit que oui mais n'en a pas encore la preuve.

Comme le suggère le reste de cet ouvrage l'arbre de décomposition est une manière intuitive de voir la complexité d'un surréel. Les nombres les plus simples sont ceux qui ont des arbres de hauteurs finies, ils sont suivis de ceux dont les branches infinies n'ont qu'un nombre fini de ramifications (i.e. il existe un n tel que $a_{(i_1, \dots, i_n)}$ appartient à E_z pour un z donné). De façon générale nous pourrions ainsi dire qu'un surréel est moins complexe qu'un autre si son arbre de décomposition est isomorphe à un sous-arbre du deuxième.

Le théorème 1 nous suggère que si nous voulons étudier les branches infinies nous devons regarder les surréels dont la forme normale est

$$x = \left(\sum_{i < \Omega_x - 1} r_i \omega^{a_i} \right) \pm \omega^{x_1}$$

et où chacun des x_n ($1 \leq n$) a la même forme que x . Nous donnons donc la définition suivante.

Définition 1. Soit $A = \{a_n = \sum_{i < \Omega_n} r_{ni} \omega^{a_{ni}}\}_{n < \omega}$ une suite de surréels et $z \in \pm \mathcal{I}_\omega$. Nous notons par $E_{(A, z)}$ la classe des surréels x , qui ont un développement successif de la forme $x = a_0 z(0) x_0$ et pour tout $n < \omega$

$$x_n = \omega^{a_{n+1} z(n+1) x_{n+1}}.$$

Il est important de souligner que l'expression $a_n z(n) x_n$ n'est pas un produit mais bien une juxtaposition des symboles a_n , $z(n)$ et x_n où $z(n)$ est soit $+$, soit $\Leftrightarrow$. Comme l'a suggéré un arbitre, nous pourrions aussi écrire la même expression sous la forme $a_n + z(n) x_n$ en considérant $z(n)$ comme étant ± 1 . L'auteur préfère cependant la première notation pour deux raisons: la première est la concision (nous avons souvent des expressions complexes à écrire); la deuxième raison est plus subjective, elle tient du fait que lorsque nous écrivons une expression concrète cette expression est déjà sous cette forme et, grâce au fait (à la coïncidence?) que nous écrivons les surréels comme des suites de $+$ et de $\Leftrightarrow$, nous voyons directement que nous pouvons associer un surréel de longueur $\leq \omega$ à une décomposition.

Exemple 1. Si A est la suite nulle alors $E_{(A, z)} = E_z$ qui a été étudié dans [L].

Il est possible que $E_{(A, z)}$ soit vide.

Exemple 2. Si $A = \{\epsilon_n = \varphi_\omega(n)\}_{n < \omega}$ et $z = \omega$ nous aurions $x = \epsilon_0 + \omega^{\epsilon_1 + \omega^y}$ pour un y ce qui n'est pas une forme normale car $\epsilon_0 = \omega^{\epsilon_0}$ et $\epsilon_0 < \epsilon_1 + \omega^y$. Cependant si $A = \{\epsilon_{-n}\}$ et $z = \omega$ alors

$$\epsilon_0 + \omega^{\epsilon_{-1} + \omega^{\epsilon_{-2} + \dots}}$$

est bien un surréel car pour tout n nous avons $\epsilon_{-n} = \omega^{\epsilon_{-n}}$ et $\omega^{\epsilon_{-(n+1)} + \omega^{\dots}} < \epsilon_{-n}$.

L'exemple suivant est particulièrement important.

Exemple 3. Si $A = \{\epsilon_n\}_{n < \omega}$ et $z = \omega$ où $\{\epsilon_n\}$ est une suite croissante d' ϵ -nombre alors $E_{(A,z)}$ est non vide. En effet, pour un n donné nous avons

$$\omega^{-c_n + \omega^{-c_{n+1} + \dots}} = \omega^{-\omega^{c_n} + \omega^{-c_{n+1} + \dots}}$$

et puisque $c_n > 0 > \epsilon_{n+1} + \dots$, nous avons bien un surréel. Cet exemple est particulièrement intéressant si nous considérons des cardinaux non dénombrables.

Nous remarquons que dans cet exemple si la suite A est constante ($= y$) nous avons une équation de type périodique $x = \omega^{y+x}$.

Notation. Pour A et z donnés selon la définition 1 nous posons $x'_n = a_n z(n) x_n$ (nous avons donc $x = x'_0$). Nous notons également par A^n la suite $\{a_k\}_{n \leq k < \omega}$ et par z^n le surréel défini par $z^n(k) = z(k+n)$.

Définition 2. Soit $A = \{a_n = \sum_{i < \Omega_n} r_{ni} \omega^{a_{ni}}\}_{n < \omega}$ et $z \in \pm \mathcal{I}_\omega$ tel que $E_{(A,z)} \neq \emptyset$. Soit $n < \omega$ nous dirons que a_n est pur si pour tout $i < \Omega_n$, a_{ni} n'appartient pas à $E_{(A^{n+1}, z^{n+1})}$ et nous dirons que (A, z) est pur si tous les a_n sont purs.

La condition de pureté nous permet d'éviter une situation où, par exemple, pour un A donné et un $z \in \mathcal{I}_\omega$ nous ayons un a_n de la forme $a_n = \sum r_{ni} \varphi_z(t_i)$ avec $x_n \in \{\pm \varphi_z(t)\}$. Dans ce cas, les t_i doivent être décroissants et nous sommes limités à considérer les t inférieurs à tous les t_i . Cet exemple indique que si (A, z) n'est pas pur il y a une «interférence majeure» sur les éléments possibles de $E_{(A,z)}$. L'interférence se fait sur deux niveaux: sur les éléments admissibles et sur l'écriture de ceux-ci. En effet, si $a_{ni} \in E_{(A,z)}$ et $x'_{n+1} \in E_{(A,z)}$ pour un n donné alors (par le théorème 0) tous les *moins* que nous pourrions trouver à l'aide des a_k ($n+1 \leq k$) dans la suite de signes de x_n , et d'autres encore, disparaîtraient dans la suite réduite x_n^0 dont nous avons besoin pour écrire x'_n .

Exemple 4. Soit $x = \omega^{\varphi_{2/3}(-+)} + \omega^{\varphi_{2/3}(--)}$. Alors tandis que la suite de $\omega^{\varphi_{2/3}(--)}$ a une suite de *plus* et de *moins* suivi de $\epsilon_0 2$ *moins* sa forme réduite pour x est ϵ_0 *plus* suivi de ϵ_0 *moins*.

Lemme 3. Soit (A, z) tel que $a_0 = 0$, $z(0) = +$ et $E_{(A,z)} \neq \emptyset$. Nous avons les faits suivants.

- (1) $E_{(A,z)}$ possède un élément de longueur minimale.
- (2) Si (A, z) est pur alors

$$\bar{x} = \omega^{a_1 z(1) \omega^{a_2 z(2) \omega^{\dots}}}$$

est l'unique élément de longueur minimale de $E_{(A,z)}$.

Démonstration. La première conclusion découle directement du bon ordre des ordinaux.

La remarque suivant la définition de pureté nous permet de construire directement $\bar{x}$ par induction. Il appartient donc à $E_{(A,z)}$ car il en a la décomposition. De plus, il doit être de longueur minimale et unique de cette longueur puisque par sa suite de signes se termine dès que nous avons épuisé (A, z) . $\bar{x}$ doit donc être segment initial de tous les éléments de $E_{(A,z)}$. $\square$

Nous notons que nous ne pouvions pas éliminer l'hypothèse que $E_{(A,z)}$ soit non vide dans la deuxième proposition car la condition de pureté n'est pas suffisante pour garantir $E_{(A,z)} \neq \emptyset$. La première suite de l'exemple 2 en est un contre-exemple.

Théorème 4. Soit (A, z) pur tel que $E_{(A,z)} \neq \emptyset$. Il existe un isomorphisme d'ordre $\varphi_{(A,z)}$ entre $\mathbb{S}$ et $E_{(A,z)}$ tel que $\varphi_{(A,z)}(0) = \bar{x}$

Démonstration. L'idée générale de la démonstration reste la même que celle du théorème 12 de [L], c'est-à-dire nous donnons l'isomorphisme en donnant la longueur des suites de signes des éléments de $E_{(A,z)}$. Il y a cependant plusieurs détails nouveaux à considérer. Nous allons donc étudier les α -ièmes ($\alpha \geq 0$) suites de signes de $x = x_0$ où la 0-ième suite est la première non définie pour $\bar{x}$. Nous noterons par $d_{n\alpha}$ et $d'_{n\alpha}$ les longueurs de la suite correspondant à la α -ième suite de x pour x_n et x'_n respectivement.

La condition de pureté nous dit que la forme réduite de x_n (pour $x'_n = a_n z(n) x_n$) n'a aucun effet pour les α -ièmes suites. Ceci implique que $d_{n\alpha} = d'_{n\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la α -ième suite de x_n correspond à la α -ième suite de x'_n et à la α -ième suite de x car il n'y a pas de création ni de destruction de suites de signes pour les suites non définies pour $\bar{x}$.

Nous supposons au début de la preuve (jusqu'à la section 8 inclusivement) que (A, z) satisfait les hypothèses du lemme 3, c'est-à-dire $a_0 = 0$ et $z(0) = +$ pour ensuite généraliser.

1) Quelque soit $x = x_0 \in E_{(A,z)}$ (en particulier $x = \bar{x}$) la suite $\{l(x_n)\}_{n < \omega}$ des longueurs de x_n devient constante. En effet, par la définition de la suite nous devons avoir $l(x_0) \geq l(a_1) + l(x_1) \geq l(a_1) + l(a_2) + l(x_2) \geq \dots$ (additions ordinales). Nous trouvons donc que $\{l(x_n)\}_{n < \omega}$ est une ω -suite décroissante d'ordinaux non nuls et doit donc devenir constante.

2) Définissons les fonctions s et $s^\partial : \omega \leftrightarrow \{+, \leftrightarrow\}$ tel que

$$s_k = s(k) = \begin{cases} +, & \text{si } \text{card}\{j \leq k : z(j) = \leftrightarrow\} \text{ est pair,} \\ \leftrightarrow, & \text{si } \text{card}\{j \leq k : z(j) = \leftrightarrow\} \text{ est impair,} \end{cases}$$

$$s_k^\partial = s^\partial(k) \text{ où } s^\partial(k) \text{ est le signe opposé de } s(k).$$

notons respectivement par y^+ et par y^- le nombre total de *plus* et le nombre total de *moins* de y , nous trouvons à l'aide du théorème 0 que les éléments de $E_{(A,z)}$ (en particulier $\bar{x}$) doivent satisfaire les propriétés

$$x^+ = x_0^+ = x_0^{s_0} \geq a_1^+ + x_1^{s_1} \geq a_1^+ + a_2^{s_1} + x_2^{s_2} \geq \dots$$

et

$$x^- = x_0^- = x_0^{s_0^\partial} \geq a_1^- + x_1^{s_1^\partial} \geq a_1^- + a_2^{s_1^\partial} + x_2^{s_2^\partial} \geq \dots$$

D'où, par le même argument que précédemment nous pouvons affirmer que les suites $\{x_n^{s_n}\}$ et $\{x_n^{s_n^0}\}$ deviennent constantes.

Dans ce qui suit (les sections 3 à 8 inclusivement) nous supposons que A et z sont tels que les trois suites précédentes sont constantes pour $\bar{x}$, c'est-à-dire nous commençons à x_n pour n assez grand.

3) Nous avons toujours $\bar{x}^+ < d_{00}$. En effet, nous notons que la 0-ième suite de x_0 a le même signe que la 0-ième suite de x'_1 car $x_0 = \omega^{x'_1}$. Nous trouvons donc, d'après le théorème 0, que si elle est négative $\bar{x}^+ < \omega^{\bar{x}^++1} d_{10} = d_{00}$ et $\bar{x}^+ < \omega^{\bar{x}^++d'_{10}} = d_{00}$ si elle est positive.

4) Si $z \neq \omega$ alors $\bar{x}^- < d_{00}$. Si n_0 est le plus petit n tel que $s_n = \Leftrightarrow$ alors nous avons $\bar{x}_{n_0}^+ = \bar{x}^-$ et par 3) $\bar{x}^- < d_{n_0 0}$. Si la 0-ième suite de x_{n_0} est négative alors la 0-ième suite de x_n est positive pour tout $n < n_0$, d'où

$$\bar{x}^- < \omega^{\omega^{\bar{x}^- + d_{n_0 0}}} = d_{00}.$$

Un raisonnement similaire nous donne aussi $\bar{x}^- < d_{00}$ si la 0-ième suite de x_{n_0} est positive.

5) Si z ne se termine pas par ω alors d_{00} est un ϵ -nombre. Nous remarquons que si d_{n0} est un ϵ -nombre alors nous avons $d_{k0} = d_{n0}$ pour tout $k \leq n$ car d_{n0} est un ϵ -nombre supérieur à $\bar{x}^+$ et $\bar{x}^-$. D'après le théorème 0, la suite $\{d_{n0}\}_{n < \omega}$ est une suite décroissante d'ordinaux non nuls, elle doit donc devenir constante et encore une fois par le théorème 0, puisque qu'il y a une infinité de n tel que la 0-ième suite de x_n est positive la constante doit être un ϵ -nombre.

6) Avec les raisonnements précédents nous pouvons montrer que si z ne se termine pas par ω alors pour $\alpha > 0$ d_α est un ϵ -nombre tel que $\sup_{\beta < \alpha} d_\beta < d_\alpha$. D'où, si z ne termine pas par ω et que les trois suites précédentes sont constantes nous avons l'isomorphisme demandé. Celui-ci est donné par

$$(\varphi_{(A,z)}(t))(\alpha) = \begin{cases} \bar{x}(\alpha), & \text{si } \alpha < l(\bar{x}) \\ t(\beta), & \text{si } l(\bar{x}) \leq \alpha < \epsilon_{k+1} \\ t(\beta), & \text{si } \epsilon_{k+\beta} \leq \alpha < \epsilon_{k+\beta+1} \quad (0 < \beta) \end{cases}$$

où $k = \sup\{\gamma : \epsilon_\gamma \leq \max\{\bar{x}^+, \bar{x}^-\}\}$.

7) Si $z = \omega$ et la 0-ième suite est positive alors d_{00} est un ϵ -nombre supérieur à $\bar{x}^+$ et si elle est négative alors d_{00} est un multiple de $\omega^{\bar{x}^+ \omega}$. Le cas positif est facilement vérifié par les arguments utilisés en 5) et 6). Si la suite est négative alors la suite $\{d_{n0}\}_{n < \omega}$ est une suite décroissante d'ordinaux tel que $d_{n0} = \omega^{\bar{x}^++1} d_{(n+1)0}$ pour tout n . Il existe donc n_0 tel que $d_{(n_0+1)0} = d_{n_0 0}$, d'où $d_{n_0 0} = \omega^{\bar{x}^++1} d_{n_0 0}$ et $d_{n0} = d_{n_0 0} = d_{00}$ pour tout n et $d_{00} = \omega^{\bar{x}^++1} d_{00}$, ce qui implique que d_{00} est un multiple de $\omega^{\bar{x}^+ \omega}$.

8) Nous montrons de manière analogue à 7) que si $z = \omega$ alors pour $\alpha > 0$ les signes viennent en blocs de la même façon que Gonshor l'avait montré pour les ϵ -nombres: si a_α et b_α représentent la longueur de la α -ième suite de plus et de moins respectivement où a_α précède toujours b_α (i.e. nous pouvons avoir $a_\alpha = 0$ si α est limite) et a_0 (b_0) est

la première suite non définie pour $\bar{x}$ alors

$$a_\alpha \neq 0 \Leftrightarrow a_\alpha \text{ est un } \epsilon\text{-nombre supérieur à } \max\{\bar{x}^+, \sup_{\beta < \alpha} a_\beta\}$$

$$\text{et } b_\alpha \text{ est un multiple de } \omega^{c_\alpha \omega} \text{ où } c_\alpha = \sup_{\beta \leq \alpha} a_\beta.$$

Nous n'avons évidemment pas de formule explicite pour décrire l'isomorphisme $\varphi_{(A,\omega)} : t \Leftrightarrow \varphi_{(A,\omega)}(t)$ mais nous pouvons le décrire en fonction des suites de signes. Si pour t donné, a_α et b_α sont définis comme précédemment et $\hat{a}_\alpha, \hat{b}_\alpha$ sont les longueurs de leur image par $\varphi_{(A,\omega)}$ alors

$$\hat{a}_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{si } a_\alpha = 0, \\ \epsilon_{(\sup\{\gamma: \epsilon_\gamma \leq \bar{x}^+\} + \sum_{\beta \leq \alpha} a_\beta)}, & \text{si } a_\alpha \neq 0, \end{cases}$$

$$\hat{b}_\alpha = \omega^{(\bar{x}^+ + \hat{a}_\alpha)\omega} b_\alpha.$$

Note. $\bar{x}^+$ n'est pas nécessairement un ϵ -nombre. Si $A = \{\epsilon_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $z = \omega$ alors $\bar{x}^+ = \epsilon_0 \omega$.

9) Nous avons montré l'existence de l'isomorphisme si les suites $\{l(\bar{x}_n)\}, \{\bar{x}_n^{s_n}\}$ et $\{\bar{x}_n^{s_n^0}\}$ sont constantes pour les cas où $z = \omega$ et où z ne termine pas par ω . Pour étendre l'isomorphisme aux A et z tel que $E_{(A,z)} \neq \emptyset$ satisfaisant la condition de pureté nous procédons de la façon suivante.

Supposons que l'isomorphisme soit donné pour (A^k, z^k) alors nous considérons la fonction

$$\psi_{(A,z)}(t) = a_0 z(0) \omega^{a_1 z(1) \omega^{\dots^{a_k z(k) \varphi_{(A^k, z^k)}(t)}}.$$

Cette fonction est une bijection entre $\mathbb{S}$ et $E_{(A,z)}$ car (A, z) est pur, c'est un isomorphisme d'ordre si $\text{card}\{j \leq k : z(j) = \Leftrightarrow\}$ est pair et un anti-isomorphisme sinon. Nous définissons donc $\varphi_{(A,z)}(t)$ pour avoir l'isomorphisme. Nous vérifions facilement que $\varphi_{(A,z)}(0)$ est bien l'élément mentionné. $\square$

Remarque. Nous aurions également un isomorphisme avec la même propriété si nous avions permis un nombre fini de coefficients différents de 1, c'est-à-dire si nous avions l'isomorphisme pour (A^k, z^k) alors pour toutes constantes positives $r_0, \dots, r_k$ la fonction

$$f(t) = a_0 z(0) r_0 \omega^{a_1 z(1) r_1 \omega^{\dots^{a_k z(k) r_k \varphi_{(A^k, z^k)}(t)}}.$$

serait soit un isomorphisme ou un anti-isomorphisme.

Soit $A = \{a_n\}_{n < \omega}$ et $z \in \pm \mathcal{I}_\omega$ tel que $E_{(A,z)}$ soit non vide. Si nous écrivons $a_n = \sum_{i < \Omega_n} b_{ni} = \sum_{i < \Omega_n} r_{ni} \omega^{a_{ni}}$ où b_{ni_0} contrevient à la condition de pureté pour a_n alors tous les b_{nj} tel que $i_0 < j < \Omega_n$ contreviennent aussi à la condition. En effet, si $i_0 < j$ nous devons avoir $x'_{n+1} < a_{nj} < a_{ni_0}$ et puisque les deux termes extérieurs ont le même développement, a_{nj} doit aussi avoir ce développement. Ce fait nous permet d'écrire $a_n = \sum_{i < \Theta_n} b_{ni} + \sum_{\Theta_n \leq i < \Omega_n} b_{ni}$ où Θ_n est le premier i tel que b_{ni} n'est pas pur. Pour $n < \omega$ nous appellerons $a'_n = \sum_{i < \Theta_n} b_{ni}$ le nombre épuré de a_n .

Si nous considérons $y \in E_{(A,z)}$ nous avons

$$\begin{aligned} y &= a_0 z(0) x_0 = \left(a'_0 + \sum_{\Theta_0 \leq i < \Omega_0} r_{0i} \omega^{a_{0i}} \right) z(0) \omega^{(a_1 z(1) x_1)} \\ &= \left(a'_0 + \sum_{\Theta_0 \leq i < \Omega_0} r_{0i} \omega^{(a_1 z(1) x'_{0i})} \right) z(0) \omega^{(a_1 z(1) x_1)} \end{aligned}$$

où x'_{0i} a le même développement que x_1 pour tout $\Theta_0 \leq i < \Omega_0$.

$$\begin{aligned} y &= \left[a'_0 + \sum_{\Theta_0 \leq i < \Omega_0} r_{0i} \omega^{[(a'_1 + \sum_{\Theta_1 \leq i < \Omega_1} r_{1i} \omega^{a_{1i}}) z(1) \omega^{(a_2 z(2) x_{0i}^2)}]} \right] \\ &\quad z(0) \left[\omega^{[(a'_1 + \sum_{\Theta_1 \leq i < \Omega_1} r_{1i} \omega^{a_{1i}}) z(1) \omega^{(a_2 z(2) x_2)}]} \right] = \dots \end{aligned}$$

Nous voyons ce qui se passe pour la suite de signes de y . Nous construisons le début à partir de $a'_0, a'_1 \dots$ par récurrence. Le segment initial engendré par les a'_n peut être bien défini, cependant, s'il y a une infinité de a_n non purs la suite de signes suivant immédiatement le segment initial donné par les a'_n ne peut être bien définie. Il existe donc un n maximum tel que $a'_n \neq a_n$. Nous avons montré:

Théorème 5. Si $A = \{a_n\}_{n < \omega}$ et $z \in \pm \mathcal{I}_\omega$ sont choisis tel que $E_{(A,z)} \neq \emptyset$ alors il existe un n tel que (A^n, z^n) est pur. $\square$

Note. Nous pourrions aussi montrer le théorème en considérant une suite $\{b_{n_k i_{n_k}}\}$ où $b_{n_k i_{n_k}}$ n'est pas pur pour n_k . Par le théorème 1, la suite de longueurs de ces éléments doit être strictement décroissante. Il ne peut donc pas y avoir une infinité de a_n non purs.

Le développement précédent nous dit aussi comment trouver les éléments de $E_{(A,z)}$ dans le cas général. Si nous pouvons trouver un $\tilde{n}$ tel que $(A^{\tilde{n}+1}, z^{\tilde{n}+1})$ soit pur nous avons

$$x'_{\tilde{n}} = a'_{\tilde{n}} + \left[\sum_{\Theta_{\tilde{n}} \leq i < \Omega_{\tilde{n}}} r_{\tilde{n}i} \omega^{\varphi_{(A^{\tilde{n}+1}, z^{\tilde{n}+1})}(t_i)} \right] z(\tilde{n}) \omega^{\varphi_{(A^{\tilde{n}+1}, z^{\tilde{n}+1})}(t)}$$

où nous avons sur t la restriction que $t_{\Theta_{\tilde{n}}} > t_{\Theta_{\tilde{n}+1}} > \dots > t$. Nous descendons ainsi de niveau en niveau en tenant compte des coefficients négatifs r_{ni} ($n \leq \tilde{n}$, $\Theta_n \leq i < \Omega_n$).

Nous pouvons maintenant généraliser le théorème 4.

Théorème 6. Si $E_{(A,z)} \neq \emptyset$ alors il existe un isomorphisme d'ordre

$$\varphi_{(A,z)} : \text{Dom } \varphi_{(A,z)} \xleftrightarrow{\sim} E_{(A,z)}.$$

Plus généralement, soit E la classe non vide des surréels x , ayant une décomposition

$$x = x_1 = a_0 z(0) r_0 \omega^{x_1} \text{ et } x_n = a_n z(n) r_n \omega^{x_{n+1}},$$

il existe un isomorphisme d'ordre, $f : \text{Dom}(f) \xrightarrow{\sim} E$.

Démonstration. La première partie vient directement des théorèmes 4 et 5. Pour démontrer la deuxième partie il suffit de combiner les théorèmes 4, 5 ainsi que la remarque suivant le théorème 4 car $E \neq \emptyset$ implique qu'il n'y a qu'un nombre fini de $r_i \neq 1$. $\square$

Jusqu'à présent nous avons étudié les $E_{(A,z)}$ non vides sans savoir quelles sont les conditions sur A et z pour que $E_{(A,z)}$ soit non vide. Nous allons maintenant remédier à la situation.

Théorème 7. Soit $A = \{a_n\}_{n < \omega}$ et $z \in \pm \mathcal{I}_\omega$ tel que tous les a_n sont purs. Si il existe une suite strictement croissante $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ et $\Theta_{n_k} \leq \Omega_{n_k}$ telle que

$$a_0 z(0) \omega^{a_1 z(1) \omega^{\sum_{i < \Theta_{n_k}} b_{n_k i}}}$$

est une forme normale alors $E_{(A,z)}$ est non vide.

Démonstration. $E_{(A,z)}$ sera non vide si $a_0 z(0) \omega^{a_1 z(1) \omega^{\dots}}$ définit bien un surréel (le $\bar{x}$ du lemme 3) or l'existence de la sous-suite nous permet de construire ce surréel par récurrence. La condition de pureté des a_n nous assure que ceux-ci sont bien des surréels, ils ont donc leur suite de signes propre, et que nous n'avons pas de raisonnements circulaires. $\square$

Pour la réciproque du théorème 6 nous avons le problème suivant:

Problème 2. Soit $E_{(A,z)} \neq \emptyset$. Existe-t-il une suite strictement croissante $\{n_k\}_{k < \omega}$ où $n_0 = \tilde{n}$ et $\Theta_{n_k} < \Omega_k$ telle que

$$a_{\tilde{n}} z(\tilde{n}) \omega^{a_{\tilde{n}+1} z(\tilde{n}+1) \omega^{\sum_{i < \Theta_{n_k}} b_{n_k i}}}$$

définit une forme normale?

C'est-à dire, si le tout est une forme normale, existe-t-il une suite de formes normales telle que la "limite" de cette suite nous donne cette forme normale? La difficulté est que si y_{n_k} est une forme normale nous voulons aussi que

$$a_{n_k-1} z(n_k \Leftrightarrow 1) \omega^{y_{n_k}}, \quad a_{n_k-2} z(n_k \Leftrightarrow 2) \omega^{(a_{n_k-1} z(n_k-1) \omega^{y_{n_k}})}, \dots$$

soient aussi des formes normales. Si $z = \omega$ le problème est trivial. Cependant, si z ne se termine pas par ω plus nous devons faire notre construction avec un argument du genre sandwich.

Notation. Soit κ un cardinal régulier, nous notons par $\mathcal{O}_\kappa$ l'ensemble des surréels de longueur inférieure à κ .

Théorème 8. Soit $A = \{a_n\}_{n < \omega}$, $z \in \pm \mathcal{I}_\omega$ et κ un cardinal régulier tel que $A \subseteq \mathcal{O}_\kappa$. Si il existe un $\tilde{n}$ tel que $E_{(A^{\tilde{n}}, z^{\tilde{n}})} \cap \mathcal{O}_\kappa$ n'est pas vide alors nous avons $E_{(A^n, z^n)} \cap \mathcal{O}_\kappa$ non vide quelque soit $n \leq \tilde{n}$.

Démonstration. $E_{(A^{\tilde{n}}, z^{\tilde{n}})} \cap \mathcal{O}_\kappa$ non vide implique qu'il existe $\tilde{n} \leq \bar{n}$ tel que $(A^{\tilde{n}}, z^{\tilde{n}})$ est pur et pour ce $\tilde{n}$ $\varphi_{(A^{\tilde{n}}, z^{\tilde{n}})}$ restreint à $\mathcal{O}_\kappa$ donne un isomorphisme d'ordre entre $\mathcal{O}_\kappa$ et $E_{(A^{\tilde{n}}, z^{\tilde{n}})} \cap \mathcal{O}_\kappa$. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\tilde{n} = \bar{n}$. Les éléments de $E_{(A^{\tilde{n}-1}, z^{\tilde{n}-1})}$ sont donnés par

$$a'_{\tilde{n}-1} + \left[\sum_{\Theta_{\tilde{n}-1} \leq i < \Omega_{\tilde{n}-1}} r_{(\tilde{n}-1)i} \omega^{\varphi_{(A^{\tilde{n}}, z^{\tilde{n}})}(t_i)} \right] z(\tilde{n} \Leftrightarrow 1) \omega^{\varphi_{(A^{\tilde{n}}, z^{\tilde{n}})}(t)}$$

où $t < t_i$ pour tout $\Theta_{\tilde{n}-1} \leq i < \Omega_{\tilde{n}-1}$. Nous remarquons que $a_n \in \mathcal{O}_\kappa$ implique que $\Omega_n < \kappa$, d'où $E_{(A^{\tilde{n}-1}, z^{\tilde{n}-1})} \cap \mathcal{O}_\kappa \neq \emptyset$. Nous pouvons ainsi trouver $E_{(A^{\tilde{n}-2}, z^{\tilde{n}-2})}$ en continuant le développement. En tenant compte des signes des r_{ni} nous voyons que tous les éléments de $E_{(A^n, z^n)}$ pour $n \leq \tilde{n}$ peuvent être trouvés à partir de $\varphi_{(A^{\tilde{n}}, z^{\tilde{n}})}(t)$ et nous trouvons que si D_n est l'ensemble des $t \in \mathcal{O}_\kappa$ tel que $\varphi_{(A^{\tilde{n}}, z^{\tilde{n}})}(t)$ est permis pour $E_{(A^n, z^n)}$ alors D_{n-1} est formé à partir de D_n en utilisant seulement des intersections ou des unions de moins de κ intervalles. La régularité de κ nous donne donc que $E_{(A, z)}$ n'est pas vide. $\square$

Note. La régularité de κ nous assure aussi que nous restons toujours dans $\mathcal{O}_\kappa$. Si $\{a_n = \omega_n\}$ et $z = \omega$ alors

$$\omega^{-\omega_1 + \omega - \omega_2 + \dots}$$

n'appartient pas à $\mathcal{O}_{\omega_\omega}$ tandis que chacun des a_n appartient à $\mathcal{O}_{\omega_\omega}$.

Isomorphismes composés.

Nous pouvons définir, comme dans [L], les isomorphismes composés $\varphi_{\{(A, z)_\alpha\}_{\alpha < \beta}}$ et les isomorphismes d'ordres supérieurs $\varphi_{(A, z)}^\alpha$. Etant donné que d'après le théorème 4 tout se passe comme dans le cas vertical à la différence que les domaines de définition ne sont pas nécessairement toute la classe $\mathbb{S}$ nous n'insisterons pas et nous nous contenterons de donner les résultats nécessaires pour effectuer le transfert.

Si nous nous limitons à $\mathcal{O}_\kappa$ pour un κ régulier nous vérifions facilement la proposition suivante.

Proposition 9. Soit $\beta < \kappa$. Pour $\{(A, z)_\alpha\}_{\alpha \leq \beta}$, $\varphi_{\{(A, z)_\alpha\}_{\alpha \leq \beta}}(t)$ est défini si et seulement si $\varphi_{\{(A, z)_\alpha\}_{\alpha < \gamma}}(\varphi_{\{(A, z)_\delta\}_{\gamma \leq \delta \leq \beta}}(t))$ est défini pour tout $\gamma \leq \beta$.

Démonstration. Pour voir cette équivalence nous n'avons qu'à étudier la suite de signes de $x = \varphi_{\{(A, z)_\alpha\}_{\alpha \leq \beta}}(t)$. D'après la définition des isomorphismes, chacun d'eux définit un bloc de la suite de signes de x . Ainsi pour un γ donné, la suite de signes de x peut être décomposée en 2 parties l_1 et l_2 . l_1 est simplement la transposition en suite de signes engendrée par $\{(A, z)_\alpha\}_{\alpha < \gamma}$ et l_2 doit donc être $\varphi_{\{(A, z)_\delta\}_{\gamma \leq \delta \leq \beta}}(t)$. $\square$

D'où,

Proposition 10. Soit $\beta < \kappa$ et $\varphi_{\{(A,z)_\alpha\}_{\alpha < \beta}}$ un isomorphisme composé. Nous avons les équivalences suivantes.

- (1) Pour tout $1 \leq \gamma + 1 < \beta$ $E_{(A,z)_{\gamma+1}} \cap \text{Dom } \varphi_{(A,z)_\gamma} \neq \emptyset$.
- (2) $\text{Dom } \varphi_{\{(A,z)_\alpha\}_{\alpha < \beta}} \neq \emptyset$.
- (3) $E_{\{(A,z)_\alpha\}_{\alpha < \beta}} \neq \emptyset$.

Démonstration. (2) $\Leftrightarrow$ (3) est trivial.

(3) $\Rightarrow$ (1). Si $\varphi_{\{(A,z)_\alpha\}_{\alpha < \beta}}(t) \in E_{\{(A,z)_\alpha\}_{\alpha < \beta}}$ alors

$$\varphi_{\{(A,z)_\alpha\}_{\alpha < \gamma}} \left(\varphi_{\{(A,z)_\delta\}_{\gamma \leq \delta \leq \beta}}(t) \right) \in E_{(A,z)_{\gamma+1}} \cap \text{Dom } \varphi_{(A,z)_\gamma}.$$

(1) $\Rightarrow$ (3). Nous définissons par induction les suites $\{(s_\gamma, t_\gamma)\}_{\gamma < \beta}$ et $\{(u_\gamma, v_\gamma)\}_{\gamma < \beta}$ et les intervalles $\{I_\gamma\}_{\gamma < \beta}$.

i) Nous choisissons $u_0 = \varphi_{(A,z)_0}(s_0)$ et $v_0 = \varphi_{(A,z)_0}(t_0)$ tels que $[u_0, v_0] \subseteq E_{(A,z)_0}$
 ii) Soit $\alpha = \delta + 1$. Ayant trouvé (s_δ, t_δ) et (u_δ, v_δ) nous choisissons $(s_\alpha, t_\alpha) \in E_{(A,z)_{\alpha+1}} \cap \text{Dom } \varphi_{(A,z)_\alpha}$ tel que $[\varphi_{(A,z)_\alpha}(s_\alpha), \varphi_{(A,z)_\alpha}(t_\alpha)] \subset [s_\delta, t_\delta]$. Nous posons donc $u_\alpha = \varphi_{\{(A,z)_\gamma\}_{\gamma \leq \alpha}}(s_\alpha)$ et $v_\alpha = \varphi_{\{(A,z)_\gamma\}_{\gamma \leq \alpha}}(t_\alpha)$. Nous posons finalement

$$I_\alpha = [\min\{u_\alpha, v_\alpha\}, \max\{u_\alpha, v_\alpha\}] \subseteq I_\delta.$$

iii) Supposons que α soit limite et que $\{(s_\gamma, t_\gamma)\}_{\gamma < \alpha}$, $\{(u_\gamma, v_\gamma)\}_{\gamma < \alpha}$, $\{I_\gamma\}_{\gamma < \alpha}$ soient déjà construits. Nous savons que $\text{Dom } \varphi_{(A,z)_\alpha}$ est non vide ce qui nous permet de poursuivre le processus. De plus, puisque κ est régulier nous pouvons affirmer que $\bigcap_{\gamma < \alpha} I_\gamma \neq \emptyset$. Nous pouvons donc choisir (s_α, t_α) tel que $u_\alpha = \varphi_{(A,z)_\alpha}(s_\alpha)$ et $v_\alpha = \varphi_{(A,z)_\alpha}(t_\alpha)$ soient définies et que nous ayons

$$I_\alpha = [\min\{u_\alpha, v_\alpha\}, \max\{u_\alpha, v_\alpha\}] \subseteq \bigcap_{\gamma < \alpha} I_\gamma.$$

La régularité de κ nous permet de conclure $\emptyset \neq \bigcap_{\alpha < \beta} I_\alpha \subseteq E_{\{(A,z)_\alpha\}_{\alpha < \beta}}$. $\square$

Etant donné que les isomorphismes d'ordres supérieurs (i.e. les fonctions de points fixes des $\varphi_{(A,z)}$) sont essentiellement des isomorphismes composés les deux propositions précédentes restent valides pour ceux-ci. Nous notons que si (A, z) est pur $\varphi_{(A,z)}$ a toujours des points fixes, ce qui n'est pas vrai en général.

Exemple 5. Soit $z \in \mathcal{I}_\omega$ et $A = \{\omega^{\varphi_z(1)}, 0, 0, 0, \dots\}$ alors $\varphi_{(A,z)}(t) = \omega^{\varphi_z(1)} + \omega^{\varphi_z(t)}$ (où $z = +z(0)z(1)\dots$) n'a pas de points fixes.

English extended abstract. We can associate to a surreal number a a tree T_a such that the nodes $a_{(i_1, \dots, i_n)}$ of T_a are given by

$$a_{(0, i_1, \dots, i_n)} = \sum_{i < \Omega_{(0, i_1, \dots, i_n)}} r_{(0, i_1, \dots, i_n, i)} \omega^{a_{(0, i_1, \dots, i_n, i)}}.$$

The tree has the following properties:

- (1) If $b = (i_1, \dots)$ is an infinite branch of T_a then b has an initial segment $b' = (i_1, \dots, i_n)$ such that the branch $b'' = (i_{n+1}, \dots)$ is the rightmost branch of $T_{a_{(i_1, \dots, i_n)}}$.
- (2) The leftmost branch of T_a is either infinite or $\exists n \in \mathbb{N}$ such that $a_{(0, \dots, 0)}$ (n zeros) belongs to E_z for a z of length ω .

Given a sequence $A = \{a_n = \sum_{i < \Omega_n} r_{ni} \omega^{a_{ni}}\}_{n < \omega}$ and z of length ω we define $E_{(A, z)}$ to be the class of surreal numbers x , having the development $x = a_0 z(0) x_0$ and for all $n < \omega$,

$$x_n = \omega^{a_{n+1} z(n+1) x_{n+1}}.$$

Theorem 7 gives a sufficient condition on (A, z) to have $E_{(A, z)} \neq \emptyset$.

Given (A, z) such that $E_{(A, z)} \neq \emptyset$ there is nothing preventing that for a given n there is an a_{ni} with the same decomposition as $x'_{n+1} = a_{n+1} z(n+1) x_{n+1}$. However in that case, we have one problem: in order to know the sign sequence of x we need the sign sequence of a_{ni} . But to find the sign sequence of a_{ni} we must have the sign sequence of the elements having the same decomposition as x'_{n+1} and a_{ni} is such an element.

We first avoid this pathology with the following definition.

Definition. Let $A = \{a_n = \sum_{i < \Omega_n} r_{ni} \omega^{a_{ni}}\}_{n < \omega}$ and $z \in \pm \mathcal{I}_\omega$ be such that $E_{(A, z)}$ is non-empty. For $n < \omega$ if $(A^n, z^n) = (\{a_k\}_{n \leq k}, z^n = z(n) z(n+1) \dots)$ then we say that a_n is pure if for all $i < \Omega_n$ $a_{ni} \notin E_{(A^{n+1}, z^{n+1})}$. We say that (A, z) is pure if all the a_n 's are pure.

We show that if $E_{(A, z)}$ is non-empty then $E_{(A, z)}$ possesses an element of minimal length and if (A, z) is pure then this element is unique and given by

$$\bar{x} = \omega^{a_1 z(1) \omega^{a_2 z(2) \omega^{\dots}}}.$$

The main result of the paper is the generalization of Theorem 12 of [L].

Theorem. If A and z are given such that $E_{(A, z)}$ is non-empty and if (A, z) is pure then there is an order isomorphism $\varphi_{(A, z)} : \mathbb{S} \xrightarrow{\sim} E_{(A, z)}$ such that $\bar{x} = \varphi_{(A, z)}(0)$

Next, we show that if (A, z) is chosen such that $E_{(A, z)} \neq \emptyset$ then $\exists n$ such that $E_{(A^n, z^n)}$ is pure and the stronger form (thm 7) when restricted to $\mathcal{O}_\kappa (= \{x : l(x) < \kappa\})$.

The rest of the paper consists in generalizing the composed isomorphisms and superior order isomorphisms introduced in [L].

BIBLIOGRAPHIE

- [G] H. Gonshor, *An introduction to the theory of surreal numbers*, London Mathematical Society Lecture Note Serie, Cambridge University Press, New York, 1986.
- [L] D. Lemire, *Décomposition successives de la forme normale d'un surréel et généralisation des ϵ -nombres*, Soumis, Annales des Sciences Mathématiques du Québec.

D. LEMIRE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE A
MONTRÉAL QC H3C 3J7
CANADA