

## PROCÉDURES LOCALE ET NON LOCALE D'INTERPOLATION À L'AIDE DE FONCTIONS SPLINES QUADRATIQUES

FRANÇOIS DUBEAU ET ROBERT GERVAIS

**RÉSUMÉ.** Une procédure locale et une procédure non locale d'interpolation à l'aide de fonctions splines quadratiques basées sur les valeurs d'une fonction et de sa dérivée première aux noeuds d'une partition sont analysées. Les bornes d'erreurs sont données en termes de la régularité de la fonction interpolée.

**ABSTRACT.** Local and nonlocal quadratic spline interpolation processes based on values of a function and of its first derivative at the nodes of a partition are analyzed. Error bounds are given in terms of the regularity of the interpolated function.

**1. Introduction.** L'interpolation à l'aide de fonctions splines quadratiques est adéquate et possède le bon ordre de convergence aussi longtemps que les points de collocation sont placés uniformément entre les noeuds de la partition [Dem, KRV, Mar, Mir, Xie]. Lorsque les points de collocation coïncident avec les noeuds de la partition, le bon ordre de convergence est préservé pour une partition uniforme en autant que les dérivées de la fonction interpolée soient à variation bornée [DS]. Le but de cet article est d'analyser deux procédés d'interpolation à l'aide de fonctions splines quadratiques basés sur les valeurs d'une fonction et de sa dérivée première données aux noeuds de la partition.

Pour le premier procédé décrit à la section 3, les valeurs de la fonction et de la dérivée première sont données aux noeuds d'une partition. En insérant des noeuds intermédiaires, on obtient une procédure d'interpolation complètement locale avec une spline quadratique de classe  $C^1[a, b]$ . Ce procédé est utilisé lorsqu'on cherche à obtenir une interpolation qui préserve la monotonie et/ou la convexité des données [Sch], [MPR]. Dans le second procédé décrit à la section 4, les valeurs de la fonction et de la dérivée première sont données alternativement aux noeuds d'une partition uniforme. Dans ce cas, ce procédé n'est plus local. Des procédés semblables utilisant les dérivées aux noeuds intermédiaires ont déjà été utilisés afin d'établir des formules de quadrature [TK]. Pour ces deux procédés, les résultats d'existence et d'unicité de la fonction spline quadratique d'interpolation sont établis. De plus, les bornes d'erreur sont données en termes de la régularité de la fonction interpolée. Des résultats préliminaires sont présentés à la section 2.

---

Reçu le 13 janvier 1997 et, sous forme définitive, le 6 février 1998.

**2. Résultats préliminaires.** Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq \beta$  et posons  $I = [\alpha, \beta]$  si  $\alpha < \beta$ , ou  $I = [\beta, \alpha]$  si  $\beta < \alpha$ . Soit  $\bar{x} \in I$ . Lorsque  $f \in C^r(I)$ , le développement de Taylor de  $f$  en  $\bar{x}$  donne

$$f^{(l)}(x) = p_r^{(l)}(x) + q_{r,l}(x)$$

où

$$p_r(x) = \sum_{k=0}^r f^{(k)}(\bar{x}) \frac{(x - \bar{x})^k}{k!}$$

et

$$q_{r,l}(x) = \left[ f^{(r)}(\xi_{r,l}(x)) - f^{(r)}(\bar{x}) \right] \frac{(x - \bar{x})^{r-l}}{(r-l)!}$$

pour un  $\xi_{r,l}(x)$  entre  $\bar{x}$  et  $x$ . Si  $\bar{h} = \max \{|\alpha - \bar{x}|, |\beta - \bar{x}|\}$  et  $\omega_r(\delta)$  dénote le module de continuité de  $f^{(r)}$ , alors nous avons

$$|q_{r,l}(x)| \leq \frac{\bar{h}^{r-l}}{(r-l)!} \omega_r(\bar{h}). \quad (1)$$

Nous utiliserons ce résultat pour établir des bornes d'erreur pour deux types de polynôme d'interpolation d'Hermite que nous utiliserons dans les deux sections suivantes.

**Type 1.** Soit  $v(x)$  l'unique polynôme de degré 2 défini sur  $I$  par les conditions :  $v(\alpha) = f(\alpha)$ ,  $v(\beta) = f(\beta)$  et

$$v^{(1)}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ f^{(1)}(\alpha) & \text{si } r > 0. \end{cases}$$

Ce polynôme s'écrit

$$v(x) = v(\alpha)A_0(t) + (\beta - \alpha)v^{(1)}(\alpha)A_1(t) + v(\beta)B_0(t) \quad (2)$$

où

$$t = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, \quad A_0(t) = 1 - t^2, \quad A_1(t) = t(1 - t) \text{ et } B_0(t) = t^2. \quad (3)$$

Pour  $l = 0, \dots, r$ , on a

$$v^{(l)}(x) - f^{(l)}(x) = \frac{v(\alpha)}{(\beta - \alpha)^l} A_0^{(l)}(t) + \frac{v^{(1)}(\alpha)}{(\beta - \alpha)^{l-1}} A_1^{(l)}(t) + \frac{v(\beta)}{(\beta - \alpha)^l} B_0^{(l)}(t) - f^{(l)}(x).$$

En utilisant un développement de Taylor en  $\bar{x}$ , nous obtenons

(i)  $r = 0$  :

$$\begin{aligned} v(x) - f(x) &= [p_0(x) + q_{0,0}(\alpha)] A_0(t) + [p_0(\beta) + q_{0,0}(\beta)] B_0(t) - [p_0(x) + q_{0,0}(x)] \\ &= q_{0,0}(\alpha)A_0(t) + q_{0,0}(\beta)B_0(t) - q_{0,0}(x) \end{aligned}$$

et en utilisant (1) et (3) nous avons

$$|v(x) - f(x)| \leq [|A_0(t)| + |B_0(t)| + 1] \|q_{0,0}\| \leq 2\omega_0(\bar{h});$$

(ii)  $r = 1, 2$  :

$$\begin{aligned}
v^{(l)}(x) - f^{(l)}(x) &= [p_r(\alpha) + q_{r,0}(\alpha)] \frac{1}{(\beta - \alpha)^l} A_0^{(l)}(t) \\
&\quad + [p_r^{(1)}(\alpha) + q_{r,1}(x)] \frac{1}{(\beta - \alpha)^{l-1}} A_1^{(l)}(t) \\
&\quad + [p_r(\beta) + q_{r,0}(\beta)] \frac{1}{(\beta - \alpha)^l} B_0^{(l)}(t) - [p_r^{(l)}(x) + q_{r,l}(x)] \\
&= \frac{1}{(\beta - \alpha)^l} \left[ q_{r,0}(\alpha) A_0^{(l)}(t) + q_{r,1}(\alpha)(\beta - \alpha) A_1^{(l)}(t) \right. \\
&\quad \left. + q_{r,0}(\beta) B_0^{(l)}(t) \right] - q_{r,l}(x)
\end{aligned}$$

d'où, en utilisant (1),

$$\begin{aligned}
|v^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| &\leq \frac{1}{|\beta - \alpha|^l} \left[ |A_0^{(l)}(t)| + |B_0^{(l)}(t)| \right] \|q_{r,0}\| \\
&\quad + \frac{1}{|\beta - \alpha|^{l-1}} |A_1^{(l)}(t)| \|q_{r,1}\| + \|q_{r,l}\| \\
&\leq \left[ \frac{\bar{h}^r}{r! h^l} \left( |A_0^{(l)}(t)| + |B_0^{(l)}(t)| \right) + \frac{\bar{h}^{r-1}}{(r-1)! h^{l-1}} |A_1^{(l)}(t)| \right. \\
&\quad \left. + \frac{\bar{h}^{r-l}}{(r-l)!} \right] \omega_r(\bar{h})
\end{aligned}$$

où  $h = |\beta - \alpha|$ . Si on prend  $\bar{x} = (\alpha + \beta)/2$  alors  $\bar{h} = h/2$  et nous obtenons

$$\begin{aligned}
|v^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| &\leq \left[ \frac{1}{2^r r!} \left( |A_0^{(l)}(t)| + |B_0^{(l)}(t)| \right) + \frac{1}{2^{r-1} (r-1)!} |A_1^{(l)}(t)| \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2^{r-l} (r-l)!} \right] h^{r-l} \omega_r \left( \frac{h}{2} \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque  $\omega_2(h/2) \leq h \|f^{(3)}\|/2$  lorsque  $f \in C^3(I)$ , nous avons démontré le résultat suivant.

**Théorème A.** Si  $f \in C^r(I)$  et si  $v(x)$  est donné par (2), alors nous avons pour

- (i)  $r = 0, 1, 2, l = 0, \dots, r$  :  $\|v^{(l)} - f^{(l)}\| \leq C_{r,l}^1 h^{r-l} \omega_r(h/2)$ ,
- (ii)  $r = 3, l = 0, 1, 2$  :  $\|v^{(l)} - f^{(l)}\| \leq C_{3,l}^1 h^{3-l} \|f^{(3)}\|$

où

$$\begin{aligned}
C_{00}^1 &= 2, \quad C_{10}^1 = \frac{5}{4}, \quad C_{11}^1 = 4, \quad C_{20}^1 = \frac{3}{8}, \quad C_{21}^1 = \frac{3}{2}, \quad C_{22}^1 = \frac{5}{2}, \\
C_{30}^1 &= \frac{1}{2} C_{20}^1 = \frac{3}{16}, \quad C_{31}^1 = \frac{1}{2} C_{21}^1 = \frac{3}{4}, \quad C_{32}^1 = \frac{1}{2} C_{22}^1 = \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

Nous utiliserons également un résultat de perturbation. Si  $v(x)$  est donné par (2) et  $\tilde{v}(x)$  est également donné par (2) mais en remplaçant  $v(\alpha)$ ,  $v^{(1)}(\alpha)$  et  $v(\beta)$  par

$$\tilde{v}(\alpha) = v(\alpha) + \epsilon_{00}, \quad \tilde{v}^{(1)}(\alpha) = v^{(1)}(\alpha) + \epsilon_{01}, \quad \tilde{v}(\beta) = v(\beta) + \epsilon_{10}$$

nous obtenons pour  $l = 0, \dots, r$

$$|\tilde{v}^{(l)}(x) - v^{(l)}(x)| \leq \frac{1}{h^l} \left[ |A_0^{(l)}(t)| |\epsilon_{00}| + h |A_1^{(l)}(t)| |\epsilon_{01}| + |B_0^{(l)}(t)| |\epsilon_{10}| \right]. \quad (4)$$

**Type 2.** Soit  $w(x)$  l'unique polynôme de degré 2 défini sur  $I$  par  $w(\alpha) = f(\alpha)$ , et

$$w^{(1)}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ f^{(1)}(\alpha) & \text{si } r > 0 \end{cases}, \quad w^{(1)}(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ f^{(1)}(\beta) & \text{si } r > 0 \end{cases}.$$

Ce polynôme s'écrit

$$w(x) = w(\alpha)D_0(t) + (\beta - \alpha)w^{(1)}(\alpha)D_1(t) + (\beta - \alpha)w^{(1)}(\beta)E_1(t) \quad (5)$$

où

$$t = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, \quad D_0(t) = 1, \quad D_1(t) = t \left(1 - \frac{t}{2}\right) \text{ et } E_1(t) = \frac{t^2}{2}. \quad (6)$$

De façon semblable au théorème A, nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème B.** Si  $f \in C^r(I)$  et si  $w(x)$  est donné par (5), alors nous avons pour

- (i)  $r = 0$  :  $\|w - f\| \leq \omega_0(h)$ ,
- (ii)  $r = 1, 2, l = 0, \dots, r$  :  $\|w^{(l)} - f^{(l)}\| \leq C_{rl}^2 h^{r-l} \omega_r(h/2)$ ,
- (iii)  $r = 3, l = 0, 1, 2$  :  $\|w^{(l)} - f^{(l)}\| \leq C_{3l}^2 h^{3-l} \|f^{(3)}\|$

où

$$C_{10}^2 = 2, \quad C_{11}^2 = 2, \quad C_{20}^2 = \frac{3}{4}, \quad C_{21}^2 = 1, \quad C_{22}^2 = 2,$$

$$C_{30}^2 = \frac{1}{2}C_{20}^2 = \frac{3}{8}, \quad C_{31}^2 = \frac{1}{2}C_{21}^2 = \frac{1}{2}, \quad C_{32}^2 = \frac{1}{2}C_{22}^2 = 1.$$

Il en est de même pour le résultat de perturbation. Si  $w(x)$  est donné par (5) et si  $\tilde{w}(x)$  est également donné par (5) mais en remplaçant  $w(\alpha)$ ,  $w^{(1)}(\alpha)$  et  $w^{(1)}(\beta)$  par

$$\tilde{w}(\alpha) = w(\alpha) + \epsilon_{00}, \quad \tilde{w}^{(1)}(\alpha) = w^{(1)}(\alpha) + \epsilon_{01}, \quad \tilde{w}^{(1)}(\beta) = w^{(1)}(\beta) + \epsilon_{11}$$

nous obtenons pour  $l = 0, \dots, r$

$$|\tilde{w}^{(l)}(x) - w^{(l)}(x)| \leq \frac{1}{h^l} \left[ |D_0^{(l)}(t)| |\epsilon_{00}| + h |D_1^{(l)}(t)| |\epsilon_{01}| + h |E_1^{(l)}(t)| |\epsilon_{11}| \right]. \quad (7)$$

**3. Un procédé local d'interpolation.** On se donne une partition uniforme  $\{\zeta_j\}_{j=0}^N$  de l'intervalle  $[a, b]$ ,  $a = \zeta_0 < \dots < \zeta_j < \dots < \zeta_N = b$  où  $\zeta_j = a + jh_1$  et  $h_1 = (b - a)/N$ . Pour une fonction  $f \in C^r[a, b]$  on considère les données suivantes

$$f(\zeta_j) \quad j = 0, \dots, N,$$

et, si  $r \geq 1$

$$f^{(1)}(\zeta_j) \quad j = 0, \dots, N.$$

Pour obtenir une procédure locale d'interpolation avec une fonction spline quadratique, nous introduisons une deuxième partition uniforme  $\{x_i\}_{i=0}^{2N}$  de  $[a, b]$  en ajoutant à la partition originale les points milieux intermédiaires de telle sorte que

$$\begin{aligned} x_{2j} &= \zeta_j \quad j = 0, \dots, N, \\ x_{2j+1} &= \frac{\zeta_j + \zeta_{j+1}}{2} \quad j = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Posons  $h = h_1/2$ , de telle sorte que  $x_i = a + ih$  ( $i = 0, \dots, 2N$ ). Nous considérons alors le problème suivant : déterminer une fonction spline quadratique sur la partition  $\{x_i\}_{i=0}^{2N}$  telle que

- (i)  $s \in C^1[a, b]$ ,
- (ii)  $s$  est un polynôme de degré 2 sur chacun des intervalles

$$[x_i, x_{i+1}] \quad (i = 0, \dots, 2N-1), \quad (9)$$

et

$$(iii) \quad \begin{cases} s_{2j} = s(x_{2j}) = f(x_{2j}) = f_{2j} & \text{pour } j = 0, \dots, N, \\ s_{2j}^{(1)} = s^{(1)}(x_{2j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ f^{(1)}(x_{2j}) = f_{2j}^{(1)} & \text{si } r \geq 1 \end{cases} & \text{pour } j = 0, \dots, N. \end{cases} \quad (10)$$

Utilisons un polynôme d'interpolation de type 1, décrit à la section précédente, sur chacun des intervalles  $[x_{2j}, x_{2j+1}]$  et  $[x_{2j+1}, x_{2j+2}]$  :

- (i) sur  $[x_{2j}, x_{2j+1}]$ , prenons  $\alpha = x_{2j}$  et  $\beta = x_{2j+1}$  et posons

$$s(x) = s_{2j}A_0(t) + hs_{2j}^{(1)}A_1(t) + s_{2j+1}B_0(t);$$

- (ii) sur  $[x_{2j+1}, x_{2j+2}]$ , prenons  $\alpha = x_{2j+2}$  et  $\beta = x_{2j+1}$ , et posons

$$s(x) = s_{2j+2}A_0(t) - hs_{2j+2}^{(1)}A_1(t) + s_{2j+1}B_0(t).$$

La condition  $s^{(1)}(x_{2j+1}^-) = s^{(1)}(x_{2j+1}^+)$  entraîne que

$$s_{2j+1} = \frac{1}{2} [s_{2j} + s_{2j+2}] - \frac{h}{4} [s_{2j+2}^{(1)} - s_{2j}^{(1)}]$$

de telle sorte que  $s(x)$  est bien définie et localement déterminée sur  $[x_{2j}, x_{2j+2}]$  avec les données en  $x_{2j}$  et  $x_{2j+2}$  seulement.

**Lemme 1.** Pour  $r = 0, 1, 2, 3$ , nous avons

$$|s_{2j+1} - f_{2j+1}| \leq \left(1 + \frac{r}{2}\right) \frac{h^r}{r!} \omega_r(h)$$

et, en conséquence, si  $f \in C^4[a, b]$  alors

$$|s_{2j+1} - f_{2j+1}| \leq \frac{5}{12} h^4 \|f^{(4)}\|.$$

*Démonstration.* Pour  $r = 0$  nous avons

$$s_{2j+1} - f_{2j+1} = \frac{1}{2} [f_{2j} + f_{2j+2}] - f_{2j+1}$$

et le résultat suit facilement. Pour  $r = 1, 2, 3$  nous utilisons un développement de Taylor de  $f$  sur  $[x_{2j}, x_{2j+2}]$  en  $\bar{x} = x_{2j+1}$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} s_{2j+1} - f_{2j+1} &= \frac{1}{2} [f_{2j} + f_{2j+2}] - \frac{h}{4} [f_{2j+2}^{(1)} - f_{2j}^{(1)}] - f_{2j+1} \\ &= \frac{1}{2} [p_r(x_{2j}) + q_{r0}(x_{2j}) + p_r(x_{2j+2}) + q_{r0}(x_{2j+2})] \\ &\quad - \frac{h}{4} [p_r^{(1)}(x_{2j+2}) + q_{r1}(x_{2j+2}) - p_r^{(1)}(x_{2j}) - q_{r1}(x_{2j})] \\ &\quad - [p_r(x_{2j+1}) + q_{r0}(x_{2j+1})]. \end{aligned}$$

Observons que

$$\frac{1}{2} [p_r(x_{2j}) + p_r(x_{2j+2})] - \frac{h}{4} [p_r^{(1)}(x_{2j+2}) - p_r^{(1)}(x_{2j})] - p_r(x_{2j+1})$$

s'annule pour tout polynôme de degré  $\leq 3$  et que  $q_{r0}(x_{2j+1}) = 0$ . Ainsi, en utilisant (1), nous obtenons

$$|s_{2j+1} - f_{2j+1}| \leq \left(1 + \frac{r}{2}\right) \frac{h^r}{r!} \omega_r(h). \quad \square$$

Maintenant, en utilisant le polynôme  $v(x)$  de type 1 avec  $f$ , nous obtenons sur  $[x_{2j}, x_{2j+1}]$  (un résultat similaire peut être obtenu pour  $[x_{2j+1}, x_{2j+2}]$ ) :

$$|s^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \leq |s^{(l)}(x) - v^{(l)}(x)| + |v^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)|,$$

et en utilisant (4) et le théorème A, nous avons

$$|s^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \leq \frac{1}{h^l} |s_{2j+1} - f_{2j+1}| |B_0^{(l)}(t)| + C_{rl}^1 h^{r-l} \omega_r\left(\frac{h}{2}\right)$$

pour  $r = 0, 1, 2$  et  $l = 0, \dots, r$ . Pour  $r = 3$  et  $l = 0, 1, 2$  le dernier terme de droite doit être remplacé par  $C_{3l}^1 h^{3-l} \|f^{(3)}\|$ . Finalement en utilisant le lemme 1, nous obtenons le résultat qui suit.

**Théorème 1.** Soit  $f \in C^r[a, b]$ . Si  $s(x)$  est l'unique spline quadratique définie par (8), (9) et (10), alors pour tout  $x \in [a, b]$  on a pour

(i)  $r = 0, 1, 2, l = 0, \dots, r$  :

$$|s^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \leq \left[ \left(1 + \frac{r}{2}\right) \frac{\|B_0^{(l)}\|}{r!} + C_{rl}^1 \right] h^{r-l} \omega_r(h),$$

(ii)  $r = 3, l = 0, 1, 2$  :  $|s^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \leq \left[ \frac{5}{12} \|B_0^{(l)}\| \omega_3(h) + C_{31}^1 \|f^{(3)}\| \right] h^{3-l}.$

(Notons que  $\|B_0\| = 1$  et  $\|B_0^{(1)}\| = \|B_0^{(2)}\| = 2$ .)

*Remarque 1.* Pour le procédé décrit dans cette section, il n'est pas nécessaire que la partition originale  $\{\zeta_j\}_{j=0}^N$  soit uniforme.

*Remarque 2.* Un procédé d'interpolation semblable pourrait être étudié pour les conditions

$$\begin{aligned} s_{2j+1} &= f_{2j+1} & j &= 0, \dots, N-1 \\ s_{2j+1}^{(1)} &= \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ f_{2j+1}^{(1)} & \text{si } r \geq 1 \end{cases} & j &= 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (10')$$

au lieu des conditions (10). Dans ce cas les bornes d'erreur précédentes sont valides pour tout  $x \in [x_1, x_{2N-1}]$ . Pour définir  $s(x)$  sur  $[x_0, x_1]$  et sur  $[x_{2N-1}, x_{2N}]$ , on doit ajouter deux conditions qui peuvent être choisies parmi celles-ci

$$s_0 = s_{2N} \text{ et } s_0^{(1)} = s_{2N}^{(1)} \quad (f \text{ périodique}) \quad (11)$$

ou

$$s_0 = f_0 \text{ et } s_{2N} = f_{2N} \quad (11')$$

ou

$$s_0^{(1)} = f_0^{(1)} \text{ et } s_{2N}^{(1)} = f_{2N}^{(1)}. \quad (11'')$$

Avec (11), nous obtenons un problème identique au problème précédent. Sous la condition (11'), resp. (11''), il suffit d'utiliser l'interpolation de type 1, resp. 2, et le théorème A, resp. B, pour obtenir des bornes sur les intervalles  $[x_0, x_1]$  et  $[x_{2N-1}, x_{2N}]$ .

**4. Un procédé non local d'interpolation d'une fonction périodique.** Dans cette section, on considère le problème suivant : déterminer une fonction spline quadratique définie sur la partition uniforme  $\{x_i\}_{i=0}^{2N}$  de  $[a, b]$  où  $a = x_0 < \dots < x_i < \dots < x_{2N} = b$  avec  $x_i = a + ih$  et  $h = (b - a)/2N$ , et telle que

- (i)  $s \in C^1[a, b]$ , (12)
- (ii)  $s$  est un polynôme de degré 2 sur chacun des intervalles

$$[x_i, x_{i+1}] \quad (i = 0, \dots, 2N-1), \quad (13)$$

et

$$(iii) \begin{cases} s_{2j} = f_{2j} & \text{pour } j = 0, \dots, N, \\ s_{2j+1}^{(1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ f_{2j+1}^{(1)} & \text{si } r \geq 1, \end{cases} & \text{pour } j = 0, \dots, N-1, \\ s_0^{(1)} = s_{2N}^{(1)} & \text{(périodicité).} \end{cases} \quad (14)$$

*Remarque 3.* Un second problème, équivalent au problème précédent, peut être défini en remplaçant la condition (14) par

$$(iii') \begin{cases} s_{2j+1} = f_{2j+1} & \text{pour } j = 0, \dots, N-1, \\ s_{2j}^{(1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ f_{2j}^{(1)} & \text{si } r \geq 1, \end{cases} & \text{pour } j = 0, \dots, N, \\ s_0 = s_{2N} & \text{(périodicité).} \end{cases} \quad (14')$$

Dans cette section on supposera que  $f \in C_p^r[a, b]$ , c'est-à-dire que  $f \in C^r[a, b]$  et  $f^{(l)}$  est périodique pour  $l = 0, \dots, r$ .

Utilisons un polynôme d'interpolation de type 2, décrit à la section 2, sur les intervalles  $[x_{2j}, x_{2j+1}]$  et  $[x_{2j+1}, x_{2j+2}]$  :

(i) sur  $[x_{2j}, x_{2j+1}]$ , prenons  $\alpha = x_{2j}$  et  $\beta = x_{2j+1}$ , et posons

$$s(x) = s_{2j}D_0(t) + hs_{2j}^{(1)}D_1(t) + hs_{2j+1}^{(1)}E_1(t),$$

(ii) sur  $[x_{2j+1}, x_{2j+2}]$ , prenons  $\alpha = x_{2j+2}$  et  $\beta = x_{2j+1}$ , et posons

$$s(x) = s_{2j+2}D_0(t) - hs_{2j+2}^{(1)}D_1(t) - hs_{2j+1}^{(1)}E_1(t).$$

La condition  $s(x_{2j+1}^-) = s(x_{2j+1}^+)$  entraîne

$$s_{2j}^{(1)} + s_{2j+2}^{(1)} = \frac{2}{h}(s_{2j+2} - s_{2j}) - 2s_{2j+1}^{(1)} \quad (j = 0, \dots, N-1).$$

Utilisant la périodicité  $s_0^{(1)} = s_{2N}^{(1)}$ , nous avons à résoudre le système linéaire  $As^{(1)} = b$  où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad s^{(1)} = \begin{bmatrix} s_0^{(1)} \\ s_2^{(1)} \\ \vdots \\ s_{2N-2}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \frac{2}{h} \begin{bmatrix} s_2 - s_0 \\ s_4 - s_2 \\ \vdots \\ s_{2N} - s_{2N-2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_1^{(1)} \\ s_3^{(1)} \\ \vdots \\ s_{2N-1}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Comme  $\det A = 1 + (-1)^{N+1}$ , le système possède toujours une solution unique lorsque  $N$  est impair. Dans ce cas la solution explicite est

$$\begin{bmatrix} s_0^{(1)} \\ s_2^{(1)} \\ \vdots \\ s_{2N-2}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \frac{1}{h} \begin{bmatrix} s_2 - s_0 \\ s_4 - s_2 \\ \vdots \\ s_{2N} - s_{2N-2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_1^{(1)} \\ s_3^{(1)} \\ \vdots \\ s_{2N-1}^{(1)} \end{bmatrix} \right\}$$

qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} s_{2j}^{(1)} = (-1)^j & \left\{ - \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \left[ \frac{1}{h} (s_{2k+2} - s_{2k}) - s_{2k+1}^{(1)} \right] \right. \\ & \left. + \sum_{k=j}^{N-1} (-1)^k \left[ \frac{1}{h} (s_{2k+2} - s_{2k}) - s_{2k+1}^{(1)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

pour  $j = 0, \dots, N-1$ . Pour simplifier on écrira (15) sous la forme

$$s_{2j}^{(1)} = (-1)^j \left( - \sum_{k=0}^{j-1} + \sum_{k=j}^{N-1} \right) (-1)^k \left[ \frac{1}{h} (s_{2k+2} - s_{2k}) - s_{2k+1}^{(1)} \right]. \quad (16)$$

Pour  $r = 0$  on obtient directement

$$|s_{2j}^{(1)}| \leq \frac{1}{h} \text{Var}(f) \quad (j = 0, \dots, N-1). \quad (17)$$

En utilisant le polynôme d'interpolation de type 2 pour  $f$ , nous obtenons sur  $[x_{2j}, x_{2j+1}]$  (un résultat semblable peut être obtenu pour l'intervalle  $[x_{2j+1}, x_{2j+2}]$ ) :

$$\begin{aligned} |s(x) - f(x)| &\leq |s(x) - w(x)| + |w(x) - f(x)| \\ &= |hs_{2j}^{(1)} D_1(t)| + |w(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{h}{2} |s_{2j}^{(1)}| + |w(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{1}{2} \text{Var}(f) + \omega_0(h) \end{aligned} \quad (18)$$

par (17) et le théorème B.

Pour  $r = 1, 2, 3$  et  $l = 0, \dots, r$ , nous avons sur  $[x_{2j}, x_{2j+1}]$  :

$$|s^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \leq |e_{2j}^{(1)}| h^{1-l} |D_1^{(l)}(t)| + |w^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \quad (19)$$

et il faut estimer  $|e_{2j}^{(1)}|$  où  $e_i^{(1)} = s_i^{(1)} - f_i^{(1)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2N$ . En utilisant (16) nous obtenons

$$e_{2j}^{(1)} + e_{2j+2}^{(1)} = \frac{2}{h} [f_{2j+2} - f_{2j}] - 2f_{2j+1}^{(1)} - f_{2j}^{(1)} - f_{2j+2}^{(1)},$$

et un développement de Taylor de  $f$  en  $x_{2j+1}$  donne

$$|e_{2j}^{(1)} + e_{2j+2}^{(1)}| = \begin{cases} \frac{2}{r!} [2+r] h^{r-1} \omega_r(h) & \text{pour } r = 1, 2, \\ 4h^2 \|f^{(3)}\| & \text{pour } r = 3. \end{cases} \quad (20)$$

En utilisant (16) nous avons également

$$\begin{aligned} e_{2j}^{(1)} - e_{2j+2}^{(1)} &= 2(-1)^j \left\{ \left( -\sum_{k=0}^{j-1} + \sum_{k=j+1}^{N-1} \right) (-1)^k \left[ \frac{1}{h} (f_{2k+2} - f_{2k}) - f_{2k+1}^{(1)} \right] \right\} \\ &\quad - f_{2j}^{(1)} + f_{2j+2}^{(1)} \end{aligned} \quad (21)$$

qu'il ne suffira de considérer que pour les  $j$  pairs ( $j = 0, 2, \dots, N-1$ ).

Pour  $r = 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} e_{2j}^{(1)} - e_{2j+2}^{(1)} &= 2(-1)^j \left\{ \left( -\sum_{k=0}^{j-1} + \sum_{k=j+1}^{N-1} \right) (-1)^k \left( 2f^{(1)}(\xi_{2k+1}) - f_{2k+1}^{(1)} \right) \right\} \\ &\quad - f_{2j}^{(1)} + f_{2j+2}^{(1)} \end{aligned}$$

où  $x_{2k} < \xi_{2k+1} < x_{2k+2}$ . Ainsi

$$|e_{2j}^{(1)} - e_{2j+2}^{(1)}| \leq 4 \text{Var}(f^{(1)}).$$

Cette inégalité combinée à (20) donne

$$|e_{2j}^{(1)}| \leq 3\omega_1(h) + 2 \operatorname{Var}(f^{(1)}). \quad (22)$$

Pour  $r = 2$ , l'identité suivante

$$\frac{2}{h}[f_{2k+2} - f_{2k}] - 2f_{2k+1}^{(1)} = \left[ f_{2k}^{(1)} + f_{2k+2}^{(1)} \right] - \frac{2}{h} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} q_k(\zeta) f^{(2)}(\zeta) d\zeta$$

où

$$q_k(\zeta) = \begin{cases} \zeta - (x_{2k} + h/2) & \text{pour } \zeta \in [x_{2k}, x_{2k+1}], \\ \zeta - (x_{2k} + 3h/2) & \text{pour } \zeta \in [x_{2k+1}, x_{2k+2}], \end{cases}$$

et la périodicité de  $f^{(1)}$  combinées à (21) nous donnent

$$e_{2j}^{(1)} - e_{2j+2}^{(1)} = \frac{2}{h}(-1)^j \left( -\sum_{k=0}^{j-1} + \sum_{k=j+1}^{N-1} \right) (-1)^k \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} q_k(\zeta) f^{(2)}(\zeta) d\zeta. \quad (23)$$

Avec le changement de variable  $\zeta = \xi + 2kh$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} |e_{2j}^{(1)} - e_{2j+2}^{(1)}| &\leq \frac{2}{h} \int_{x_0}^{x_2} |q_0(\xi)| \left| \left( -\sum_{k=0}^{j-1} + \sum_{k=j+1}^{N-1} \right) (-1)^k f^{(2)}(\xi + 2kh) \right| d\xi \\ &\leq \frac{2}{h} \operatorname{Var}(f^{(2)}) \int_{x_0}^{x_2} |q_0(\xi)| d\xi \\ &= h \operatorname{Var}(f^{(2)}). \end{aligned} \quad (24)$$

En combinant (20) et (24) nous obtenons

$$|e_{2j}^{(1)}| \leq 2h\omega_2(h) + \frac{h}{2} \operatorname{Var}(f^{(2)}). \quad (25)$$

Pour  $r = 3$ , en intégrant par partie (23), nous obtenons

$$e_{2j}^{(1)} - e_{2j+2}^{(1)} = \frac{2}{h}(-1)^j \left( -\sum_{k=0}^{j-1} + \sum_{k=j+1}^{N-1} \right) (-1)^{k+1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} Q_k(\zeta) f^{(3)}(\zeta) d\zeta$$

où

$$Q_k(\zeta) = \int_{x_{2k}}^{\zeta} q_k(\xi) d\xi.$$

Ainsi

$$|e_{2j}^{(1)} - e_{2j+2}^{(1)}| \leq \frac{2}{h} \operatorname{Var}(f^{(3)}) \int_{x_0}^{x_2} |Q_0(\zeta)| d\zeta = \frac{h^2}{3} \operatorname{Var}(f^{(3)})$$

et en combinant cette dernière inégalité avec (20) nous obtenons

$$|e_{2j}^{(1)}| \leq 2h^2 \|f^{(3)}\| + \frac{h^2}{6} \operatorname{Var}(f^{(3)}). \quad (26)$$

Finalement, en utilisant (17), (18), le théorème B, et (22), (25) et (26) nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème 2.** Soit  $f \in C_p^r[a, b]$ . Si  $s(x)$  est l'unique fonction spline quadratique définie par (12), (13) et (14) pour  $N$  impair, alors pour tout  $x \in [a, b]$  nous avons pour

- (i)  $r = 0$  :  $|s(x) - f(x)| \leq \omega_0(h) + \frac{1}{2} \text{Var}(f)$ ;
- (ii)  $r = 1, l = 0, 1$  :

$$|s^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \leq \left\{ \left[ 3\omega_1(h) + 2 \text{Var}(f^{(1)}) \right] \|D_1^{(l)}\| + C_{1l}^2 \omega_1\left(\frac{h}{2}\right) \right\} h^{1-l};$$

- (iii)  $r = 2, l = 0, 1, 2$  :

$$|s^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \leq \left\{ \left[ 2\omega_2(h) + \frac{1}{2} \text{Var}(f^{(2)}) \right] \|D_1^{(l)}\| + C_{2l}^2 \omega_2\left(\frac{h}{2}\right) \right\} h^{2-l};$$

- (iv)  $r = 3, l = 0, 1, 2$  :

$$|s^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \leq \left\{ \left[ 2\|f^{(3)}\| + \frac{1}{6} \text{Var}(f^{(3)}) \right] \|D_1^{(l)}\| + C_{3l}^2 \|f^{(3)}\| \right\} h^{3-l}.$$

(Notons que  $\|D_1^{(0)}\| = \frac{1}{2}$ ,  $\|D_1^{(1)}\| = 1$  et  $\|D_1^{(2)}\| = 1$ .)

*Remerciements.* La recherche du premier auteur est subventionnée en partie par le Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada et par le Ministère de l'Éducation du Québec (subvention FCAR).

**English extended abstract.** We analyze two interpolation processes using quadratic splines based on the values of a function and its first derivative on a given partition of the interval  $[a, b]$ .

For the first process, let  $N$  be a positive integer,  $h_1 = (b - a)/N$ , and consider the uniform knot set  $a = \zeta_0 < \dots < \zeta_j < \dots < \zeta_N = b$ ,  $\zeta_j = a + jh_1$  ( $j = 0, \dots, N$ ). Let  $f \in C^r[a, b]$  and consider the following data

$$f(\zeta_j) \quad j = 0, \dots, N,$$

and if  $r \geq 1$

$$f^{(1)}(\zeta_j) \quad j = 0, \dots, N.$$

In order to obtain a local interpolating process using a piecewise quadratic polynomial, we introduce a second sequence of uniform knots  $\{x_i\}_{i=0}^{2N}$  defined by

$$\begin{aligned} x_{2j} &= \zeta_j \text{ for } j = 0, \dots, N, \\ x_{2j+1} &= \frac{\zeta_j + \zeta_{j+1}}{2} \text{ for } j = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Let  $h = h_1/2$ , so that  $x_i = a + ih$  ( $i = 0, \dots, 2N$ ). We consider the following problem: find a quadratic spline defined on the partition  $\{x_i\}_{i=0}^{2N}$  of  $[a, b]$ , such that

- (i)  $s \in C^1[a, b]$ ,
- (ii)  $s$  is a quadratic polynomial on each subinterval

$$[x_i, x_{i+1}] \quad (i = 0, \dots, 2N-1), \quad (9)$$

and

(iii)

$$\begin{cases} s_{2j} = s(x_{2j}) = f(x_{2j}) = f_{2j} & \text{for } j = 0, \dots, N, \\ s_{2j}^{(1)} = s^{(1)}(x_{2j}) = \begin{cases} 0 & \text{if } r = 0 \\ f^{(1)}(x_{2j}) = f_{2j}^{(1)} & \text{if } r \geq 1 \end{cases} & \text{for } j = 0, \dots, N. \end{cases} \quad (10)$$

Under the conditions (8), (9), and (10) the quadratic spline is determined on  $[x_{2j}, x_{2j+2}]$  by the values given at  $x_{2j}$  and  $x_{2j+2}$ . Hence we have a local process. We establish the following error bounds.

**Theorem 1.** *Let  $f \in C^r[a, b]$ . If  $s(x)$  is the quadratic spline defined by (8), (9) and (10), then for any  $x \in [a, b]$  we have for*

(i)  $r = 0, 1, 2, l = 0, \dots, r$ :

$$|s^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \leq \left[ \left(1 + \frac{r}{2}\right) \frac{\|B_0^{(l)}\|}{r!} + C_{rl}^1 \right] h^{r-l} \omega_r(h),$$

(ii)  $r = 3, l = 0, 1, 2$ :

$$|s^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \leq \left[ \frac{5}{12} \|B_0^{(l)}\| \omega_3(h) + C_{3l}^1 \|f^{(3)}\| \right] h^{3-l}.$$

In the second problem we look for a quadratic spline defined on the uniform partition  $\{x_i\}_{i=0}^{2N}$  of the interval  $[a, b]$  such that

(i)  $s \in C^1[a, b]$ , (12)

(ii)  $s$  is a quadratic polynomial on each subinterval

$$[x_i, x_{i+1}] \quad (i = 0, \dots, 2N - 1), \quad (13)$$

and

$$(iii) \begin{cases} s_{2j} = f_{2j} & j = 0, \dots, N, \\ s_{2j+1}^{(1)} = \begin{cases} 0 & \text{if } r = 0 \\ f_{2j+1}^{(1)} & \text{if } r \geq 1, \end{cases} & j = 0, \dots, N - 1, \\ s_0^{(1)} = s_{2N}^{(1)} & \text{(the periodic case).} \end{cases} \quad (14)$$

Under the conditions (12), (13) and (14), the quadratic spline is well defined for  $N$  odd. For this problem we consider  $f \in C_p^r[a, b] = \{f \in C^r[a, b] \mid f^{(1)} \text{ is periodic for } l = 0, \dots, r\}$ . We have the following error bounds.

**Theorem 2.** *Let  $f \in C_p^r[a, b]$ . If  $s(x)$  is the quadratic spline defined by (12), (13) and (14) for  $N$  odd, then for any  $x \in [a, b]$  we have for*

(i)  $r = 0$ :  $|s(x) - f(x)| \leq \omega_0(h) + \frac{1}{2} \text{Var}(f)$ ,

(ii)  $r = 1, l = 0, 1$ :

$$|s^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \leq \left\{ \left[ 3\omega_1(h) + 2 \text{Var}(f^{(1)}) \right] \|D_1^{(l)}\| + C_{1l}^2 \omega_1\left(\frac{h}{2}\right) \right\} h^{1-l},$$

(iii)  $r = 2, l = 0, 1, 2$ :

$$|s^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \leq \left\{ \left[ 2\omega_2(h) + \frac{1}{2} \text{Var}(f^{(2)}) \right] \|D_1^{(l)}\| + C_{2l}^2 \omega_2\left(\frac{h}{2}\right) \right\} h^{2-l},$$

(iv)  $r = 3, l = 0, 1, 2$ :

$$|s^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \leq \left\{ \left[ 2\|f^{(3)}\| + \frac{1}{6} \text{Var}(f^{(3)}) \right] \|D_1^{(l)}\| + C_{3l}^2 \|f^{(3)}\| \right\} h^{3-l}.$$

(Remark:  $\|D_1^{(0)}\| = \frac{1}{2}$ ,  $\|D_1^{(1)}\| = 1$  and  $\|D_1^{(2)}\| = 1$ ).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [Dem] S. Demko, *Interpolation by quadratic splines*, J. Approx. Theory **23** (1978), 392–400.
- [DS] F. Dubeau and J. Savoie, *Periodic quadratic spline interpolation*, J. Approx. Theory **39** (1983), 77–88.
- [TK] M. N. El Tarazi and A. A. Karaballi, *On even-degree splines with application to quadratures*, J. Approx. Theory **60** (1990), 157–167.
- [KRV] W. J. Kammerer, G. W. Reddien and R. S. Varga, *Quadratic interpolatory splines*, Numer. Math. **22** (1974), 241–259.
- [Mar] M. J. Marsden, *Quadratic spline interpolation*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 903–906.
- [MPR] D. F. McAllister, E. Passow and J. A. Roulier, *Algorithms for computing shape preserving spline interpolations to data*, Math. Comp. **31** (1977), 717–725.
- [Mir] V. L. Miroshnichenko, *Exact error bounds for the periodic cubic and parabolic spline interpolation on the uniform mesh*, Math. Balkanica (N. S.) **2** (1988), 210–221.
- [Sch] L. L. Schumaker, *On shape preserving quadratic spline interpolation*, SIAM J. Numer. Anal. **20** (1983), 854–864.
- [Xie] S. Q. Xie, *Quadratic spline interpolation*, J. Approx. Theory **40** (1984), 66–80.

F. DUBEAU

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

FACULTÉ DES SCIENCES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

SHERBROOKE QC J1K 2R1

CANADA

E-MAIL: francois.dubeau@dm1.usherb.ca

R. GERVAIS

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCES

ROYAL MILITARY COLLEGE OF CANADA

PO BOX 17000 STN FORCES

KINGSTON (ONTARIO) K7K 7B4

CANADA

E-MAIL: gervais\_r@banyan.rmc.ca