

UNITÉS DE CERTAINS CORPS DE NOMBRES IMAGINAIRES ET ABÉLIENS SUR $\mathbb{Q}$

ABDELMALEK AZIZI

RÉSUMÉ. Soit $\mathbf{K}$ une extension finie, imaginaire et abélienne sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbf{K}_0$ le sous-corps réel maximal de $\mathbf{K}$. Nous donnons un critère déterminant un système fondamental d'unités de $\mathbf{K}$ en utilisant un système fondamental d'unités de $\mathbf{K}_0$.

ABSTRACT. Let $\mathbf{K}$ be an imaginary abelian number field and $\mathbf{K}_0$ the maximal real subfield of $\mathbf{K}$. We give a criterion which determines a fundamental system of units of $\mathbf{K}$ by using a fundamental system of units of $\mathbf{K}_0$.

1. Introduction. Soient $\mathbf{K}$ une extension finie, imaginaire et abélienne sur $\mathbb{Q}$, $\mathbf{K}_0$ le sous-corps réel maximal de $\mathbf{K}$, $\mathbf{E}$ (resp. $\mathbf{E}_0$) le groupe des unités de $\mathbf{K}$ (resp. $\mathbf{K}_0$), $\mathbf{W}$ le groupe des racines de l'unité contenues dans $\mathbf{K}$, w le cardinal de $\mathbf{W}$, 2^{j_0} la plus grande puissance de 2 divisant w , ξ une racine primitive 2^{j_0} -ième de l'unité, $\mathbf{L} = \mathbf{K}(\sqrt{\xi})$ et $\mathbf{L}_0$ son sous-corps réel maximal.

Il est connu que l'indice du groupe $\mathbf{WE}_0$ dans le groupe des unités de $\mathbf{K}$ est égal à 1 ou à 2. Le théorème suivant (voir [2], § 21, Satz 15), nous donne une condition nécessaire et suffisante pour que cet indice soit égal à 2 :

Théorème 1. *Soit Q l'indice de $\mathbf{WE}_0$ dans $\mathbf{E}$, alors on a :*

- (1) $Q = 1$ ou $Q = 2$;
- (2) $Q = 2 \Leftrightarrow \exists \varepsilon \in \mathbf{E}_0$ tel que $\mathbf{L}_0 = \mathbf{K}_0(\sqrt{\varepsilon})$.

Étant donné un système fondamental d'unités (SFU) de $\mathbf{K}_0$, on s'intéresse à trouver un système fondamental d'unités de $\mathbf{K}$. En utilisant le théorème précédent, on donne un moyen pratique pour déterminer l'indice Q ainsi qu'un système fondamental d'unités de $\mathbf{K}$. On donne aussi quelques applications et on trouvera d'autres dans la thèse de l'auteur [1].

2. Unité d'un corps de nombres abélien $\mathbf{K}_0(\sqrt{-\beta})$. Soient $\mathbf{K}_0$ un corps de nombres réels, β un nombre positif de $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\sqrt{-\beta})$ une extension quadratique de $\mathbf{K}_0$, abélienne et finie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbf{I} = \{0, 1\}$. Soient j le plus grand entier tel qu'il existe une racine primitive 2^j -e de l'unité ξ appartenant à $\mathbf{K}$, $\mathbf{L} = \mathbf{K}(\sqrt{\xi})$, $\mathbf{L}_0$ le sous-corps réel maximal de $\mathbf{L}$, $\mathbf{E}$ le groupe des unités de $\mathbf{K}$, $\mathbf{E}_0$ le groupe des unités de $\mathbf{K}_0$ et $\mathbf{W}$ le groupe des racines de l'unité appartenant à $\mathbf{K}_0$.

Reçu le 26 novembre 1997 et, sous forme définitive, le 1er juillet 1998.

On sait, d'après le théorème 1, que $Q = [E : WE_0]$ est égal à 1 ou 2 et Q est égal à 2 si et seulement s'il existe une unité ε dans $\mathbf{K}_0$ tel que $L_0 = \mathbf{K}_0(\sqrt{\varepsilon})$.

D'autre part, comme il est bien connu, pour tout $j \geq 2$ il existe deux nombres réels μ_j et λ_j définis par récurrence :

$$\mu_2 = 0, \lambda_2 = 2, \mu_3 = \lambda_3 = \sqrt{2}, \mu_j = \sqrt{2 + \mu_{j-1}}, \lambda_j = \sqrt{2 - \mu_{j-1}}, \mu_j \lambda_j = \lambda_{j-1}.$$

Le nombre $\mu_j + \lambda_j \sqrt{-1} = \mu_j + \lambda_j i$ est une racine primitive 2^j -e de l'unité; c'est elle que l'on choisit comme ξ . De plus on a $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(i, \mu_j) = \mathbb{Q}(i, \lambda_j)$ et $\mathbb{Q}(\mu_j) = \mathbb{Q}(\lambda_j)$. Le corps $\mathbb{Q}(\mu_j)$ est le sous-corps réel maximal de $\mathbb{Q}(\xi)$ et le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \mu_j})$ est le sous-corps réel maximal de $\mathbb{Q}(\sqrt{\xi})$. Ainsi, on a $L_0 = \mathbf{K}_0(\sqrt{2 + \mu_j})$.

Remarque Le nombre $\mu_{j+1} = \sqrt{2 + \mu_j}$ n'appartient pas à $\mathbf{K}_0$ car sinon λ_{j+1} appartiendrait aussi à $\mathbf{K}_0$ ($\mu_{j+1} \lambda_{j+1} = \lambda_j \in \mathbf{K}_0$) et comme pour $j \geq 2$, le nombre $i \in \mathbf{K}_0$, alors $\sqrt{\xi} = (\mu_{j+1} + \lambda_{j+1} i)/2 \in \mathbf{K}_0$. Mais ce n'est pas le cas.

Proposition 2. Soient $\mathbf{K}_0$ un corps de nombres réels, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\sqrt{-1})$ une extension quadratique de $\mathbf{K}_0$, abélienne et finie sur $\mathbb{Q}$ et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ un SFU de $\mathbf{K}_0$ (dont les unités sont toutes positives). Alors on a:

- (1) S'il existe une unité ε de $\mathbf{K}_0$ de la forme $\varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2} \dots \varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}} \varepsilon_r$ (à une permutation près), où les $j_k \in \mathbf{I}$, telle que $(2 + \mu_j)\varepsilon$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{\xi\varepsilon}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.
- (2) Dans le cas contraire, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \varepsilon_r\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.

Preuve. i) On suppose que $Q = 2$. Donc il existe une unité ε' de $\mathbf{K}_0$ telle que $L_0 = \mathbf{K}_0(\sqrt{2 + \mu_j}) = \mathbf{K}_0(\sqrt{\varepsilon'})$. Ainsi, il existe un nombre α de $\mathbf{K}_0$ tel que

$$2 + \mu_j = \alpha^2 \varepsilon'.$$

Cette dernière équation est équivalente à

$$(-1)^t \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2} \dots \varepsilon_r^{j_r} (2 + \mu_j) = \alpha'^2 \quad \text{où } t, j_k \in \mathbf{I} \text{ et } \alpha' \in \mathbf{K}_0. \quad (2.1)$$

Comme les unités ε_j sont positives, l'entier t est nul. De plus, les entiers j_k ne peuvent pas être tous nuls, car sinon $\sqrt{2 + \mu_j}$ appartiendrait à $\mathbf{K}_0$ et donc $\sqrt{\xi} = (\sqrt{2 + \mu_j} + i\sqrt{2 - \mu_j})/2$ appartiendrait à $\mathbf{K}$ (d'après la remarque précédente). Mais ce n'est pas le cas. On prend $j_r = 1$ (sinon on change l'ordre des unités) et on pose $\varepsilon = \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2} \dots \varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}} \varepsilon_r$. Alors on a:

$$\sqrt{\xi\varepsilon} = \sqrt{\xi}\sqrt{\varepsilon} = (\sqrt{(2 + \mu_j)\varepsilon} + i\sqrt{(2 - \mu_j)\varepsilon})/2.$$

D'autre part, puisque $\sqrt{2 + \mu_j}\sqrt{2 - \mu_j} = \sqrt{2 - \mu_{j-1}} = \lambda_j \in \mathbf{K}_0$ et $\sqrt{(2 + \mu_j)\varepsilon}$ appartient aussi à $\mathbf{K}_0$ (d'après l'équation (2.1)), alors $\sqrt{(2 - \mu_j)\varepsilon}$ appartient à $\mathbf{K}_0$. Ainsi, $\sqrt{\xi\varepsilon}$ appartient à $\mathbf{K}$ (car $i \in \mathbf{K}$). L'unité $\sqrt{\xi\varepsilon}$ n'appartient pas à WE_0 , car sinon, il existerait $\xi' \in \mathbf{W}$ et $\mu \in E_0$ tels que $\xi\varepsilon = \xi'^2 \mu^2$. Donc $\xi \xi'^{-2} = \mu^2 \varepsilon^{-1}$ serait une racine de l'unité réelle et positive. D'où $\xi \xi'^{-2} = 1$ et donc $\sqrt{\xi} \in \mathbf{K}$. Mais ceci contredit le fait que j est le plus grand entier tel qu'il existe une racine primitive 2^j -e de l'unité dans $\mathbf{K}$. Il vient donc que $\sqrt{\xi\varepsilon}$ n'appartient pas à WE_0 .

Le sous-groupe $\mathbf{E}'$ de $\mathbf{E}$ engendré par $\mathbf{W}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}$ et $\sqrt{\xi\varepsilon}$ contient le groupe $\mathbf{WE}_0$ et il lui est différent. Comme l'indice Q est égal à 2, alors $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ et

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{\xi\varepsilon}\}$$

est un SFU de $\mathbf{K}$.

ii) Si $Q = 1$, alors $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$ est aussi un SFU de $\mathbf{K}$. $\square$

Proposition 3. Soient $\mathbf{K}_0$ un corps de nombres, abélien réel et β un entier algébrique de $\mathbf{K}_0$, positif, sans facteurs carrés. On suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\sqrt{-\beta})$ est une extension quadratique de $\mathbf{K}_0$, abélienne sur $\mathbb{Q}$ et que $i = \sqrt{-1} = \xi_4$ n'appartient pas à $\mathbf{K}$. Soit $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ un SFU de $\mathbf{K}_0$. On choisit, sans restreindre la généralité, les unités ε_j positives. Alors on a :

- (1) S'il existe une unité de $\mathbf{K}_0$ de la forme $\varepsilon = \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2} \dots \varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}} \varepsilon_r$ (à une permutation près), où les $j_k \in \mathbf{I}$, telle que $\beta\varepsilon$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{-\varepsilon}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.
- (2) Dans le cas contraire $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \varepsilon_r\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.

Preuve. La condition $i = \sqrt{-1} = \xi_4$ n'est pas dans $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\sqrt{-\beta})$ est équivalente à la condition β n'est pas un carré dans $\mathbf{K}_0$. L'entier $j = 1$ est le plus grand entier tel qu'il existe une racine primitive 2^j -ième de l'unité ξ appartenant à $\mathbf{K}$. Soient $\mathbf{L} = \mathbf{K}(\sqrt{\xi}) = \mathbf{K}(\sqrt{-1})$ et $\mathbf{L}_0$ le sous-corps réel maximal de $\mathbf{L}$. L'indice Q est égal à 2 si et seulement s'il existe une unité ε de $\mathbf{K}_0$ telle que $\mathbf{L}_0 = \mathbf{K}_0(\sqrt{\varepsilon})$. Mais $\mathbf{L} = \mathbf{K}(\sqrt{-1}) = \mathbf{K}_0(\sqrt{\beta}, i)$; donc $\mathbf{L}_0 = \mathbf{K}_0(\sqrt{\beta})$. Ainsi $Q = 2$ si et seulement si $\beta\varepsilon$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$.

On suppose que $Q = 2$; alors il existe α dans $\mathbf{K}_0$ et une unité ε de la forme $(-1)^t \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2} \dots \varepsilon_r^{j_r}$, avec $t, j_k \in \mathbf{I}$, tels que

$$\beta\varepsilon = \beta(-1)^t \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2} \dots \varepsilon_r^{j_r} = \alpha^2.$$

Comme les ε_j sont positives, alors $t = 0$. Les j_k ne peuvent pas être tous nuls, car sinon $\sqrt{\beta}$ appartiendrait à $\mathbf{K}_0$. On suppose que j_r est l'un des j_k qui sont égaux à 1. On a $\sqrt{\beta\varepsilon} \in \mathbf{K}_0$ où $\varepsilon = \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2} \dots \varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}} \varepsilon_r$.

Comme $\sqrt{-\beta} \in \mathbf{K}$, alors $\sqrt{-\varepsilon} \in \mathbf{K}$. L'unité $\sqrt{-\varepsilon}$ n'appartient pas à $\mathbf{WE}_0$, car sinon i appartiendrait à $\mathbf{K}$, ce qui n'est pas le cas. Le sous-groupe E' de E , engendré par $\mathbf{W}$ et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{-\varepsilon}\}$, contient le groupe $\mathbf{WE}_0$ et il lui est différent. Comme $Q = 2$, alors $E' = E$ et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{-\varepsilon}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.

Dans le cas où $Q = 1$, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$. $\square$

Remarque. Les propositions 1 et 2 peuvent s'appliquer en particulier à un corps cyclotomique $\mathbf{K}$ dont un SFU de son sous-corps réel maximal est connu. En effet, soient n un entier naturel (≥ 3), ξ une racine primitive n -ième de l'unité, $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(\xi)$ et $\mathbf{K}_0$ son sous-corps réel maximal; alors il existe θ tel que :

$$\xi = \sin(\theta) + i \cos(\theta), \mathbf{K}_0 = \mathbb{Q}(\sin(\theta)) \text{ et } \mathbf{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-\beta}) \text{ avec } \beta = 1 - \sin(\theta)^2.$$

Ainsi, le corps $\mathbf{K}$ vérifie les hypothèses de la proposition 1 ou bien les hypothèses de la proposition 2.

Détermination d'un SFU de certains corps de la forme $\mathbf{K}_0(\sqrt{-\beta})$. Soient $\mathbf{K}_0$ un corps de nombres réels et β un entier de $\mathbf{K}_0$ positif et sans facteurs carrés tels que $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\sqrt{-\beta})$ est une extension abélienne finie de $\mathbb{Q}$. Si un SFU de $\mathbf{K}_0$ est connu, alors les deux propositions précédentes constituent une méthode pour déterminer un SFU de $\mathbf{K}$. En particulier, si $\mathbf{K}_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \sqrt{n_2}, \dots, \sqrt{n_t})$ où les $n_j \in \mathbb{N}^+ = \mathbb{N} - \{0\}$ et β est un entier de $\mathbf{K}_0$ positif et sans facteurs carrés, on détermine un SFU de $\mathbf{K}$ comme suit:

1^{ère} étape: *Détermination d'un SFU de $\mathbf{K}_0$*

On suppose que t est supérieur à 2. Soit σ_1 et σ_2 deux éléments distincts du groupe de Galois de $\mathbf{K}_0$ sur $\mathbb{Q}$, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ et $\mathbf{K}_3$ les sous-corps de $\mathbf{K}_0$ invariants respectivement par σ_1 , σ_2 et $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$, $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ les groupes des unités correspondant respectivement à $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ et $\mathbf{K}_3$ et ε une unité de $\mathbf{K}_0$, alors on a

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \varepsilon \varepsilon^{\sigma_1} \varepsilon \varepsilon^{\sigma_2} (\varepsilon^{\sigma_1} \varepsilon^{\sigma_2})^{-1}, \\ \varepsilon \varepsilon^{\sigma_1} &\in \mathbf{E}_1, \varepsilon \varepsilon^{\sigma_2} \in \mathbf{E}_2 \text{ et } \varepsilon^{\sigma_1} \varepsilon^{\sigma_2} \in \mathbf{E}_3. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le groupe des unités de $\mathbf{K}_0$ est engendré par les éléments des trois systèmes fondamentaux des unités de $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ et $\mathbf{K}_3$ en plus des racines carrées de ces éléments et de leurs produits appartenant à $\mathbf{K}_0$.

Dans [5], H. Wada donne un algorithme qui transforme la propriété d'être un carré dans $\mathbf{K}_0$ en une propriété semblable dans le corps $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2 \cap \mathbf{K}_3$. Ceci permet, étape par étape, de déterminer un SFU de $\mathbf{K}_0$.

2^e étape: *Détermination d'un SFU de $\mathbf{K}$*

Soit $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$ un SFU de $\mathbf{K}_0$ dont toutes les unités sont positives.

(1) Cas où $\beta = 1$.

- a) Déterminer le plus grand entier j_0 tel qu'il existe une racine primitive 2^{j_0} -e de l'unité ξ appartenant à $\mathbf{K}$. Dans ce cas on aura $\sqrt{\xi} = (\sqrt{2 + \mu_{j_0}} + i\sqrt{2 - \mu_{j_0}})/2$.
- b) Déterminer s'il existe une unité ε de $\mathbf{K}_0$ de la forme $\varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2} \dots \varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}} \varepsilon_r$, avec les $j_k \in \mathbf{I}$, telle que $(2 + \mu_{j_0}) \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2} \dots \varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}} \varepsilon_r$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$. Dans le cas où la réponse pour b) est oui, alors un SFU de $\mathbf{K}$ est $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{\xi \varepsilon}\}$. Autrement $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.

(2) Cas où $\beta \neq 1$.

On suppose de plus que $\sqrt{\beta} \notin \mathbf{K}_0$, sinon on se ramène au cas $\beta = 1$. Le seul point à régler, dans ce cas, est le suivant: Existe-t-il une unité ε de la forme $\varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2} \dots \varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}} \varepsilon_r$ avec les $j_k \in \mathbf{I}$ telle que $\beta \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2} \dots \varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}} \varepsilon_r$ soit un carré dans $\mathbf{K}_0$? Si la réponse est oui, alors un SFU de $\mathbf{K}$ est $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{-\varepsilon}\}$. Dans le cas contraire, $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.

Remarques

(1) Ce procédé s'applique en particulier à un corps de la forme

$$\mathbf{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_t}, \sqrt{-d_1}, \dots, \sqrt{-d_s}),$$

où les n_j et les d_j sont des entiers naturels. En effet, on a

$$\mathbf{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_t}, \sqrt{d_1 d_2}, \dots, \sqrt{d_1 d_s})(\sqrt{-d_1}).$$

Ainsi, on peut appliquer notre méthode.

- (2) Cette méthode constitue une amélioration de l'algorithme de Wada. En effet, elle réduit l'utilisation de l'algorithme de Wada uniquement au sous-corps réel maximal $\mathbf{K}_0$ de $\mathbf{K}$. Ceci permet d'écarter certains cas au cours de la recherche d'un SFU de $\mathbf{K}_0$ en utilisant des normes bien choisies.

3. Applications.

- (1) SFU de $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés.

Soit $\varepsilon_0 = s + t\sqrt{d}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

i) Si ε_0 est de norme -1 , alors $\{\varepsilon_0\}$ est un SFU de $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$. En effet, on a $\{\varepsilon_0\}$ est un SFU du sous-corps réel maximal de $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$. Un SFU de $\mathbf{K}$ est $\{\varepsilon_0\}$ ou bien $\{\sqrt{i}\varepsilon\}$ avec $\varepsilon = \varepsilon_0$. Si $\{\sqrt{i}\varepsilon\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$ et comme $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$, alors l'élément $2\varepsilon_0$ est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, le sous-corps réel maximal de $\mathbf{K}$; mais il faudrait pour cela que sa norme sur $\mathbb{Q}$ soit un carré, ce qui n'est pas possible, puisque ε_0 est de norme -1 . D'où $\{\varepsilon_0\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.

ii) Si ε_0 est de norme 1 , alors $\{\sqrt{i}\varepsilon_0\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$ si et seulement si $s \pm 1$ est un carré dans $\mathbb{N}$ (i.e. si et seulement si $s+1$ ou $s-1$ est un carré dans $\mathbb{N}$). Dans le cas contraire, $\{\varepsilon_0\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_0$. En effet, le problème revient à voir si $2\varepsilon_0$ est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ou non. Or

$$2\varepsilon_0 = (a_0 + a_1\sqrt{d})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2s = a_0^2 + da_1^2, \\ 2t = 2a_0a_1. \end{cases}$$

Comme $s^2 - dt^2 = 1$, alors le dernier système est résoluble si et seulement si $s \pm 1$ est un carré dans $\mathbb{N}$. Un exemple numérique pour ce cas est le corps $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/12}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$. On a que $\varepsilon_0 = 2 + \sqrt{3}$. Donc $s = 2$ et $s - 1 = 1$ est un carré dans $\mathbb{N}$. Ainsi, $\{\sqrt{i}\varepsilon_0\}$ est un SFU de $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ qui est un corps cyclotomique.

- (2) SFU de $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{-d})$, où $n, d \in \mathbb{N}^\times$ et où d est différent de n et de 1 .

Soit $\varepsilon_0 = s + t\sqrt{n}$, l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$. Dans ce cas, le problème de déterminer un SFU de $\mathbf{K}$ revient à savoir quand est-ce que $d\varepsilon_0$ est un carré dans $\mathbb{N}$. De la même façon que dans le cas $d = 1$, on a :

i) Si ε_0 est de norme -1 , alors $\{\varepsilon_0\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.

ii) Si ε_0 est de norme 1 , alors $\{\sqrt{-d}\varepsilon_0\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_0$ si et seulement si $2d(s \pm 1)$ est un carré dans $\mathbb{N}$. Dans le cas où $2d(s \pm 1)$ n'est pas un carré dans $\mathbb{N}$, $\{\varepsilon_0\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.

- (3) SFU du corps cyclotomique $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i)$.

Soit $\varepsilon_0 = 1 + \sqrt{2}$, $\varepsilon_1 = 2 + \sqrt{3}$ et $\varepsilon_2 = 5 + 2\sqrt{6}$, alors on a $\sqrt{\varepsilon_1} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/2$, $\sqrt{\varepsilon_2} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ et $\{\varepsilon_0, \sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_2}\}$ est un SFU de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Comme $\sqrt{2} \in \mathbf{K}$, d'après la Proposition 2, le problème de déterminer un SFU de $\mathbf{K}$ revient à savoir s'il existe une unité de la forme $\varepsilon_1'^{j_1} \varepsilon_2'^{j_2} \varepsilon_3'$ telle que $(2 + \sqrt{2})\varepsilon_1'^{j_1} \varepsilon_2'^{j_2} \varepsilon_3'$ soit un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, où $\{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'\} = \{\varepsilon_0, \sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_2}\}$. D'après la preuve de la Proposition 2, $\sqrt{\xi_3\varepsilon}$ appartient à $\mathbf{K}$ si et seulement si

$((2 + \sqrt{2})\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ appartient à $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, où $\sqrt{\xi_3} = (\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}})/2$ et ε est une unité de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Comme on a

$$\sqrt{\xi_3 \sqrt{\varepsilon_2} \sqrt{\varepsilon_1} \varepsilon_0} = \frac{4 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6} + 2i + i\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{4} \in \mathbf{K},$$

alors $(2 + \sqrt{2})\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Ainsi $\{\varepsilon_0, \sqrt{\varepsilon_1}, (\xi_3 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$. Les résultats qu'on vient de trouver sont les mêmes que ceux donnés par Wada dans [5].

- (4) SFU de $\mathbf{K}_{n,m,d} = \mathbb{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m}, \sqrt{-d})$, $n = 2$, $m = 145$ et $d = 5$.

Les unités fondamentales des corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{145})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{290})$ sont respectivement:

$$\varepsilon_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad \varepsilon_2 = 12 + \sqrt{145} \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = 17 + \sqrt{290}.$$

D'après [1], $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un SFU de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{145})$. Comme $5\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{145})$, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{-\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_{2,145,5} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{145}, \sqrt{-5})$. De plus on a

$$\sqrt{5\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} = 25 + \frac{35}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{145} + \frac{3}{2}\sqrt{290}.$$

D'où

$$\sqrt{-\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} = 5\sqrt{-5} + \frac{7}{2}\sqrt{-10} + 2\sqrt{-29} + \frac{3}{2}\sqrt{-58}.$$

Ainsi un SFU de $\mathbf{K}_{2,145,5}$ est parfaitement déterminé.

Remarque Une partie de l'application 1, se trouve déjà dans le travail de Kuroda [4, prop. 12]. La présentation adoptée ici nous paraît plus pratique.

English extended abstract. Let $\mathbf{K}$ be an imaginary abelian finite extension over $\mathbb{Q}$, $\mathbf{K}_0$ the maximal real subfield of $\mathbf{K}$, $\mathbf{E}$ (resp. $\mathbf{E}_0$) the group of units of $\mathbf{K}$ (resp. $\mathbf{K}_0$), $\mathbf{W}$ the group of roots of unity contained in $\mathbf{K}$, w the cardinality of $\mathbf{W}$, 2^j the greatest power of 2 dividing w , and ξ a primitive 2^j -th root of unity. It is always possible to take $\xi = \mu_j + \lambda_j \sqrt{-1} = \mu_j + \lambda_j i$, where

$$\mu_2 = 0, \lambda_2 = 2, \mu_3 = \lambda_3 \sqrt{2}, \mu_j = \sqrt{2 + \mu_{j-1}} = \sqrt{2 - \mu_{j-1}}.$$

It is known that the index of the group $\mathbf{WE}_0$ in the group of units of $\mathbf{W}$ is equal to 1 or 2. In the first case, a fundamental system of units (FSU) of $\mathbf{K}_0$ is also a FSU of $\mathbf{K}$, while the two systems differ in the second case. By distinguishing the case $i = \sqrt{-1} \in \mathbf{K}$ from the case $i = \sqrt{-1} \notin \mathbf{K}$, we prove:

First case (Proposition 2). Let $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\sqrt{-1})$ and $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ be a FSU of $\mathbf{K}_0$ (whose units are all positive). Then,

1. If there exists a unit ε of $\mathbf{K}_0$ of the form $\varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2} \dots \varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}} \varepsilon_r$, where the $j_k \in \mathbf{I} = \{0, 1\}$, such that $(2 + \mu_j)\varepsilon$ is a square in $\mathbf{K}_0$, then $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{\xi \varepsilon}\}$ is a FSU of $\mathbf{K}$.
2. In the contrary case, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ is a FSU of $\mathbf{K}$.

Second case (Proposition 3). *Let β be a positive, square-free algebraic integer of $\mathbf{K}_0$, and $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\sqrt{-\beta})$ be a quadratic extension of $\mathbf{K}_0$, abelian over $\mathbb{Q}$, such that $i = \sqrt{-1}$ does not belong to $\mathbf{K}$. Let $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ be a FSU of $\mathbf{K}_0$. Then,*

1. *If there exists a unit ε of $\mathbf{K}_0$ of the form $\varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2} \dots \varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}} \varepsilon_r$, where the $j_k \in \mathbf{I} = \{0, 1\}$, such that $\beta\varepsilon$ is a square in $\mathbf{K}_0$, then $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{-\varepsilon}\}$ is a FSU of $\mathbf{K}$.*
2. *In the contrary case, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ is a FSU of $\mathbf{K}$.*

At the end of the work, we apply these results on fields of degree 4 over $\mathbb{Q}$. One can find in [1] other applications of these results on fields of degree 8 over $\mathbb{Q}$.

REFERENCES

1. A. Azizi, *Capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$* , Thèse de Doctorat, Université Laval, Québec, 1993.
2. H. Hasse, *Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper*, (Reprint of the 1952 edition), Akademie-Verlag, Berlin, 1985.
3. T. Kubota, *Über den bzyklischen biquadratischen Zahlkörper*, Nagoya Math. J. **10** (1956), 65–85.
4. S. Kuroda, *Über den Dirichletschen Zahlkörper*, J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo. Sect. I. **IV** (1943), 383–406.
5. H. Wada, *On the Class Number and the Unit Group of Certain Algebraic Number Fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **13** (1966), 201–209.

A. AZIZI

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

FACULTÉ DES SCIENCES

UNIVERSITÉ MOHAMMED I

Oujda - MAROC