

HOMOMORPHISMES DU GRAPHE DE PETERSEN ET INÉGALITÉS COMBINATOIRES

CLAUDE TARDIF

RÉSUMÉ. On utilise les homomorphismes de graphes et les propriétés chromatiques du graphe de Petersen pour démontrer quelques inégalités portant sur les familles d'ensembles. Ces inégalités sont ensuite utilisées pour trouver des contre-exemples à la conjecture de Albertson et Collins sur la monotonie de la suite de différences chromatiques d'un graphe transitif.

ABSTRACT. We use graph homomorphisms and the chromatic properties of the Petersen graph to prove some inequalities on systems of sets. These inequalities are then used to find counterexamples to a conjecture of Albertson and Collins on the monotonicity of the chromatic difference sequence of a vertex-transitive graph.

1. Introduction. Le lemme de Albertson et Collins [2] présente une relation entre certains paramètres numériques associés aux coloriage de graphes et certaines conditions nécessaires à l'existence d'homomorphismes entre deux graphes. Son appellation de «no-homomorphism lemma» suggère un emploi unilatéral de cette causalité. On se propose ici d'en explorer l'application réciproque, soit l'emploi d'homomorphismes dans le but de borner ces paramètres, majorations qui peuvent parfois s'interpréter comme inégalités d'intérêt plus général. On donne les exemples suivants:

Théorème 1. [3] *Soit r, n deux entiers positifs tels que $r < n/2$. Soit $\mathcal{F}$ une famille de r -sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ non disjoints deux à deux. Alors*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{r-1}{n-1}.$$

Théorème 2. *Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux familles de $2k$ -sous-ensembles de $\{1, \dots, 5k\}$ non disjoints deux à deux. Alors*

$$|\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2| < \frac{7}{10} \cdot \binom{2k}{5k}.$$

Le théorème 1 est un résultat classique de Erdős, Ko et Rado. Notons que pour $n = 2r + 1$, ce résultat peut se déduire simplement de l'existence d'un n -cycle dans un

Reçu le 3 septembre 1996 et, sous forme définitive, le 27 mars 1997.

graphe particulier. Le théorème 2 est nouveau à notre connaissance. D'une portée moins générale, son intérêt réside principalement dans l'emploi d'une inégalité stricte. On le présente en vue d'une application particulière, mais aussi parce que sa démonstration met plus en évidence le rôle de la théorie des graphes dans ce type d'argumentation. Les théorèmes 1 et 2 admettent une formulation équivalente en termes d'ensembles indépendants dans les graphes de Kneser. Cette classe de graphes est définie à la section 3, qui contient la démonstration des théorèmes 1 et 2. Dans cette veine, on peut également citer les travaux de Poljak et Tuza [8], qui portent sur les sous-graphes partiels de graphes de Kneser, alors que nos travaux portent sur leurs sous-graphes induits. Le graphe de Petersen bien connu est le graphe de Kneser $K(2, 5)$, et certaines propriétés spécifiques des coloriage de ce graphe jouent un rôle primordial dans la démonstration du théorème 2. La dernière section utilise le théorème 2 et les coloriage du graphe de Petersen pour la construction de graphes transitifs ayant une suite de différences chromatiques non monotone, dont l'impossibilité était conjecturée par Albertson et Collins.

2. Le lemme de Albertson et Collins. Les graphes utilisés ici sont simples, finis et sans boucles. $V(G)$ et $E(G)$ dénotent respectivement les ensembles de sommets et d'arêtes d'un graphe G . Un *homomorphisme* entre deux graphes G et H est une fonction $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ telle que si $[u, v] \in E(G)$, alors $[\phi(u), \phi(v)] \in E(H)$. On dit que H est *homomorphe* à G (noté $G \rightarrow H$) s'il existe un homomorphisme de G dans H . En particulier, un *automorphisme* est un homomorphisme bijectif $\phi : G \rightarrow G$. Un graphe est dit *transitif* si son groupe d'automorphismes agit transitivement sur ses sommets. Soit G un graphe, et un entier k . On dénote $\alpha_k(G)$ la cardinalité maximale d'un sous-graphe induit k -colorable de G . En particulier, $\alpha_1(G)$ est le nombre de stabilité de G . Le lemme de Albertson et Collins qui suit fait appel au paramètre normalisé $\mu_k(G) = \alpha_k(G)/|V(G)|$.

Lemme 3. [2] *Soit H un graphe transitif. Alors pour tout graphe G tel que $G \rightarrow H$ et pour tout entier k , on a $\mu_k(G) \geq \mu_k(H)$.*

De façon équivalente, si H est transitif et $\mu_k(G) < \mu_k(H)$, alors il n'existe aucun homomorphisme de G dans H . Le nom de «no-homomorphism lemma» donné à ce résultat provient de cette interprétation. La situation critique est celle où les paramètres $\mu_k(G)$ et $\mu_k(H)$ sont égaux. On ne peut alors rien conclure par le lemme 3, mais le résultat suivant montre que cette situation apporte une restriction sur la structure des homomorphismes qui peuvent exister entre G et H .

Lemme 4. *Soit G, H deux graphes tels que H est transitif et $\mu_k(G) = \mu_k(H)$ pour un certain entier k . Alors pour tout homomorphisme $\phi : G \rightarrow H$, on a $|\phi^{-1}(H')| = \alpha_k(G)$ pour tout sous-graphe induit k -colorable H' de H tel que $|V(H')| = \alpha_k(H)$.*

Démonstration. Clairement, pour tout sous-graphe induit k -colorable H' de H , le graphe $\phi^{-1}(H')$ est k -colorable, donc $|\phi^{-1}(H')| \leq \alpha_k(G)$. Notons $\mathcal{C}_k(H)$ l'ensemble des sous-graphes k -colorables de H de cardinalité $\alpha_k(H)$. Par transitivité de H , chaque sommet u de H appartient au même nombre, disons m , de membres de $\mathcal{C}_k(H)$. Par un argument de comptage élémentaire, on a alors

$$|V(H)| \cdot m = \alpha_k(H) \cdot |\mathcal{C}_k(H)|.$$

D'autre part, pour tout $u \in V(G)$, $\phi(u)$ est dans m membres de $\mathcal{C}_k(G)$, donc

$$|V(G)| \cdot m = \sum_{H' \in \mathcal{C}_k(H)} |\phi^{-1}(H')|.$$

En majorant terme à terme, on obtient

$$\sum_{H' \in \mathcal{C}_k(H)} |\phi^{-1}(H')| \leq |\mathcal{C}_k(H)| \cdot \alpha_k(G).$$

Or, puisque $\mu_k(G) = \mu_k(H)$, on a $|V(G)| \cdot m = |\mathcal{C}_k(H)| \cdot \alpha_k(G)$, donc $|\phi^{-1}(H')| = \alpha_k(G)$ pour tout $H' \in \mathcal{C}_k(H)$. $\square$

3. Démonstration des théorèmes 1 et 2. Soit deux entiers r et n tels que $r < n/2$. Le graphe de Kneser $K(r, n)$ est le graphe dont les sommets sont les r -sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ et les arêtes sont les paires $[A, B]$ telles que $A \cap B = \emptyset$. En particulier, le graphe $K(2, 5)$ est le graphe de Petersen bien connu. Les indépendants de $K(r, n)$ sont les familles de r -sous-ensembles non disjoints deux à deux, et le théorème 1 porte sur le nombre de stabilité de $K(r, n)$. Le lemme 3 suggère de trouver un graphe auquel $K(r, n)$ est homomorphe, et dont le nombre de stabilité est facile à calculer. Dotons l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ de sa structure naturelle de groupe cyclique. On considère le graphe circulant $G(r, n)$ défini en posant

$$V(G(r, n)) = \{1, \dots, n\}$$

$$E(G(r, n)) = \{[u, v] : u - v \in \{r, \dots, n - r\}\}.$$

En particulier, $G(r, 2r+1)$ est un $(2r+1)$ -cycle. On vérifie facilement que $\alpha_1(G(r, n)) = r$. D'abord l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ est un indépendant de cardinalité r ; ensuite, tout indépendant I de G contenant un sommet u est contenu dans $\{u - r + 1, \dots, u + r - 1\}$ et ne peut comprendre qu'un sommet de chaque paire $\{u - r + i, u + i\}$ pour $i = 1, \dots, r - 1$, donc $|I| \leq r$. On définit une fonction $\phi : G(r, n) \rightarrow K(r, n)$ en posant

$$\phi(u) = \{u, u + 1, \dots, u + r - 1\}.$$

Clairement, ϕ est un homomorphisme. Par suite, puisque $K(r, n)$ est transitif (le groupe symétrique sur $\{1, \dots, n\}$ agit transitivement sur $K(r, n)$), on a par le lemme 3

$$\frac{r}{n} = \frac{\alpha_1(G(r, n))}{|V(G(r, n))|} \geq \frac{\alpha_1(K(r, n))}{|V(K(r, n))|} = \frac{\alpha_1(K(r, n))}{\binom{n}{r}},$$

d'où

$$\alpha_1(K(r, n)) \leq \frac{r}{n} \cdot \binom{n}{r} = \binom{n - r}{n - 1}.$$

Ceci complète la démonstration du théorème 1. On voit facilement que la borne donnée est optimale puisqu'elle correspond à la cardinalité de chacun des ensembles indépendants

$$E_i = \{A \in V(K(r, n)) : i \in A\}, i = 1, \dots, n.$$

En fait, par un théorème de Hilton et Milner [5], les ensembles $E_i, i = 1, \dots, n$ sont les seuls indépendants de cardinalité maximale de $K(r, n)$. Ainsi, le sous-graphe obtenu de $K(r, n)$ en enlevant n'importe quel indépendant de cardinalité maximale est isomorphe à $K(r, n - 1)$. Les graphes de Kneser doivent leur nom à la conjecture de Kneser qui fut résolue par Lovász. Il s'agit du résultat suivant :

Lemme 5. [7] *Le nombre chromatique $\chi(K(r, n))$ de $K(r, n)$ est $n - 2r + 2$.*

Dans sa formulation originale, la conjecture de Kneser soutenait que si les r -sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ sont partitionnés en $n - 2r + 1$ familles, alors une des familles contient deux ensembles disjoints. Cet énoncé se traduit par l'affirmation que $n - 2r + 1$ couleurs ne sont pas suffisantes pour colorier $K(r, n)$. Par ailleurs, il est assez facile de voir que $n - 2r + 2$ couleurs sont suffisantes en assignant la couleur i à l'ensemble

$$F_i = \{A \in V(K(r, n)) : i = \min A\}$$

pour $i = 1, \dots, n - 2r + 1$, et la couleur $n - 2r + 2$ à l'ensemble indépendant

$$F_{n-2r+2} = \{A \in V(K(r, n)) : n - 2r + 2 \leq \min A\}.$$

Après ces remarques, on peut procéder à la démonstration du théorème 2. Par le lemme 5, on a $\chi(K(2k, 5k)) = k + 2$. Le théorème 2 porte sur la cardinalité maximale d'un sous-graphe induit biparti de $K(2k, 5k)$, soit $\alpha_2(K(2k, 5k))$. Notons qu'on a $\alpha_2(K(2, 5)) = 7$, donc $\mu_2(K(2, 5)) = 7/10$. La remarque suivante permet de définir plusieurs homomorphismes utiles entre graphes de Kneser.

Remarque 6. Soit $\psi : \{1, \dots, kn\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, une fonction telle que $|\psi^{-1}(i)| = k$ pour $i = 1, \dots, n$. Alors pour tout $r < n/2$, la fonction $\phi : K(r, n) \rightarrow K(kr, kn)$ définie par $\phi(A) = \psi^{-1}(A)$ est un homomorphisme.

Ainsi, $K(2, 5) \rightarrow K(2k, 5k)$ et par le lemme 3, $\mu_2(K(2k, 5k)) \leq 7/10$. Pour démontrer qu'avec $k \geq 2$, l'inégalité est stricte, on procède par contradiction. Soit G , un sous-graphe induit biparti de $K(2k, 5k)$ de cardinalité maximale. Comme $k \geq 2$, $K(2k, 5k)$ n'est pas 3-chromatique par le lemme 5, donc $K(2k, 5k) - G$ contient au moins une arête $[A, B]$. Par la remarque 6, il existe un homomorphisme $\phi : K(2, 5) \rightarrow K(2k, 5k)$ tel que $\phi(\{1, 2\}) = A$ et $\phi(\{3, 4\}) = B$. En supposant que $\mu_2(K(2k, 5k)) = 7/10$, on a alors $|\phi^{-1}(G)| = 7$ par le lemme 4. Or, $\phi^{-1}(G)$ est un graphe biparti, et il est facile de vérifier que tout sous-graphe induit du graphe de Petersen $K(2, 5)$ obtenu en enlevant $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$ et un troisième sommet n'est pas biparti. Par conséquent, $\mu_2(K(2k, 5k)) < 7/10$, ce qui complète la démonstration du théorème 2.

Avec les mêmes méthodes, il est possible d'améliorer ce résultat et de trouver un rationnel $\rho < 7/10$ tel que $\mu_2(K(2k, 5k)) \leq \rho$ pour tout $k \geq 2$. Par ailleurs, les plus gros sous-graphes bipartis connus de $K(2k, 5k)$ sont obtenus à l'aide d'une forme de «coloriage vorace» de ces graphes. On assigne une couleur à un ensemble indépendant de cardinalité maximale de $K(2k, 5k)$, soit l'un des ensembles E_i définis plus tôt. Puis, on assigne une autre couleur à un ensemble indépendant de sommets non coloriés de cardinalité maximale, soit un ensemble $E_j \setminus E_i$. Le sous-graphe ainsi obtenu est celui induit par $E_i \cup E_j$; si cette construction s'avère optimale, la valeur $\mu_2(K(2k, 5k))$

diminue avec k vers $16/25$. Malgré la plausibilité de cette hypothèse, il est permis de s'interroger plus à fond sur l'efficacité de la méthode de coloriage vorace proposée ici. Dans le contexte général des graphes, cette question rejoint le thème des suites de différences chromatiques, abordé dans la prochaine section. Paradoxalement, le théorème 2 permet justement de donner un contre-exemple à la conjecture de Albertson et Collins, conjecture qui s'apparente à la validité de l'hypothèse présentée ci-haut.

La conjecture de Albertson et Collins. Soit G , un graphe n -chromatique. La suite $\beta_1(G), \beta_2(G), \dots, \beta_n(G)$ où

$$\beta_k(G) = \alpha_k(G) - \alpha_{k-1}(G)$$

est appelée la *suite de différences chromatiques* d'un graphe G . Cette définition est due à Albertson et Berman [1], qui ont emprunté le concept aux travaux de Greene et Kleitman [4] sur les ensembles ordonnés. Malgré l'identité $\alpha_k(G) = \alpha_{k-1}(G) + \beta_k(G)$, Greene et Kleitman mettaient le lecteur en garde contre l'interprétation de $\beta_k(G)$ comme le nombre de sommets qu'on peut ajouter à un sous-graphe induit $(k-1)$ -colorable de cardinalité maximale pour obtenir un sous-graphe induit k -colorable de cardinalité maximale; ils démontrent néanmoins que la suite de différences chromatiques d'un graphe de comparabilité est toujours non croissante.

Pour un graphe donné G , la validité de la méthode de coloriage vorace présentée à la fin de la section précédente est consistante avec l'interprétation biaisée de $\beta_k(G)$ donnée ci-haut, et entraîne directement la monotonie de la suite $\{\beta_1(G), \dots, \beta_n(G)\}$. Outre son application potentielle aux graphes de Kneser, Albertson et Collins [2] et Zhou [10] décrivent plusieurs situations où la validité de cette interprétation de $\beta_k(G)$ s'avère utile pour le calcul de suites de différences chromatiques. Par contre, peu des propriétés des suites de différences chromatiques de graphes de comparabilité s'étendent aux graphes en général. Ainsi, la suite de différences chromatiques d'un graphe n'est pas toujours monotone. Par ailleurs, le lemme 3 met en valeur le rôle des graphes transitifs dans l'évaluation des paramètres $\alpha_k(G)$, $k = 1, \dots, n$. Aussi, Albertson et Collins ont formulé la conjecture suivante :

Conjecture 7. [2] *La suite de différences chromatiques d'un graphe transitif est toujours non croissante.*

Cette conjecture s'avère fausse. On présente ici une famille de contre-exemples 3-chromatiques construite à partir des graphes de Kneser et des inégalités combinatoires présentées plus tôt. On peut également se référer à [9] pour la construction d'un graphe circulant 6-chromatique dont la suite de différences chromatiques est non-monotone.

Le *produit catégorique* de deux graphes G et H est le graphe $G \times H$, où

$$V(G \times H) = V(G) \times V(H),$$

$$E(G \times H) = \{[(u_1, v_1), (u_2, v_2)] : [u_1, u_2] \in E(G) \text{ et } [v_1, v_2] \in E(H)\}.$$

Il s'agit d'un des produits couramment utilisés en théorie des graphes. Notons que les deux projections de $G \times H$ sur ses facteurs sont des homomorphismes. Les homomorphismes $\phi : G \rightarrow H_1 \times H_2$ peuvent s'exprimer comme couples (ϕ_1, ϕ_2) ,

où $\phi_i : G \rightarrow H_i$ est un homomorphisme pour $i = 1, 2$. La conjecture de Hedetniemi affirme que $\chi(G \times H) = \min\{\chi(G), \chi(H)\}$, cette conjecture est vérifiée pour $\min\{\chi(G), \chi(H)\} \leq 4$ (voir [6]). On s'intéresse plus particulièrement à la suite de différences chromatiques de $G_k = K_3 \times K(2k, 5k)$, où $k \geq 2$ et K_3 dénote le graphe complet sur trois sommets. Le graphe G_k est transitif, et par la remarque 6, on a

$$K(2, 5) \rightarrow G_k \rightarrow K(2k, 5k).$$

De la première relation, on obtient $\mu_1(G_k) \leq 2/5$ et $\mu_2(G_k) \leq 7/10$, et de la deuxième relation, on obtient $\mu_1(G_k) \geq 2/5$. Ainsi, $\beta_1(G_k) = (4/10)m$ et $\beta_2(G_k) \leq (3/10)m$, où $m = |V(G_k)|$. Puisque $G_k = K_3 \times K(2k, 5k)$ est 3-chromatique, on a alors $\beta_3(G_k) \geq (3/10)m$. Donc, la suite de différences chromatiques de G_k est monotone si et seulement si $\mu_2(G_k) = 7/10$.

Lemme 8. *Soit G un sous-graphe induit biparti de G_k tel que $|V(G)| = (7/10)m$. Alors $G = K_3 \times H$, où H est un sous-graphe de $K(2k, 5k)$.*

Démonstration. On montre que pour $A \in V(K(2k, 5k))$ et deux sommets distincts x, y de K_3 , on a $(x, A) \in V(G)$ si et seulement si $(y, A) \in V(G)$. Notons z le troisième sommet de K_3 , et considérons deux homomorphismes ϕ_1, ϕ_2 de $K(2, 5)$ dans K_3 définis en posant

$$\phi_1(B) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \in B \\ y & \text{si } 2 \in B, 1 \notin B \\ z & \text{si } 1, 2 \notin B \end{cases} \quad \phi_2(B) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \in B, 2 \notin B \\ y & \text{si } 2 \in B \\ z & \text{si } 1, 2 \notin B. \end{cases}$$

Par la remarque 6, il existe un homomorphisme ϕ de $K(2, 5)$ dans $K(2k, 5k)$ tel que $\phi(\{1, 2\}) = A$. Les fonctions $\psi_1 = (\phi_1, \phi)$ et $\psi_2 = (\phi_2, \phi)$ sont alors deux homomorphismes de $K(2, 5)$ dans G_k . Notons que $\psi_1(B) = \psi_2(B)$ pour tout sommet B de $K(2, 5)$ différent de $\{1, 2\}$, donc $\{1, 2\}$ est le seul sommet de $K(2, 5)$ pouvant appartenir à la différence symétrique de $\psi_1^{-1}(G)$ et $\psi_2^{-1}(G)$. Or, $\mu_2(G_k) = 7/10$ par hypothèse, donc par le lemme 4 on a alors $|\psi_1^{-1}(G)| = |\psi_2^{-1}(G)|$. Ainsi, $\psi_1^{-1}(G) = \psi_2^{-1}(G)$, et $(x, A) = \psi_1(\{1, 2\}) \in V(G)$ si et seulement si $(y, A) = \psi_2(\{1, 2\}) \in V(G)$. $\square$

Notons que le graphe H de l'énoncé du lemme précédent est un sous-graphe induit biparti de $K(2k, 5k)$, puisque le produit de deux graphes non bipartis est non biparti. On a pourtant

$$|V(H)| = \frac{|V(G)|}{3} = \frac{7}{10} \cdot |V(K(2k, 5k))|,$$

ce qui contredit le théorème 2. Par conséquent, aucun graphe G ne peut satisfaire à l'hypothèse du lemme 8 et ainsi $\mu_2(K_3 \times K(2k, 5k)) < 7/10$. On a vu que cette inégalité a la conséquence suivante :

Proposition 9. *Soit un entier $k \geq 2$. Alors la suite de différences chromatiques de $K_3 \times K(2k, 5k)$ est non monotone.*

Remerciements. L'auteur tient à remercier Gert Sabidussi pour plusieurs discussions stimulantes sur ce sujet. Ce travail a été soutenu en partie par la bourse ER-1647 du ministère de l'éducation du Québec.

English extended abstract. We use graph homomorphisms to derive some inequalities on systems of sets. The main results are the following:

Theorem 1 (Erdős, Ko, Rado). [3] *Let r, n be integers such that $r < n/2$, and $\mathcal{F}$ a family of pairwise intersecting r -subsets of $\{1, \dots, n\}$. Then*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{r-1}{n-1}.$$

Theorem 2. *Let k be an integer greater than or equal to 2, and $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ families of pairwise intersecting $2k$ -subsets of $\{1, \dots, 5k\}$. Then*

$$|\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2| < \frac{7}{10} \cdot \binom{r-1}{n-1}.$$

It turns out that both of these results can be expressed in terms of independent sets in Kneser graphs. For integers r, n such that $r < n/2$, the *Kneser graph* $K(r, n)$ is the graph whose vertices are the r -subsets of $\{1, \dots, n\}$, two vertices being joined by an edge whenever they are disjoint. Theorem 1 gives an upper bound for the independence number of $K(r, n)$ (this bound is easily seen to be attained), and Theorem 2 gives a strict upper bound for the size of the largest induced bipartite subgraph of $K(2k, 5k)$. We use the following notations borrowed from the topic of chromatic difference sequences of graphs: For a graph G and an integer k , put

- $\alpha_k(G) :=$ the maximum number of vertices of an induced k -colourable subgraph of G ,
- $\mu_k(G) := \alpha_k(G)/|V(G)|$,
- $\beta_k(G) := \alpha_k(G) - \alpha_{k-1}(G)$.

The sequence $\beta_1(G), \dots, \beta_{\chi(G)}(G)$ is called the *chromatic difference sequence* of G .

Lemma 3 (No-homomorphism lemma). [2] *Let H be a vertex-transitive graph. Then for any graph G such that there exists a homomorphism $\phi : G \rightarrow H$ and for any integer k , $\mu_k(G) \geq \mu_k(H)$.*

Lemma 4. *Let G, H be graphs such that H is vertex-transitive and $\mu_k(G) = \mu_k(H)$ for some integer k . If $\phi : G \rightarrow H$ is a homomorphism, then $|\phi^{-1}(H')| = \alpha_k(G)$ for any induced k -colourable subgraph H' of H such that $|V(H')| = \alpha_k(H)$.*

The proof of Theorem 1 relies on Lemma 3 and homomorphisms of circulant graphs. The proof of Theorem 2 uses Lemma 4, homomorphisms of the Petersen graph $K(2, 5)$ and some specific properties of colourings of the Petersen graph. Additional properties of colourings of the Petersen graph are also used to find counterexamples to the following:

Conjecture 7. [2] *The chromatic difference sequence of any vertex-transitive graph is monotone non-decreasing.*

The *categorical product* of two graphs G and H is the graph $G \times H$, where

$$V(G \times H) = V(G) \times V(H),$$

$$E(G \times H) = \{[(u_1, v_1), (u_2, v_2)] : [u_1, u_2] \in E(G) \text{ et } [v_1, v_2] \in E(H)\}.$$

Proposition 9. *Let $k \geq 2$ be an integer. Then the chromatic difference sequence of $K_3 \times K(2k, 5k)$ is non-monotone.*

BIBLIOGRAPHIE

1. M. O. Albertson et D. M. Berman, *The chromatic difference sequence of a graph*, J. Combin. Theory Ser. B **29** (1980), 1–12.
2. M. O. Albertson et K. L. Collins, *Homomorphisms of 3-chromatic graphs*, Discrete Math. **54** (1985), 127–132.
3. P. Erdős, C. Ko et R. Rado, *Intersection theorems for systems of finite sets*, Quart. J. Math. Oxford Ser.(2) **12** (1961), 313–320.
4. C. Greene et D. G. Kleitman, *The structure of Sperner k -families*, J. Combinatorial Theory Ser. A **20** (1976), 41–68.
5. A. J. W. Hilton et E. C. Milner, *Some intersection theorems for systems of finite sets*, Quart. J. Math. Oxford Ser.(2) **18** (1967), 369–384.
6. M. El-Zahar et N. W. Sauer, *The chromatic number of the product of two 4-chromatic graphs is 4*, Combinatorica **5** (1985), 121–126.
7. L. Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy*, J. Combinatorial Theory Ser. A **25** (1978), 319–324.
8. S. Poljak et Z. Tuza, *Maximum bipartite subgraphs of Kneser graphs*, Graphs Combin. **3** (1987), 191–199.
9. C. Tardif, *Graph products and the chromatic difference sequence of vertex-transitive graphs*, Discrete Math. **185** (1998), 193–200.
10. H. Zhou, *The chromatic difference sequence of the Cartesian product of graphs*, Discrete Math. **90** (1991), 297–311.

C. TARDIF

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUE

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE CENTRE-VILLE

MONTRÉAL QC H3C 3J7

CANADA

E-MAIL: tardifc@ere.umontreal.ca