

SUR UNE ÉQUATION INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE AVEC RETARD

MOHAMED OULAIBA

RÉSUMÉ. On considère dans cet article l'équation intégral-différentielle avec retard, semi-linéaire et données épaisses : $\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) - \Delta u(t, x) + \int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t)g[u(\sigma, x)]d\sigma = f(t, x, u(t, x))$ dans $\Omega \times]0, \infty[$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $f(t, x, \lambda)$ une fonction de Carathéodory. On démontre tout d'abord l'existence, l'unicité puis la positivité de la solution dans le cas où $f(t, x, \lambda)$ et la donnée initiale $u_0(x)$ sont positives et enfin on étudie le comportement asymptotique quand t tend vers $+\infty$ de la solution u et de sa dérivée u' ainsi que la stabilité au voisinage de la solution d'équilibre.

ABSTRACT. In this paper, we consider the semi-linear integrodifferential equation with delay and with thick data: $\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) - \Delta u(t, x) + \int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t)g[u(\sigma, x)]d\sigma = f(t, x, u(t, x))$ in $\Omega \times]0, \infty[$ where Ω is an open bounded set of $\mathbb{R}^2$ and $f(t, x, \lambda)$ a function of Carathéodory. Existence and uniqueness of a solution is first proved, before showing the positivity of the solution when the function $f(t, x, \lambda)$ and the initial data $u_0(x)$ are non negative. Finally the long time behaviour of u and u' is studied together with the stability of solution in a neighbourhood of the equilibrium point.

Introduction. On considère l'équation parabolique non linéaire avec retard de type Nohel-Levin (voir M. Artola, 1968) avec «données épaisses»

$$(E) \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) + \int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t)g[u(\sigma, x)]d\sigma = f(t, x), \quad t \geq 0$$

ou encore

$$(E^*) \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) + \int_{-1}^0 \gamma(\theta)g[u(t + \theta, x)]d\theta = f(t, x), \quad t \geq 0.$$

L'équation (E) se rencontre fréquemment comme modèle en biologie mathématique et en sciences physiques («materials with memory»).

En dimension 1 ($n = 1$) l'équation différentielle

$$(E') \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t)g[u(\sigma, x)]d\sigma = f(t, x), \quad t \geq 0$$

Reçu le 19 février 1996 et, sous forme définitive, le 4 octobre 1997.

est le modèle d'un type particulier de circulation de fluide dans un réacteur nucléaire où $u(t, x)$ représente la densité des neutrons. Dans ce cas, elle peut être aussi un bon modèle en viscoélasticité où $u(t, x)$ est la contrainte et γ la fonction de relaxation.

L'équation différentielle (E') a été étudiée par J. J. Levin (1963) initialement puis par J. J. Levin et J. Nohel (1964, 1965, 1966), ensuite par R. K. Miller (1965), J. K. Hale (1965), A. Halannay (1965), J. A. Nohel (1966a, 1996b), R. C. MacCamy et S. W. Wong (1972), S. O. Londen (1970), O. J. Staffans (1975), B. K. Hannsgen (1969), V. Barbu (1975), M. G. Crandall, S. O. Londen et J. A. Nohel (1978) et H. Engler (1983). La majorité de ces auteurs ont choisi le terme intégral sous la forme

$$\int_0^t \gamma(t - \sigma)g[u(\sigma)]d\sigma$$

avec des hypothèses sur le noyau γ du type

$$(1) \quad (-1)^j \gamma^{(j)}(t) \geq 0, \quad j = 0, 1, 2, 3 \text{ pour } t \geq 0$$

($\gamma(t)$ non identique à une constante) pour avoir un noyau fortement positif, $g(u)u > 0$ ($u \neq 0$) et la condition classique $\int_0^u g(\lambda)d\lambda \rightarrow \infty$ ($|u| \rightarrow \infty$). La plupart des résultats concernant le comportement qualitatif des solutions et de leurs dérivées a été obtenue par la construction de fonctionnelles de Liapounov adéquates.

En dimension n quelconque (voir W. M. Oliva (1980) et K. P. Rybakowski (1984)) et en particulier sous les nouvelles hypothèses choisies sur γ

$$\begin{aligned} \gamma(-1) = 0, \quad \gamma^{(j)}(\theta) \geq 0, \quad j = 0, 1, 2, 3 \text{ pour } \theta \in [-1, 0] \\ \gamma''(\theta_0) > 0, \quad \text{pour } \theta_0 \in [-1, 0], \end{aligned}$$

avec le terme source nul, (E') est une équation différentielle fonctionnelle à « gradient-like » selon la terminologie de K. P. Rybakowski (1984). Cette étude avec ces nouvelles hypothèses est peu connue. J. K. Hale et K. P. Rybakowski (1981) puis S. M. Kuen et K. P. Rybakowski (1985) ont étudié cette équation avec ces hypothèses toujours en dimension 1 et sous la forme (E') avec le terme source nul.

C'est M. Artola (1968) qui a étendu le premier à la situation « opérationnelle » (E) , les résultats de Nohel et Levin pour l'équation (E') avec $g(\sigma) = |\sigma|^{p-1}\sigma$ et les conditions (1) sur le noyau γ . Il a étudié l'existence et l'unicité de la solution en se basant sur un théorème qu'il a démontré dans sa thèse en utilisant une fonctionnelle de Liapounov convenable.

L'objet de ce travail est l'étude de l'équation généralisée

$$(E'') \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) + \int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t)g[u(\sigma, x)]d\sigma = f(t, x, u(t, x))$$

sous certaines hypothèses sur γ , g et f (voir section 1). Dans ce cadre, on présente une étude de l'existence et de l'unicité de la solution de cette équation, ainsi que la positivité de la solution dans le cas où l'on choisit à la fois $f(t, x, \lambda)$ et la condition initiale positives. Enfin on étudie le comportement asymptotique à l'infini de $u(t, x)$, $u'(t, x)$ et la stabilité au point d'équilibre.

1. Notations et hypothèses. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ assez régulière. On note Q_T le domaine $I \times \Omega$ où $I =]0, T[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ ($T > 0$ fini ou non). On introduit les espaces :

$H = L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$ et de la norme usuelle

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$((u, v)) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx$$

et de la norme associée $\|u\|_{H^1(\Omega)} = ((u, u))^{\frac{1}{2}}$ et, enfin $V = H_0^1(\Omega)$ qui est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ auquel on associe la norme

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit A l'opérateur auto-adjoint dans H de domaine

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid Au \in L^2(\Omega)\} = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

donné par $Au = -\Delta u$.

On considère une fonction $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^2 , soumise aux hypothèses

$$H_1 \begin{cases} \text{i) } g \text{ est localement lipschitzienne, c'est-à-dire que pour chaque } \beta \\ \quad (0 \leq \beta < \infty), \text{ il existe une constante } B(\beta) \text{ telle que} \\ \quad |g(u) - g(v)| \leq B|u - v|, \quad |u| < \beta, \quad |v| < \beta. \\ \text{ii) } g(0) = 0, \quad g(u)u > 0 \text{ pour } u \neq 0. \end{cases}$$

Dans la suite on considère g de la forme

$$(1.1) \quad g(u) = \Phi(|u|^2) u \text{ où } \Phi \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+).$$

Soit par ailleurs $(\theta, t) \rightarrow \gamma(\theta, t)$ vérifiant

$$H_2 \begin{cases} \text{i) } \gamma : [-1, 0] \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R} \text{ de classe } C^2([-1, 0] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}). \\ \text{ii) } \gamma(-1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \gamma(\theta, t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0. \\ \text{iii) } \tilde{\gamma}(t) = \sup_{\theta \in [-1, 0]} |\gamma(\theta, t)|, \quad \tilde{\gamma}(t) \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+). \end{cases}$$

Enfin on considère une fonction f telle que

$$H_3 \begin{cases} f : \mathbb{R}_+ \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ f(t, x, \lambda) \text{ est une fonction de Carathéodory vérifiant} \\ |f(t, x, \lambda)| \leq |\varphi(t, x)| |\lambda|, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{avec } \varphi \in L^1(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}_+; L^\infty(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Omega) \\ |f(t, x, \lambda_1) - f(t, x, \lambda_2)| \leq |\varphi(t, x)| |\lambda_1 - \lambda_2|. \end{cases}$$

On déduit de H_3 que

$$(1.2) \quad \left| \frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial \lambda} \right| \leq |\varphi(t, x)| \text{ et } f(t, x, 0) = 0.$$

Les inégalités suivantes seront souvent utilisées par la suite

$$(1.3) \quad \forall \rho > 0, \quad ab \leq \frac{1}{2\rho}a^2 + \frac{\rho}{2}b^2 \text{ et } (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2).$$

Remarque 1.1. On rappelle que $(t, x) \mapsto h(t, x, \lambda)$ est une fonction de Carathéodory si pour tout λ elle est mesurable en (t, x) et presque partout en (t, x) continue en λ .

Remarque 1.2. Le choix de g de classe C^0 suffit pour ce travail.

2. Un théorème d'existence et d'unicité.

2.1. Problème initial. On veut trouver u vérifiant

$$\mathcal{P}_1 \begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) + \int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t) g[u(\sigma, x)] d\sigma = f(t, x, u(t, x)) \text{ dans } Q_T \\ u(t, x) = 0, (t, x) \in]0, +\infty[\times \partial\Omega \\ u(t, x) = u^0(t, x) \text{ p.p. dans }]-1, 0[\times \Omega \\ u(0, x) = u_0(x), x \in \Omega \end{cases}$$

où

$$u^0(t, x) \in L^2([-1, 0[; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \text{ et } u_0(x) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = D(-\Delta)$$

sont données et les fonctions γ , g et f vérifient H_1 , H_2 et H_3 . Nous allons établir le théorème 2.1.

Théorème 2.1. *Si les hypothèses H_1 , H_2 et H_3 sont vérifiées alors le problème $\mathcal{P}_1$ admet une solution unique u vérifiant*

$$(2.1) \quad u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)).$$

Si, de plus

$$(2.2) \quad f(t, x, \lambda) > 0 \text{ pour tout } (t, x, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}, u_0(x) > 0$$

alors $u \geq 0$ presque partout.

La démonstration de ce théorème comporte trois étapes : d'abord on étudie un problème approché, puis on effectue des estimations *a priori* et enfin on fait un passage à la limite.

2.2. Problème approché. On considère les w_j vérifiant

$$\{-\Delta w_j = \lambda_j w_j, w_j|_\Gamma = 0, j = 1, 2, \dots\}.$$

Les w_j étant les fonctions propres de $-\Delta$ pour le problème de Dirichlet orthonormées dans $H = L^2(\Omega)$ et on sait que $w_j \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Soit P_m le projecteur orthogonal dans $H = L^2(\Omega)$ sur V_m engendré par la base

$$V_m = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}.$$

On définit

$$(2.3) \quad u_m(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_{j,m} w_j \text{ où } \alpha_{j,m} = (u(t), w_j), \quad \forall u \in L^2(\Omega)$$

comme solution du système approché :

$$\mathcal{P}_m^1 \begin{cases} \frac{\partial u_m(t)}{\partial t} - \Delta u_m(t) + \int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t) P_m g[u_m(\sigma)] d\sigma = P_m f(t, x, u_m(t)) \\ u_m(0) = P_m u_0 \quad \text{condition initiale} \\ u_m = P_m u^0 \quad \text{retard «couche épaisse» sur }]-1, 0[\times \Omega. \end{cases}$$

Comme d'après (1.1) on a choisi g de la forme $g(u) = \Phi(|u|^2)u$, on a

$$(2.4) \quad P_m g(u_m(\sigma)) = g(u_m(\sigma)).$$

Le système $\mathcal{P}_m^1$ est équivalent à

$$\mathcal{P}_m^2 \begin{cases} \left(\frac{\partial u_m}{\partial t}, w_j \right) - \left(\Delta u_m(t), w_j \right) + \left(\int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t) P_m g[u_m(\sigma)] d\sigma, w_j \right) \\ = \left(P_m f(t, x, u_m(t)), w_j \right) \text{ avec } 1 \leq j \leq m, \quad u_m(0) = P_m u_0 \text{ et } u_m = P_m u^0. \end{cases}$$

Le système $\mathcal{P}_m^2$ admet une solution locale unique (Segal, 1963a, 1963b) c'est-à-dire

$$(2.5) \quad \exists \delta_m \text{ tel que } \forall t \in]0, \delta_m], \quad u_m(t) \in V_m, \quad u_m \in P_m(H).$$

Nous allons maintenant établir des estimations *a priori*.

2.3. Estimations a priori. On a tout d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.1. *On suppose que l'hypothèse H_2 sur γ est vérifiée et soit*

$$(2.6) \quad u \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

alors, pour tout $\rho > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\int_{s-1}^s \gamma(\sigma - s, s) u(\sigma) d\sigma, v(s) \right) ds &\leq \frac{1}{\rho} \sup_{-1 \leq \sigma \leq 0} \|u(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \frac{3}{2\rho} \sup_{0 \leq \sigma \leq t} \|u(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho \left(\int_0^t \tilde{\gamma}(s) \|v(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \right)^2. \end{aligned}$$

Démonstration. Posons

$$(2.7) \quad I(t) = \int_0^t \left(\int_{s-1}^s \gamma(\sigma - s, s) u(\sigma) d\sigma, v(s) \right) ds.$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz, nous avons

$$(2.8) \quad |I(t)| \leq \int_0^t \left(\int_{s-1}^s \gamma(\sigma - s, s) \|u(\sigma)\|_{L^2(\Omega)} \|v(s)\|_{L^2(\Omega)} d\sigma \right) ds$$

soit encore

$$(2.9) \quad |I(t)| \leq \int_0^t \left(\sup_{s-1 \leq \sigma \leq s} \|u(\sigma)\|_{L^2(\Omega)} \int_{s-1}^s \gamma(\sigma - s, s) \|v(s)\|_{L^2(\Omega)} d\sigma \right) ds.$$

Définissons

$$(2.10) \quad \gamma^*(s) = \int_{-1}^0 \gamma(\theta, s) d\theta \leq \int_{-1}^0 \sup_{\theta \in [-1, 0]} \gamma(\theta, s) d\theta \leq \tilde{\gamma}(s)$$

où l'inégalité est obtenue en utilisant l'hypothèse H_2 . Alors (2.9) devient

$$(2.11) \quad |I(t)| \leq \int_0^t \sup_{s-1 \leq \sigma \leq s} \|u(\sigma)\|_{L^2(\Omega)} \tilde{\gamma}(s) \|v(s)\|_{L^2(\Omega)} ds$$

ou encore

$$(2.12) \quad \begin{aligned} |I(t)| &\leq \int_0^1 \sup_{s-1 \leq \sigma \leq s} \|u(\sigma)\|_{L^2(\Omega)} \tilde{\gamma}(s) \|v(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\quad + \int_1^t \sup_{s-1 \leq \sigma \leq s} \|u(\sigma)\|_{L^2(\Omega)} \tilde{\gamma}(s) \|v(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(2.13) \quad \begin{aligned} |I(t)| &\leq \left[\sup_{-1 \leq \sigma \leq 0} \|u(\sigma)\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{0 \leq \sigma \leq 1} \|u(\sigma)\|_{L^2(\Omega)} \right] \int_0^1 \tilde{\gamma}(s) \|v(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\quad + \sup_{0 \leq \sigma \leq t} \|u(\sigma)\|_{L^2(\Omega)} \int_0^t \tilde{\gamma}(s) \|v(s)\|_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

On applique à (2.13) les inégalités (1.3) et on obtient en définitive

$$(2.15) \quad \begin{aligned} |I(t)| &\leq \frac{1}{\rho} \sup_{-1 \leq \sigma \leq 0} \|u(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3}{2\rho} \sup_{0 \leq \sigma \leq t} \|u(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \rho \left(\int_0^t \tilde{\gamma}(s) \|v(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \right)^2 \end{aligned}$$

ce qui donne le lemme 2.1. $\square$

Nous allons maintenant utiliser le lemme 2.1 pour obtenir des estimations a priori.

Lemme 2.2. *On a les estimations :*

- i) u_m appartient à un borné de $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$;
- ii) u_m appartient à un borné de $L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))$;
- iii) $\frac{\partial u_m}{\partial t}$ appartient à un borné de $L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$;
- iv) u_m appartient à un borné de $L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$;
- v) u_m appartient à un borné de $L^\infty(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))$.

Démonstration. En multipliant l'équation du problème $\mathcal{P}_m^1$ par $u_m(t)$ dans la dualité et en intégrant sur $(0, t)$ on obtient

$$\begin{aligned}
 (2.16) \quad & \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
 & + \int_0^t \left(\int_{s-1}^s \gamma(\sigma - s, s) P_m g[u_m(\sigma)] d\sigma, u_m(s) \right) ds \\
 & = \int_0^t (P_m f(s, x, u_m(s, x)), u_m(s)) ds + \frac{1}{2} \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz et l'hypothèse H_3 sur f au second membre de (2.16), il vient

$$\begin{aligned}
 (2.17) \quad & \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
 & \leq \int_0^t \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
 & + \int_0^t \int_{s-1}^s \gamma(\sigma - s, s) \|P_m g[u_m(s)]\|_{L^2(\Omega)} \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)} d\sigma ds \\
 & + \frac{1}{2} \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

On utilise le lemme 2.1 pour le deuxième terme du second membre de l'inégalité (2.17) et, en tenant compte de

$$(2.18) \quad \|g[u_m(\sigma)]\|_{L^2(\Omega)} \leq B \|u_m(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}$$

déduite de H_1 , on a

$$\begin{aligned}
 (2.19) \quad & \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
 & \leq \frac{B}{\rho} \sup_{-1 \leq \sigma \leq 0} \|u_m(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & + \frac{3B}{2\rho} \sup_{0 \leq \sigma \leq t} \|u_m(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho B \left(\int_0^t \tilde{\gamma}(s) \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \right)^2 \\
 & + \int_0^t \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.
 \end{aligned}$$

On choisit ρ tel que $1 - 3B/\rho > 0$, c'est-à-dire $\rho > 3B$ dans (2.19) et, en tenant compte de la condition initiale et de la couche épaisse, il vient

$$(2.20) \quad \begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{3B}{2\rho} \right) \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq \frac{B}{\rho} \sup_{-1 \leq \sigma \leq 0} \|u^0(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho B \left(\int_0^t \tilde{\gamma}(s) \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \right)^2 \\ & \quad + \int_0^T \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Rappelons le théorème de C. Baiocchi (1967), désigné ici comme lemme, pour terminer la suite de la démonstration.

Lemme 2.3. Soit $g(t) \in C^0[0, T]$ une fonction non négative qui, pour tout $t \in [0, T]$, vérifie l'inégalité

$$\begin{aligned} g^2(t) \leq g_0^2 + 2 \int_0^t \|g\|_{C^0[0, \tau]} h(\tau) d\tau + \int_0^t \|g\|_{C^0[0, \tau]}^2 \lambda(\tau) d\tau \\ + \left(\int_0^t \|g\|_{C^0[0, \tau]} \mu(\tau) d\tau \right)^2 + c \|g\|_{C^0[0, t]}^2 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} 0 \leq g_0 < +\infty, \quad 0 \leq h(t) \in L^1(0, T), \quad 0 \leq \lambda(t) \in L^1(0, T), \\ 0 \leq \mu(t) \in L^1(0, T), \quad 0 \leq c < 1 \end{aligned}$$

alors

$$g(t) \leq \bar{c} \exp \left\{ \bar{c} \left[\|\lambda\|_{L^1(0, T)} + \|\mu\|_{L^1(0, T)} \exp(\bar{c} \|\lambda\|_{L^1(0, T)}) \right] \right\} \left(g_0 + \int_0^T h(\tau) d\tau \right)$$

avec $\bar{c} = \max(1, 2/(1 - c))$.

On applique ce lemme à (2.20) avec $\psi(\rho) = 1 - 3B/\rho > 0$ et, en choisissant $\rho = 4B$, on a

- $0 < g_0^2 = 4\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \sup_{-1 \leq \sigma \leq 0} \|u^0(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2$;
- $h(t) = 0$;
- $\lambda(t) = 8\|\varphi(t)\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\lambda(t) \in L^1(0, T) \cap L^2(0, T)$ grâce à l'hypothèse H_3 ;
- $\mu(t) = 4B\sqrt{2}\tilde{\gamma}(t)$, $\mu(t) \in L^1(0, T)$ car $\tilde{\gamma}(t) \in L^1(0, T) \cap L^2(0, T)$ grâce à l'hypothèse H_2 , c'est-à-dire

$$\int_0^T \int_{-1}^0 \gamma(\theta, s) d\theta ds \leq \int_0^T \sup_{\theta \in [-1, 0]} |\gamma(\theta, s)| ds = \int_0^T \tilde{\gamma}(s) ds < \infty;$$

- $c = 0$ et $\bar{c} = \max(1, \frac{2}{1}) = 2$,

ce qui donne

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq & 2 \exp \left\{ 2 \left[8 \int_0^T \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \right. \right. \\ & \left. \left. + 4B\sqrt{2} \int_0^T \tilde{\gamma}(s) ds \exp \left(8 \int_0^T \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \right) \right] \right\} g_0 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(2.22) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq K_1(T, \varphi, \gamma, u^0, u_0),$$

$$(2.23) \quad \int_0^T \|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq K_2(T, \varphi, \gamma, u^0, u_0),$$

ce qui donne i) et ii) du lemme 2.2.

Maintenant, multiplions l'équation du problème $\mathcal{P}_m^1$ par u'_m ($u'_m = \frac{\partial u_m}{\partial t}$) et, après avoir utilisé l'inégalité de Schwarz et intégré sur $(0, t)$, puis les hypothèses H_1 et H_3 , les C désignant différentes constantes indépendantes de m , nous obtenons

$$(2.24) \quad \begin{aligned} & \int_0^t \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|u_m(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C \int_0^t \int_{s-1}^s \gamma(\sigma - s, s) \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)} d\sigma ds \\ & \quad + C \int_0^t \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

Or le deuxième terme du second membre de cette inégalité, après avoir utilisé l'inégalité de Schwarz et (1.3), donne

$$(2.25) \quad \begin{aligned} & \int_0^t \int_{s-1}^s \gamma(\sigma - s, s) \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)} d\sigma ds \\ & \leq \frac{\rho}{2} \int_0^t \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2\rho} \int_0^t \int_{s-1}^s |\gamma(\sigma - s, s)|^2 d\sigma ds. \end{aligned}$$

D'autre part, grâce à (1.3), on transforme le troisième terme du second membre de (2.24), puis avec un choix convenable de ρ et en tenant compte de (2.25), il vient

$$(2.26) \quad \begin{aligned} & \int_0^t \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_m(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ & \quad + C \int_0^t \int_{s-1}^s |\gamma(\sigma - s, s)|^2 d\sigma ds + C \int_0^t \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

D'après les hypothèses H_2 et H_3 , on déduit de (2.26) les estimations iii) et v) du lemme 2.2, à savoir

$$(2.27) \quad \begin{cases} u'_m \text{ appartient à un borné de } L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)), \\ u_m \text{ appartient à un borné de } L^\infty(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)). \end{cases}$$

D'autre part, l'équation du problème $\mathcal{P}_m^1$ permet d'avoir

$$(2.28) \quad -\Delta u_m(t) = -u'_m(t) - \int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t) g[u_m(\sigma)] d\sigma + f_m(t, x, u_m(t))$$

et, en tenant compte du lemme 2.2, on déduit :

$$(2.29) \quad \begin{cases} P_m g(u_m) \text{ appartient à un borné de } L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)), \\ \int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t) P_m g[u_m(\sigma)] d\sigma \text{ reste dans un borné de } L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)), \\ P_m f_m(t, x, u_m(t)) \text{ reste dans un borné de } L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \\ \text{car } \varphi \in L^2(\mathbb{R}_+; L^\infty(\Omega)). \end{cases}$$

D'où on obtient que Δu_m appartient à un borné de $L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ et comme on a supposé $\Gamma = \partial\Omega$ assez régulière, on a (cf. J. L. Lions, 1969)

$$(2.30) \quad \|\Delta u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \geq C \|u_m(t)\|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall u_m \in D(-\Delta)$$

ceci donne iv) du lemme 2.2. $\square$

Nous allons maintenant effectuer un passage à la limite.

2.4. Passage à la limite.

2.4.1. Existence. D'après le lemme 2.2, u_m appartient à un borné de $L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))$ et u'_m appartient à un borné de $L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$. Comme l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte car Ω est borné et la frontière $\partial\Omega$ assez régulière, on introduit

$$(2.31) \quad W(0, T) = \{u_m \in L^2([0, T]; H_0^1(\Omega)), u'_m \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))\}.$$

Il est aisé de voir que u_m demeure dans un borné de $W(0, T)$, on peut donc extraire une sous-suite encore notée $\{u_m\}$ telle que

$$(2.32) \quad u_m \rightarrow u \text{ dans } W(0, T) \text{ faible.}$$

On sait que $W(0, T) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2([0, T]; L^2(\Omega))$. D'après un résultat classique de compacité (voir J. L. Lions et E. Magenes, 1968), l'injection de $W(0, T)$ dans $L^2([0, T]; L^2(\Omega))$ est compacte. On a donc, pour tout T positif fixé aussi grand que l'on veut, les convergences fortes

$$(2.33) \quad u_m \rightarrow u \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \text{ et } u_m \rightarrow u \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega \text{ p.p.}$$

On déduit aussi du lemme 2.2 que

$$(2.34) \quad u_m \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \text{ faible } *.$$

En résumé :

1. u_m converge vers u dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ faible *;
2. u_m converge vers u dans $L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ fort, converge aussi en mesure;
3. $g(u_m)$ converge vers $g(u)$ p.p. dans $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ car g est continue;
4. f étant une fonction de Carathéodory $f_m(t, x, u_m)$ converge vers $f(t, x, u)$ en mesure.

On rappelle que $f_m(t, x, u_m) = P_m(f(t, x, u_m))$. Par suite, en passant à la limite dans $\mathcal{P}_m^1$ et en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on déduit que u est solution du problème initial.

Comme $u \in L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))$ et $u' \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ alors u est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $L^2(\Omega)$ d'où $u(0)$ a un sens (voir J. L. Lions et E. Magenes, 1968)

2.4.2. Unicité. Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème $\mathcal{P}_1$ alors $w = u_1 - u_2$ vérifie

$$(2.35) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + \int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t) \{g[u_1(\sigma)] - g[u_2(\sigma)]\} d\sigma \\ \quad \quad \quad = f(t, x, u_1(t)) - f(t, x, u_2(t)), \\ w(0) = 0, \end{cases}$$

d'où, en prenant le produit scalaire dans l'antidualité (V', V) , on déduit

$$(2.36) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \left(\int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t) \{g[u_1(\sigma)] - g[u_2(\sigma)]\} d\sigma, w(t) \right) \\ & = (f(t, x, u_1(t)) - f(t, x, u_2(t)), w(t)) \end{aligned}$$

or, en utilisant l'inégalité de Schwarz et les hypothèses H_1 sur g et H_2 sur γ au troisième terme du premier membre de (2.36), on a

$$(2.37) \quad \begin{aligned} & \left(\int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t) \{g[u_1(\sigma)] - g[u_2(\sigma)]\} d\sigma, w(t) \right) \\ & \leq B \int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t) \|w(\sigma)\|_{L^2(\Omega)} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} d\sigma \end{aligned}$$

alors, en utilisant l'hypothèse H_3 sur f et, en intégrant sur $(0, T)$, on obtient

$$(2.38) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq \int_0^t \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|w(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + B \int_0^t \int_{s-1}^s \gamma(\sigma - s, s) \|w(\sigma)\|_{L^2(\Omega)} \|w(s)\|_{L^2(\Omega)} d\sigma ds. \end{aligned}$$

On applique le lemme 2.1 au troisième terme du second membre de (2.38), il vient

$$(2.39) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \int_0^t \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & + \frac{1}{2} \|w(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho B \left(\int_0^t \tilde{\gamma}(s) \|w(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \right)^2 \\ & + \frac{B}{\rho} \sup_{-1 \leq \sigma \leq 0} \|w(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3B}{2\rho} \sup_{0 \leq \sigma \leq t} \|w(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

or $w(\sigma) = u_1(\sigma) - u_2(\sigma) = 0$ si $\sigma \in]-1, 0[$ et, en choisissant $\rho = 4B$, on obtient

$$(2.40) \quad \frac{1}{8} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^T \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 4B^2 \left(\int_0^T \tilde{\gamma}(s) \|w(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \right)^2.$$

Si on applique le lemme 2.3 de Baiocchi à (2.40) avec

$$g_0 = 0, \quad h(s) = 0, \quad \mu(s) = 4\sqrt{2}B\tilde{\gamma}(s), \quad \lambda(s) = 8\|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ et } c = 0,$$

on a $\|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$ et par suite $w(t) = 0$, pour tout $t \in [0, T]$, d'où l'unicité.

2.4.3. Positivité de la solution. On suppose $f(t, x, \lambda) > 0$ et $u(0, x) = u_0(x) > 0$. Soit u la solution du problème initial alors, en posant $u^+ = \sup(u, 0)$ et $u^- = \sup(-u, 0)$, u peut s'écrire

$$(2.41) \quad u = u^+ - u^- \text{ où } u^+ \geq 0, \quad u^- \geq 0 \text{ et } (u^+, u^-) \in (H_0^1(\Omega))^2 \text{ car } u \in H_0^1(\Omega).$$

On va montrer que

$$(2.42) \quad u = u^+ \geq 0.$$

Pour cela, on multiplie l'équation du problème $\mathcal{P}_1$ par u^- , on a

$$(2.43) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}, u^-(t) \right) - (\Delta u, u^-(t)) + \left(\int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t) g[u(\sigma)] d\sigma, u^-(t) \right) = (f(t, x, u(t)), u^-(t)),$$

mais on sait que $(u^+, u^-) = 0$ car $\text{supp}(u^-) \cap \text{supp}(u^+) = \emptyset$, donc (2.43) donne

$$(2.44) \quad -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla u^-(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t) g[u(\sigma)] d\sigma, u^-(t) \right) = (f(t, x, u(t)), u^-(t)),$$

or on a choisi d'après (1.1)

$$(2.45) \quad g[u(\sigma)] = \Phi(|u(\sigma)|^2)u(\sigma)$$

ce qui donne

$$(2.46) \quad (g[u(\sigma)], u^-(t)) = (\Phi(|u(\sigma)|^2)u^+(\sigma), u^-(t)) - (\Phi(|u(\sigma)|^2)u^-(\sigma), u^-(t)).$$

Comme $\text{supp}(u^-) \cap \text{supp}(u^+) = \emptyset$, alors (2.46) devient

$$(2.47) \quad (g[u(\sigma)], u^-(t)) = -(\Phi(|u(\sigma)|^2)u^-(\sigma), u^-(t)).$$

D'autre part, d'après (1.1) concernant le choix de g , on a $\Phi(|u|^2) \geq 0$, car $ug(u) = \Phi(|u|^2)u^2 \geq 0$ et, par suite, en tenant compte des hypothèses H_2 sur γ , il vient

$$(2.48) \quad \left(\int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t) g[u(\sigma)] d\sigma, u^-(t) \right) \leq 0$$

et, vu la positivité de f par hypothèse, c'est-à-dire $f(t, x, \lambda) \geq 0$, pour tout (t, x, λ) dans $\mathbb{R}_+ \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, il en résulte

$$(2.49) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u^-(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left(\int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t) g[u(\sigma)] d\sigma, u^-(t) \right) \leq 0.$$

On en déduit

$$(2.50) \quad \frac{d}{dt} \|u^-(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$$

et, par intégration de (2.50) sur $(0, T)$, on obtient

$$(2.51) \quad \|u^-(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u^-(0)\|_{L^2(\Omega)}^2;$$

or $u_0(x) > 0$ donc $u^-(0) = 0$ et par suite, (2.51) permet de déduire $u^-(t) = 0$, pour tout $t \geq 0$ ce qui donne la positivité de u . Le théorème 2.1 est ainsi démontré.

3. Étude du comportement à l'infini de u solution du problème $\mathcal{P}_1$ et de sa dérivée u' — Stabilité.

Pour cette étude, on suivra un plan presque identique pour les deux cas, en énonçant certains lemmes servant à établir quelques inégalités *a priori*, utiles pour la suite, puis on effectuera ensuite un passage à la limite.

• Cas de $u(t)$.

3.1. Quelques lemmes préliminaires.

Lemme 3.1.1. *L'hypothèse H_2 étant vérifiée et si*

$$(3.1) \quad \sup_{\theta \in [-1, 0]} \left| \frac{\partial \gamma(\theta, t)}{\partial \theta} \right| \in L^2(\mathbb{R}_+) \text{ et } \sup_{\theta \in [-1, 0]} \left| \frac{\partial \gamma(\theta, t)}{\partial t} \right| \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

alors

$$(3.2) \quad \int_0^t \int_{s-1}^s \left| \frac{d}{ds} \gamma(\sigma - s, s) \right|^2 d\sigma ds < \infty.$$

Démonstration. Elle est évidente, en tenant compte de

$$(3.3) \quad \tilde{\gamma}(\sigma, s) = \frac{d}{ds} \gamma(\sigma - s, s) = - \frac{\partial \gamma(\theta, s)}{\partial \theta} + \frac{\partial \gamma(\theta, s)}{\partial s}$$

avec $\theta = \sigma - s$, (car $\frac{\partial \theta}{\partial s} = -1$) et, en utilisant (1.3), on déduit le lemme 3.1.1. $\square$

Lemme 3.1.2. *On se place dans les hypothèses du théorème 2.1 et du lemme 3.1.1 et on suppose que*

(3.4) *la dérivée partielle de $f(t, x, \lambda)$ par rapport à t existe ;*

(3.5) $\frac{\partial f}{\partial s}(s, x, v) \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ *pour tout v appartenant à un borné de $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$.*

Alors la solution approchée u_m du problème $\mathcal{P}_m^1$ vérifie en plus :

- i) u'_m *appartient à un borné de $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$;*
- ii) $\nabla u'_m$ *appartient à un borné de $L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$;*
- iii) u'_m *appartient à un borné de $L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))$.*

Démonstration. En dérivant formellement l'équation du problème $\mathcal{P}_m^1$ et comme, par hypothèse, $\gamma(-1, t) = 0$, on obtient

$$(3.6) \quad \begin{aligned} u''_m(t) - \Delta u'_m(t) = & - \int_{t-1}^t \frac{d}{dt} \gamma(\sigma - t, t) g[u_m(t)(\sigma)] d\sigma \\ & - \gamma(0, t) g[u_m(t)] + \frac{d}{dt} P_m f(t, x, u_m(t)) \end{aligned}$$

et, par suite, en multipliant (3.6) par $u'_m(t)$ dans la dualité et en utilisant l'inégalité de Schwarz, puis en intégrant sur $(0, t)$, il vient

$$(3.7) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|u'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \int_0^t \int_{s-1}^s \left| \frac{d}{ds} \gamma(\sigma - s, s) \right| \|g[u_m(\sigma)]\|_{L^2(\Omega)} \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)} d\sigma ds \\ & + \int_0^t |\gamma(0, s)| \|g[u_m(s)]\|_{L^2(\Omega)} \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ & + \int_0^t \int_\Omega \left| \frac{d}{ds} P_m f(s, x, u'_m(s, x)) \right| |u'_m(s, x)| dx ds. \end{aligned}$$

Compte tenu des estimations du lemme 2.1, plus précisément $u_m \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ et (2.18) c'est-à-dire $\|g[u_m(t)]\|_{L^2(\Omega)} \leq B \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}$ déduite de l'hypothèse H_2 , on obtient (les C désignant des constantes diverses indépendantes de m)

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq \frac{1}{2} \|u'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t |\gamma(0, s)| \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ & + C \int_0^t \int_{s-1}^s \left| \frac{d}{ds} \gamma(\sigma - s, s) \right| \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)} d\sigma ds \\ & + \int_0^t \int_\Omega \left| \frac{d}{ds} P_m f(s, x, u_m(s, x)) \right| |u'_m(s, x)| dx ds. \end{aligned}$$

Ensuite, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz au troisième terme du second membre de (3.8), puis on utilise la relation (1.3), ce qui donne

$$\begin{aligned}
(3.9) \quad & \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \leq \frac{1}{2} \|u'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{2} \int_0^t \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \quad + \frac{C}{2} \int_0^t \int_{s-1}^s \left| \frac{d}{ds} \gamma(\sigma - s, s) \right|^2 d\sigma ds \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f_m}{\partial \lambda}[s, x, u_m(s, x)] \right| |u'_m(s, x)|^2 dx ds \\
& \quad + \frac{C}{2} \int_0^t |\gamma(0, s)|^2 ds + \frac{C}{2} \int_0^t \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f_m}{\partial s}(s, x, u_m(s, x)) \right| |u'_m(s, x)| dx ds.
\end{aligned}$$

En tenant compte de (1.2) conséquence de H_3 sur f à savoir $\left| \frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial \lambda} \right| \leq |\varphi(t, x)|$ et, d'après l'estimation iii) du lemme 2.2 sur u'_m ($u'_m \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$), on obtient

$$\begin{aligned}
(3.10) \quad & \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u'_m(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|u'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \\
& \quad + \frac{C}{2} \int_0^t \int_{s-1}^s \left| \frac{d}{ds} g(\sigma - s, s) \right|^2 d\sigma ds + \frac{C}{2} \int_0^t |\gamma(0, s)|^2 ds \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f_m}{\partial s}(s, x, u_m(s, x)) \right| |u'_m(s, x)| dx ds \\
& \quad + \int_0^t \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|u'_m(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 ds.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$(3.11) \quad u'_m(0) = \Delta u_m(0) - \int_{-1}^0 \gamma(\sigma, 0) g[u_m(\sigma)] d\sigma + f_m(0, x, u_m(0))$$

($f_m(0, x, u_m(0))$ a un sens, voir ci-dessous) et, en vertu des hypothèses sur $u_0 \in D(-\Delta)$, $u^0(t, x)$ appartient à $L^2(-1, 0; D(-\Delta))$ et $f(t, x, u)$ est borné dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, on a

$$(3.12) \quad \begin{cases} \|\Delta u_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{constante}, \\ \left\| \int_{-1}^0 \gamma(\sigma, 0) g[u_m(s)] ds \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{constante}, \\ \|f_m(0, \cdot, u_m(0))\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{constante}, \end{cases}$$

et par suite

$$(3.13) \quad \|u'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{constante},$$

l'utilisation du lemme 3.1.1 et de l'inégalité (3.13) dans (3.10) permet d'avoir

$$\begin{aligned}
 (3.14) \quad & \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
 & \leq C + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f_m}{\partial s}(s, x, u_m(s, x)) \right| |u'_m(s, x)| dx ds \\
 & \quad + \int_0^t \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.
 \end{aligned}$$

De plus on a supposé, selon (3.5), que $\frac{\partial f}{\partial s}(s, x, v) \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ pour toute fonction v appartenant à un borné de $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$; ainsi $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ alors f est continue de $[0, T]$ dans $L^2(\Omega)$ (voir J. L. Lions et E. Magenes, 1968) par suite $f_m(0, x, u_m(0))$ est bien définie et on obtient

$$\begin{aligned}
 (3.15) \quad & \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
 & \leq C + \frac{1}{2} \int_0^t \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial f_m}{\partial s}(s, \cdot, u_m(s)) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
 & \quad + \int_0^t \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.
 \end{aligned}$$

Comme on sait déjà, d'après le lemme 2.2, que $u'_m \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ alors (3.15) devient

$$\begin{aligned}
 (3.16) \quad & \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
 & \leq C + \int_0^t \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds
 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(3.17) \quad \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C + 2 \int_0^t \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$$

et, d'après le lemme de Gronwall, il en résulte

$$(3.18) \quad \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \exp \left(\int_0^T \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds \right).$$

Finalement, d'après (3.17) et (3.16), u'_m (resp. $\nabla u'_m$) appartient à un borné de $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ (resp. $L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$) ce qui donne i) et ii) du lemme 3.1.2.

Par ailleurs, le lemme 2.1 a permis d'avoir $u'_m \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ et ce résultat joint à ce qui précède entraîne u'_m appartient à un borné de $L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))$ ce qui n'est autre que iii) du lemme 3.1.2. $\square$

Lemme 3.1.3. *Sous les hypothèses du lemme 3.1.2, la solution u du problème $\mathcal{P}_1$ vérifie :*

- i) $u \in C^0(\mathbb{R}_+; D(-\Delta));$
- ii) $u' \in L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega));$
- iii) $u'' \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\Omega)).$

Démonstration. D'après le ii) du lemme 2.2, u_m appartient à un borné de $L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))$ alors, de la suite $\{u_m\}$, on peut extraire une sous-suite, notée encore $\{u_m\}$, telle que

$$(3.19) \quad u_m \rightarrow u \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)) \text{ faible.}$$

D'autre part, à partir de iii) du lemme 3.1.2, on a u'_m appartient à un borné de $L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))$ et, quitte à extraire une sous-suite (notée encore $\{u'_m\}$), alors

$$(3.20) \quad u'_m \rightarrow u' \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)) \text{ faible}$$

et, à l'aide d'un raisonnement analogue à celui qui a conduit à (2.33), on a

$$(3.21) \quad u_m \rightarrow u \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \text{ fort.}$$

D'après le i) du lemme 3.1.2 on a

$$(3.22) \quad u'_m \rightarrow u' \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \text{ faible } *.$$

On dérive l'équation du problème $\mathcal{P}_1$, (avec $\gamma(-1, t) = 0$) ce qui donne

$$(3.23) \quad \begin{aligned} u''(t) - \Delta u'(t) = & - \int_{t-1}^t \frac{d}{dt} \gamma(\sigma - t, t) g[u(\sigma)] d\sigma - \gamma(0, t) g[u(t)] \\ & + \frac{\partial f}{\partial t}(t, x, u(t)) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}[t, x, u(t)] u'(t). \end{aligned}$$

On pose :

$$u' = v;$$

$$F(t, x, u) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}[t, x, u(t)];$$

$$F^*(t, x, u) = - \int_{t-1}^t \frac{d}{dt} \gamma(\sigma - t, t) g[u(\sigma)] d\sigma - \gamma(0, t) g[u(t)] + \frac{\partial f}{\partial t}(t, x, u(t)),$$

alors on considère le problème : trouver $v(t)$ tel que

$$(3.24) \quad \begin{cases} v'(t) - \Delta v(t) = F(t, x, u)v(t) + F^*(t, x, u), \\ v(0) = u'(0) = \Delta u(0) - \int_{-1}^0 \gamma(\sigma, 0) g[u(\sigma)] d\sigma + f(0, x, u(0)). \end{cases}$$

Tout d'abord, en vertu des hypothèses, $f(t, x, u(t))$ est continue de $[0, T]$ dans $L^2(\Omega)$ et par suite $f(0, x, u(0))$ est bien définie. Comme $u(0) \in D(-\Delta)$, $\int_{-1}^0 \gamma(\sigma, 0) g[u(\sigma)] d\sigma \in L^2(\Omega)$ et $f(0, x, u(0)) \in L^2(\Omega)$ alors $u'(0) \in L^2(\Omega)$ et de même d'après les

estimations sur u et les hypothèses sur f, γ, g nous avons $F(t, x, u) \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$, $F^*(t, x, u) \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ d'où, d'après un théorème classique, le problème ci-dessus admet une solution

$$v \in L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$$

ce qui donne ii) du lemme.

D'une part l'équation du problème $\mathcal{P}_1$ permet d'avoir

$$(3.25) \quad -\Delta u(t, x) = f(t, x, u(t, x)) - \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t) g[u(\sigma, x)] d\sigma.$$

D'autre part, d'après les résultats précédents,

$$(3.26) \quad f(t, x, u(t, x)) - \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \int_{t-1}^t \gamma(\sigma - t, t) g[u(\sigma, x)] d\sigma \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$$

et on sait que $A = -\Delta$ est un isomorphisme de $D(A)$ dans $H = L^2(\Omega)$ d'où $u \in C^0(\mathbb{R}_+; D(A))$, ainsi on obtient i) du lemme.

De l'équation (3.24), on tire

$$(3.27) \quad v'(t) = -\Delta v(t) + F(t, x, u)v(t) + F^*(t, x, u).$$

Comme $v \in L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))$ et $A = -\Delta$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ d'où l'on déduit de (3.27) que $v \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\Omega))$, et par suite $u'' \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\Omega))$, ce qui donne iii) du lemme 3.1.3. $\square$

3.2. Théorème du comportement de $u(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

Théorème 3.1. *On suppose que les hypothèses du théorème 2.1 et du lemme 3.1.2 sont satisfaites. Soit u la solution du problème $\mathcal{P}_1$, alors on a*

$$(3.28) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Démonstration. D'après le théorème 2.1, u est borné dans $L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))$ et a fortiori dans $L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$. Il en est de même de u' d'après le ii) du lemme 3.1.3. On peut en déduire que

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \left| \|u(t_2)\|_{L^2(\Omega)} - \|u(t_1)\|_{L^2(\Omega)} \right|^2 &\leq \|u(t_2) - u(t_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq (t_2 - t_1) \int_0^\infty \|u'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds < \infty \end{aligned}$$

donc $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}$ est uniformément continue et appartient à $L^2(\mathbb{R}_+)$ et, d'après un lemme classique, on en déduit que $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, ce qui donne le théorème 3.1. $\square$

• Cas de $u'(t)$.

3.3. Lemme préliminaire.

Lemme 3.3.4. *On se place dans le cadre du théorème 2.1 et du lemme 3.1.2 et si, de plus, on choisit*

$$(3.30) \quad u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap H^s(\Omega) = D(-\Delta) \cap H^s(\Omega), \quad s \geq \frac{3}{2},$$

$$(3.31) \quad f(0, x, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \cap H^1(\Omega),$$

alors la solution u_m du problème approché $\mathcal{P}_m^1$ vérifie en plus :

- i) $u_m'' \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$;
- ii) $\nabla u_m' \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$.

Démonstration. On dérive et on multiplie l'équation du problème $\mathcal{P}_m^1$ dans la dualité par u_m''

$$(3.32) \quad \begin{aligned} & (u_m''(t), u_m''(t)) - (\Delta u_m'(t), u_m''(t)) \\ &= - \left(\int_{t-1}^t \frac{d}{dt} \gamma(\sigma - t, t) g[u_m(\sigma)] d\sigma, u_m''(t) \right) \\ & \quad - (\gamma(0, t) g[u_m(t)], u_m''(t)) + \left(\frac{d}{dt} P_m f(t, x, u_m(t)), u_m''(t) \right). \end{aligned}$$

Après avoir utilisé l'inégalité de Schwarz, on intègre sur $(0, t)$ et, en tenant compte de l'estimation du lemme 2.2 et du lemme 3.1.2. i), on obtient

$$(3.33) \quad \begin{aligned} & \int_0^t \|u_m''(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|\nabla u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \int_0^t \int_{s-1}^s \left| \frac{d}{ds} \gamma(\sigma - s, s) \right| \|u_m''(s)\|_{L^2(\Omega)} d\sigma ds + \frac{1}{2} \|\nabla u_m'(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + C \int_0^t \left\| \frac{\partial f_m}{\partial \lambda}[s, \cdot, u_m(s)] \right\|_{L^2(\Omega)} \|u_m''(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ & \quad \quad \quad \int_0^t \left\| \frac{\partial f_m}{\partial s}(s, \cdot, u_m(s)) \right\|_{L^2(\Omega)} \|u_m''(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ & \quad + C \int_0^t \gamma(0, s) \|u_m''(s)\|_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

On tient compte de l'hypothèse H_3 , et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz au premier terme du second membre de (3.33), il vient

$$(3.34) \quad \begin{aligned} & \int_0^t \|u_m''(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|\nabla u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \int_0^t \left\| \frac{\partial f_m}{\partial s}(s, \cdot, u_m(s)) \right\|_{L^2(\Omega)} \|u_m''(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \|\nabla u'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \gamma(0, s) \|u''_m(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\
& + C \int_0^t \|u''_m(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \sqrt{\int_{s-1}^s \left| \frac{d}{ds} \gamma(\sigma - s, s) \right|^2 d\sigma} \\
& + C \int_0^t \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|u''_m(s)\|_{L^2(\Omega)} ds.
\end{aligned}$$

En utilisant la relation (1.3) aux premier, troisième, quatrième et cinquième termes de (3.34) et après simplification, on obtient

$$\begin{aligned}
(3.35) \quad & \frac{1}{2} \int_0^t \|u''_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|\nabla u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq \frac{1}{2} \|\nabla u'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{2\rho} \int_0^t \gamma(0, s)^2 ds \\
& + \frac{3C\rho}{2} \int_0^t \|u''_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{C}{2\rho} \int_0^t \int_{s-1}^s \left| \frac{d}{ds} \gamma(\sigma - s, s) \right|^2 d\sigma ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial f_m}{\partial s}(s, \cdot, u_m(s)) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{C}{2\rho} \int_0^t \|\varphi(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.
\end{aligned}$$

On choisit $\rho = 1/4C$ et, grâce à l'hypothèse H_2 sur γ et au lemme 3.3, on obtient

$$\begin{aligned}
(3.36) \quad & \frac{1}{4} \int_0^t \|u''_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|\nabla u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C + \frac{1}{2} \|\nabla u'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq C + \frac{1}{2} \|u'_m(0)\|_{H^1(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Or

$$(3.37) \quad \|u'_m(0)\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et d'après les conditions initiales sur u_0 et $f(0, x, \lambda)$, on a

$$(3.38) \quad \|u'_m(0)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \text{constante}.$$

On déduit

$$(3.39) \quad \frac{1}{4} \int_0^t \|u''_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|\nabla u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C$$

ce qui donne

$$(3.40) \quad \begin{cases} u''_m \text{ appartient à un borné de } L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)), \\ \nabla u'_m \text{ appartient à un borné de } L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)). \end{cases}$$

Comme $u' \in L^2(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$ et $u'' \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$, alors u' est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $L^2(\Omega)$ et ainsi on obtient le résultat du lemme 3.3.4. $\square$

3.4. Théorème du comportement de $u'(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

Théorème 3.2. *On se place dans les hypothèses du théorème 3.1 et du lemme 3.3.4 alors la dérivée u' (au sens des distributions) de la solution u du problème $\mathcal{P}_1$ est telle que*

$$(3.41) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Démonstration. On a déjà démontré pour le lemme 3.1.2 que u'_m appartient à un borné de $L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))$ d'où, de la suite $\{u'_m\}$, on peut extraire une sous-suite, encore notée $\{u'_m\}$, telle que

$$(3.42) \quad u'_m \rightarrow u' \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)) \text{ faible.}$$

D'autre part, d'après le lemme 3.3.4, u''_m appartient à un borné de $L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$, donc de la suite $\{u''_m\}$ on peut extraire une sous-suite encore notée $\{u''_m\}$ telle que

$$(3.43) \quad u''_m \rightarrow u'' \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \text{ faible}$$

et, en utilisant encore un raisonnement analogue à celui qui a conduit à (2.33), on obtient

$$(3.44) \quad u'_m \rightarrow u' \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \text{ fort}$$

d'où l'on déduit que $\|u'(t)\|_{L^2(\Omega)}$ est uniformément continue et appartient à $L^2(\mathbb{R}_+)$ et par suite, on a la limite proposée. $\square$

3.5. Stabilité. D'après (1.2), on a $f(t, x, 0) = 0$ qui est une conséquence de l'hypothèse H_3 , alors $u = 0$ est une solution du problème $\mathcal{P}_1$; par suite $u = 0$ est une solution d'équilibre et, selon (3.28), c'est une solution d'équilibre asymptotiquement stable.

Conclusion. On a retrouvé les résultats partiels de Nohel-Levin dans le cas de l'équation scalaire pour u et u' . Quant à u'' , il est encore l'objet de notre étude qui consiste en une extension de la méthode de Nohel-Levin à l'instar de C. M. Dafermos (1970). De plus, on a trouvé que $u = 0$ est une solution d'équilibre asymptotiquement stable.

English extended abstract. Let Ω be an open bounded subset of $\mathbb{R}^2$ of boundary $\partial\Omega = \Gamma$ smooth enough. We set $Q_T = I \times \Omega$ where $I =]0, T[$ is an interval of $\mathbb{R}$ ($T > 0$, finite or not). We consider a function g from $\mathbb{R}$ into $\mathbb{R}$ of class C^0 with the hypothesis H_1 , g of the form (1.1) and a function $\gamma(\theta, t)$ verifying H_2 . Finally, we consider a Caratheodory function f from $\mathbb{R}_+ \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ into $\mathbb{R}$, verifying H_3 (see section 1 for the hypotheses). We infer from the hypotheses on f the formula (1.2).

We want to find u a solution of the problem $\mathcal{P}_1$. We obtain a result of the existence and uniqueness of the solution of this equation and of its positivity. We have the following results :

Theorem 2.1. *Under the hypotheses H_1 , H_2 and H_3 the problem $\mathcal{P}_1$ admits a unique solution u verifying*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)).$$

Moreover, if

$$f(t, x, \lambda) > 0 \text{ for every } (t, x, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \quad u_0(x) > 0$$

then $u \geq 0$ almost everywhere.

We use an approximate system $\mathcal{P}_m^1$ (see section 2.2) by Galerkin's method to prove this theorem. We get *a priori* estimates using a theorem of Baiocchi (1967) as lemma 2.3, and by a passage to the limit we obtain the following results :

Existence.

1. u_m converges to u in $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ weak * ;
2. u_m converges to u in $L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ strongly and also in measure ;
3. $g(u_m)$ converges to $g(u)$ a.e. in $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ as g is continuous ;
4. f being a Caratheodory function, $f_m(t, x, u_m)$ converges to $f(t, x, u)$ in measure.

Uniqueness. Let u_1 and u_2 be two solutions of problem $\mathcal{P}_1$ and set $w = u_1 - u_2$. By using the hypotheses on g, γ, f , and the lemma 2.1, we get an estimate of the form

$$\|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 8 \int_0^t \|\varphi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 32B^2 \left(\int_0^T \tilde{\gamma}(s) \|w(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \right)^2$$

then by applying the theorem of Baiocchi (lemma 2.3), we get the uniqueness.

Positivity. We assume $f(t, x, \lambda) > 0, \forall (t, x, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ and $u(0, x) = u_0(x) > 0$ then, setting $u^+ = \sup(u, 0)$ and $u^- = \sup(-u, 0)$ and using a classical method, we obtain the result from the positivity of $ug(u), \gamma$ and f .

Asymptotic behaviour of the solutions.

Theorem 3.1. *Under the hypotheses of theorem 2.1 and lemma 3.1.2, the solution u of problem $\mathcal{P}_1$, verifies*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Theorem 3.2. *Under the hypotheses of theorem 3.1 and lemma 3.3.4, the derivative u' (in the sense of distributions) of the solution u of problem $\mathcal{P}_1$ is such that*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Stability. Since, from (1.2), we have $f(t, x, 0) = 0$ then $u = 0$ is a solution of the problem $\mathcal{P}_1$ and thus $u = 0$ is an equilibrium solution, which is asymptotically stable from (3.28).

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Artola, *Sur les perturbations des équations d'évolution - Application à des problèmes de retard*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) (1969), 137–253.
2. C. Baiocchi, *Sulle equazioni differenziali astratte lineari del primo e del secondo ordine negli spazi di Hilbert*, Ann. Mat. Pura Appl.(4) **76** (1967), 233–304.

3. V. Barbu, *Nonlinear Volterra equations in a Hilbert space*, SIAM J. Math. Anal. **6** (1975), 728–741.
4. M. G. Crandall, S. O. Londen et J. A. Nohel, *An abstract nonlinear Volterra Integrodifferential Equation*, J. Math. Anal. Appl. **64** (1978), 701–735.
5. C. M. Dafermos, *An abstract Volterra equation with application to linear viscoelasticity*, J. Differential Equations **7** (1970), 554–569.
6. H. Engler, *On some parabolic integro-differential equation: Existence and asymptotics of solutions*, Equadiff 82 (Würzburg, 1982), pp. 161–167; Lecture Notes in Math., vol. 1017, Springer, Berlin, 1983.
7. A. Halannay, *On the asymptotic behavior of solutions of an Integro-differential Equation*, J. Math. Anal. Appl. **10** (1965), 319–324.
8. J. K. Hale, *Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional-differential equations*, J. Differential Equations **1** (1965), 452–482.
9. J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer Verlag, New York–Heidelberg, 1977.
10. J. K. Hale et K. P. Rybakowski, *On a gradient-like integro-differential equation*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **92** (1982), 77–85.
11. K. B. Hannsgen, *On a nonlinear Volterra Equation*, Michigan Math. J. **16** (1969), 365–376.
12. S. M. Kuen et K. P. Rybakowski, *Boundedness of solutions of a system of integro-differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **112** (1985); no. 2, 378–390.
13. J. J. Levin, *The asymptotic behavior of the solution of a Volterra equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 534–541.
14. J. J. Levin et J. Nohel, *On a nonlinear delay equation*, J. Math. Anal. Appl. **8** (1964), 31–44.
15. J. J. Levin et J. Nohel, *Perturbations of a nonlinear Volterra equation*, Michigan Math. J. **12** (1965), 431–447.
16. J. J. Levin et J. Nohel, *A system of nonlinear integrodifferential equations*, Michigan Math. J. **13** (1966), 257–270.
17. J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
18. J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
19. S. O. Londen, *The qualitative behavior of the solutions of a nonlinear Volterra equation*, Michigan Math. J. **18** (1971), 321–330.
20. R. C. MacCamy et J. S. Wong, *Stability theorems for some functional equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1972), 1–37.
21. R. K. Miller, *Asymptotic behavior of nonlinear delay-differential equations*, J. Differential Equations **1** (1965), 293–305.
22. J. A. Nohel, *La théorie géométrique d'une classe d'équations non linéaires différentielles avec arguments retardés*, Enseignement Math. (2) **12** (1966), 173–182.
23. J. A. Nohel, *Un système non-linéaire intégro-différentiel de la dynamique des réacteurs nucléaires*, Enseignement Math. (2) **12** (1966), 165–172.
24. W. M. Oliva, *The Levin-Nohel equation on the torus*, Functional differential equations and bifurcation (A. F. Izé, ed.), pp. 317–321; Lecture notes in Math., vol. 799, Springer, Berlin, 1980.
25. K. P. Rybakowski, *Irreducible invariant sets in asymptotically linear functional-differential equations*, Boll. Un. Mat. Ital. B (6) **3** (1984), 245–271.
26. I. Segal, *Non-linear semi-groups*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), 339–364.
27. I. Segal, *The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction*, Bull. Soc. Math. France **91** (1963), 129–135.

28. O. J. Staffans, *Nonlinear Volterra integral equations with positive definite kernels*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975), 103-108.

M. OULAIBA

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

351, COURS DE LA LIBÉRATION,

33405 TALENCE CEDEX

FRANCE