

PERTURBATIONS D'UN GÉNÉRATEUR INFINITÉSIMAL PAR UN OPÉRATEUR DÉPENDANT DU TEMPS

ODO DIEKMANN ET MOHAMMED FILALI

RÉSUMÉ. On considère ici des perturbations d'un générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe C_0 sur un Banach X par un opérateur dépendant du temps. On montre qu'une solution de la formule de la variation de la constante définit une famille d'évolution. L'étude de la continuité et de la différentiabilité de cette famille est aussi présentée dans ce travail.

ABSTRACT. We consider time-dependent perturbations of generators of strongly continuous semigroups on a Banach space. We show that the solutions of a generalized variation-of-constants formula define an evolutionary system. We investigate continuity and differentiability of this evolutionary system.

1. Introduction. Plusieurs modèles mathématiques écrits sous forme d'équations différentielles peuvent être mis sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = A(t)u(t) ; & t > s, \\ u(s) = x, \end{cases} \quad (1.1)$$

où x est un élément d'un espace de Banach X et $\{A(t)\}_{t \geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires, non nécessairement bornés dans X . Dans ce papier, on s'intéresse au cas hyperbolique, dans lequel $A(t)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe C_0 sur X . Pour le cas parabolique, on peut voir [Ka, Pa, Ta, Yo] et d'autres. Dans le cas autonome $A(t) \equiv A$, le problème (1.1) admet une solution unique u , de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans X , vérifiant $u(t) \in \mathcal{D}(A)$. De plus, cette solution est donnée par $u(t) = T(t-s)x$, où $T(t)$ est le semi-groupe de classe C_0 sur X , dont le générateur infinitésimal est A . Le cas non autonome est plus complexe. Dans ce cas, si le problème (1.1) admet une solution, alors celle-ci est donnée par une famille d'évolution $(U(t, s))_{s \leq t}$. L'existence d'une telle famille nécessite des conditions délicates (les conditions de Kato). La difficulté du problème réside dans le fait qu'il n'y a pas de conditions nécessaires et suffisantes qui garantissent l'existence d'une famille $(A(t))_{0 \leq t \leq T}$ associée à la famille $(U(t, s))_{s \leq t}$. En d'autres termes, il n'y a pas de théorème analogue à celui de Hille-Yosida, qui caractérise de façon unique une famille d'évolution.

Reçu le 15 juillet 1995 et, sous forme définitive, le 22 octobre 1997.

Dans ce papier, on s'intéresse au cas où $A(t) = A_0 + B(t)$, où A_0 est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $T_0(t)$ de classe C_0 sur X . Phillips [Ph] considère le cas où $B(t)$ est une famille d'opérateurs fortement continûment différentiables sur $\mathbb{R}^+$. Dans ce cas il existe une famille d'opérateurs linéaires $U(t)$, fortement continues sur $\mathbb{R}^+$ telle que $U(0) = \text{Id}$ et, pour tout x dans $\mathcal{D}(A)$, $U(t)x$ soit fortement continûment différentiable et

$$\frac{d}{dt}U(t)x = [A_0 + B(t)]U(t)x.$$

Kobayasi [Ko] retrouve le résultat de Kato en remplaçant la continuité en norme de $A(\cdot)$ par la continuité forte.

Un résultat similaire est obtenu par Ishii [Is] en utilisant la méthode d'approximation de Yosida en remplaçant la continuité forte de $A(t)$ par la mesurabilité forte.

Dans notre travail on suppose que $(B(t))_{t \geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés dans X . Plusieurs problèmes utilisent ce type de perturbation. On cite à titre d'exemples, les équations de populations structur es par l'âge, les équations différentielles et les équations à retard. Dans le paragraphe 2, on définit une famille d'évolution. Dans le paragraphe 3, on montre qu'en perturbant A_0 par une famille $(B(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés dans un Banach X , fortement continus en t , on obtient une famille d'évolution, solution d'une formule de la variation de la constante. Finalement, dans le paragraphe 4, on montre que cette famille est fortement continûment différentiable en t définie sur $\mathcal{D}(A_0)$ à valeurs dans $\mathcal{D}(A_0)$, dans le cas où $B(t)$ vérifie certaines conditions.

2. Familles d'évolution.

Définition 2.1. Une famille $(U(t, s))_{0 \leq s \leq t \leq T}$ d'opérateurs linéaires bornés dans un Banach X est appelée famille d'évolution fortement continue, si on a les conditions suivantes :

- a) $U(t, r)U(r, s) = U(t, s)$ et $U(t, t) = \text{Id}$, $0 \leq s \leq t \leq T$;
- b) $(t, s) \mapsto U(t, s)$ est fortement continue sur $D = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2, s \leq t\}$;
- c) il existe des constantes $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\|U(t, s)\| \leq Me^{\omega(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Exemples 2.2. 1. Pour $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe de classe C_0 sur un Banach X , la famille $(U(t, s))_{s \leq t}$ définie par :

$$U(t, s) = T(t - s)$$

est une famille d'évolution, fortement continue.

2. Pour $(Q(t))_{t \in \mathbb{R}}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés dans un Banach X telle que $(Q(t))_{t \in \mathbb{R}}$ et $(Q(t)^{-1})_{t \in \mathbb{R}}$ sont inversibles, fortement continues, alors la famille $(U(t, s))_{s \leq t}$ définie par :

$$U(t, s) = Q(t)Q(s)^{-1}$$

est une famille d'évolution, fortement continue.

Remarques 2.3. La famille $(U(t, s)^*)_{s \leq t}$ définie sur X^* par :

$$U(t, s)^* = U^*(s, t) ; \quad (t, s) \in D$$

est une famille d'évolution vérifiant (a) et (c) de la définition (2.1), mais pas nécessairement (b). En effet, si X n'est pas réflexif, l'opérateur $T^*(t)$ défini dans l'exemple (1) n'est pas nécessairement fortement continu.

Pour l'exemple (2), il suffit de prendre $X = L^2(\mathbb{R}^+)$ et

$$Q(s) = \begin{cases} \text{Id} - \frac{1}{2}V\left(\frac{1}{|s|}\right) & \text{si } s \neq 0, \\ \text{Id} & \text{si } s = 0, \end{cases}$$

où V est défini par :

$$V(t)f(r) = V(r+t) ; \quad f \in X, \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } r \geq 0.$$

3. Formule de la variation de la constante. Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'existence d'une famille d'évolution, solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = A_0u(t) + B(t)u(t), & 0 < s < t < T \\ u(s) = x. \end{cases} \quad (3.1)$$

Proposition 3.1. Soit A_0 le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $T_0(t)$ de classe C_0 sur un Banach X vérifiant $\|T_0(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Si $B(t)$ est un opérateur linéaire dans X , fortement continu sur $[0, T]$ et vérifiant $\|B(t)\| \leq B$, pour $t \in [0, T]$, alors il existe une famille d'évolution fortement continue $U(t, s)$ pour $0 \leq s \leq t \leq T$, solution de la formule de la variation de la constante suivante :

$$U(t, s)x = T_0(t-s)x + \int_s^t T_0(t-\tau)B(\tau)U(\tau, s)x \, d\tau, \quad x \in X. \quad (3.2)$$

De plus on a :

$$\|U(t, s)\| \leq Me^{(\omega+BM)(t-s)}. \quad (3.3)$$

Preuve. Soit $U_0(t, s) = T_0(t-s)$. On pose, pour $n \geq 0$,

$$U_{n+1}(t, s)x = \int_s^t T_0(t-\tau)B(\tau)U_n(\tau, s)x \, d\tau, \quad x \in X. \quad (3.4)$$

On montre par récurrence que l'application :

$$(t, s) \mapsto U_n(t, s)$$

est fortement continue, pour $0 \leq s \leq t \leq T$ et que l'on a :

$$\|U_n(t, s)\| \leq M^{n+1}B^n e^{\omega(t-s)} \frac{(t-s)^n}{n!}. \quad (3.5)$$

Si on définit la famille $U(t, s)$ par

$$U(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t, s), \quad (3.6)$$

alors cette série converge dans X , pour la topologie uniforme et elle est fortement continue, pour $0 \leq s \leq t \leq T$, vérifiant (3.2) et (3.3). Un calcul analogue à celui utilisé dans [Ka2, Theorem 5.5], montre que $U(t, s)$ vérifie (a) et (c) de la définition 2.1. Pour l'unicité on utilise le lemme de Gronwall. $\square$

Proposition 3.2. *Soient A_0 et $B(t)$ des opérateurs linéaires sur un Banach X vérifiant les hypothèses de la proposition 3.1. La famille $(U(t, s))_{0 \leq s \leq t \leq T}$ solution de (3.2), vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} A_1) \quad & \frac{\partial^+}{\partial t} U(t, s)x|_{t=s} = [A_0 + B(s)]x, \quad \text{pour } x \in \mathcal{D}(A_0), \\ A_2) \quad & \frac{\partial}{\partial s} U(t, s)x = -U(t, s)[A_0 + B(s)]x, \quad \text{pour } x \in \mathcal{D}(A_0). \end{aligned}$$

Preuve. D'après (3.2) on a

$$\begin{aligned} U(t, s)x - T_0(t-s)x &= \int_s^t T_0(t-\tau)B(\tau)U(\tau, s)x \, d\tau, \quad x \in X \\ &= \int_0^{t-s} T_0(\tau)B(t-\tau)U(t-\tau, s)x \, d\tau, \quad x \in X. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Et comme on a

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{t-s} \int_0^{t-s} T_0(\tau)B(t-\tau)U(t-\tau, s)x \, d\tau - \frac{1}{t-s} \int_0^{t-s} T_0(\tau)B(s)x \, d\tau \right\| \\ & \leq \frac{1}{t-s} \left[\left\| \int_0^{t-s} T_0(\tau)B(t-\tau)[U(t-\tau, s)x - x] \, d\tau \right\| \right. \\ & \quad \left. + \left\| \int_0^{t-s} T_0(\tau)[B(t-\tau) - B(s)]x \, d\tau \right\| \right] \\ & \leq \sup_{0 \leq \tau \leq t-s} \|T_0(\tau)B(t-\tau)\| \|U(t-\tau, s)x - x\| \\ & \quad + \sup_{0 \leq \tau \leq t-s} \|T_0(\tau)\| \|B(t-\tau)x - B(s)x\|, \end{aligned}$$

alors d'après la continuité de $B(t)$ et de $U(t, s)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{(t-s) \rightarrow 0} \frac{1}{t-s} \int_0^{t-s} T_0(\tau)B(t-\tau)U(t-\tau, s)x \, d\tau \\ = \lim_{(t-s) \rightarrow 0} \frac{1}{t-s} \int_0^{t-s} T_0(\tau)B(s)x \, d\tau. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Par conséquent, pour $x \in \mathcal{D}(A_0)$, on a :

$$\lim_{(t-s) \rightarrow 0} \frac{U(t, s)x - T_0(t-s)x}{t-s} = B(s)x, \quad (3.9)$$

ce qui signifie que

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{U(t, s)x - x}{t - s} = [A_0 + B(s)]x, \quad x \in \mathcal{D}(A_0). \quad (3.10)$$

Pour $x \in \mathcal{D}(A_0)$ et $h > 0$, on a

$$\frac{1}{h}[U(t, s-h) - U(t, s)]x = U(t, s) \frac{[U(s, s-h)x - x]}{h}. \quad (3.11)$$

En utilisant (3.10) on obtient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}[U(t, s-h)x - U(t, s)x] = U(t, s)[A_0 + B(s)]x. \quad (3.12)$$

De façon analogue,

$$\frac{1}{h}[U(t, s) - U(t, s+h)]x = U(t, s+h) \frac{[U(s+h, s)x - x]}{h}. \quad (3.13)$$

Comme $U(t, s)$ est continue, pour $0 \leq s \leq t \leq T$ et que $\|U(t, s+h)\|$ est bornée, pour $0 < h \leq 1$, alors on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}[U(t, s) - U(t, s+h)]x = U(t, s)[A_0 + B(s)]x. \quad (3.14)$$

D'où A_2 . $\square$

Lemme 3.3. Soient A_0 et $B(t)$ des opérateurs linéaires sur un Banach X vérifiant les hypothèses de la proposition 3.1. Il y a équivalence des propriétés suivantes :

$B_1)$ $x \in \mathcal{D}(A_0)$,

$B_2)$ $\frac{U(t, s)x - x}{t - s}$ converge quand $(t - s) \rightarrow 0$.

Preuve. En utilisant (3.2) et (3.8), on obtient :

$$\lim_{(t-s) \rightarrow 0} \frac{U(t, s)x - x}{t - s} \text{ existe, si et seulement si } \lim_{(t-s) \rightarrow 0} \frac{T_0(t-s)x - x}{t - s} \text{ existe.}$$

Ce qui est équivalent à $x \in \mathcal{D}(A_0)$. $\square$

Lemme 3.4. Soient A_0 et $B(t)$ des opérateurs linéaires sur un Banach X vérifiant les hypothèses de la proposition 3.1. Il y a équivalence des propriétés suivantes :

$C_1)$ $U(t, s)\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A_0)$, pour $0 \leq s \leq t \leq T$,

$C_2)$ l'application $t \mapsto U(t, s)x$ est différentiable et satisfait

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, s)x = [A_0 + B(t)]U(t, s)x, \quad x \in \mathcal{D}(A_0), \quad s \leq t \leq T \text{ et } s \in [0, T[.$$

Preuve. Pour $h > 0$ et $x \in \mathcal{D}(A_0)$, on a

$$\frac{U(t+h, s)x - U(t, s)x}{h} = \frac{1}{h}[U(t+h, t)U(t, s)x - U(t, s)x]. \quad (3.15)$$

L'équivalence est établie en utilisant (3.15) et le lemme 3.3. $\square$

Lemme 3.5. Soient A_0 et $B(t)$ des opérateurs linéaires sur un Banach X vérifiant les hypothèses de la proposition 3.1. Il y a équivalence des propriétés suivantes :

- $D_1)$ $U(t, s)\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A_0)$, pour $0 \leq s \leq t \leq T$ et l'application $t \mapsto A_0U(t, s)x$ est continue de $[s, T]$ dans X , pour $s \in [0, T[$ et $x \in \mathcal{D}(A_0)$,
- $D_2)$ $\forall x \in \mathcal{D}(A_0)$ et $s \in [0, T[$, l'application $t \mapsto U(t, s)x$ est continûment différentiable de $[s, T]$ dans X .

Preuve. D'après le lemme 3.4, l'application $t \mapsto U(t, s)x$ est différentiable de $[s, T] \rightarrow X$, pour $s \in [0, T[$ et $x \in \mathcal{D}(A_0)$. De plus, on a $\frac{\partial}{\partial t}U(t, s)x = [A_0 + B(t)]U(t, s)x$. Comme $B(t)U(t, s)x$ est continue de $[s, T]$ dans X , la condition D_1 entraîne que l'application $t \mapsto [A_0 + B(t)]U(t, s)x$ est continue de $[s, T]$ dans X , d'où D_2 .

Réciproquement, l'application $t \mapsto U(t, s)x$ est continue, différentiable. Donc, d'après le lemme 3.4, on a

$$U(t, s)\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A_0).$$

Comme $[A_0 + B(t)]U(t, s)x$ est continue en $t \in [s, T]$, alors l'application $t \mapsto A_0U(t, s)x$ est continue de $[s, T]$ dans X . D'où D_1 . $\square$

4. Théorie de la perturbation. Avant de passer à un résultat de perturbation, on a besoin de la définition suivante :

Définition 4.1. On dit qu'un sous-espace E de X vérifie l'hypothèse (Z) si pour tout $s \in [0, T[$ et pour toute application $h : [s, T] \rightarrow X$, continue, dont l'image est contenue dans E , on a :

- $Z_1)$ $\int_s^t T_0(t - \tau)h(\tau) d\tau \in \mathcal{D}(A_0)$, $s \leq t \leq T$,
- $Z_2)$ l'application $t \mapsto A_0 \int_s^t T_0(t - \tau)h(\tau) d\tau$ est continue sur $[s, T]$.

Théorème 4.2. Soient A_0 et $B(t)$ des opérateurs linéaires sur un Banach X , vérifiant les hypothèses de la proposition 3.1. Si on suppose que l'image de $B(t)$ est incluse dans un espace E , vérifiant l'hypothèse (Z) , alors le problème (3.1) admet une solution classique unique, donnée par $u(t) = U(t, s)x$, où $(U(t, s))_{s \leq t}$ est la famille solution de (3.2).

Preuve. Soit $x \in \mathcal{D}(A_0)$. Comme $T_0(t)$ laisse invariant $\mathcal{D}(A_0)$, alors $T_0(t - s)x \in \mathcal{D}(A_0)$. Comme l'application $\tau \mapsto B(\tau)U(\tau, s)x$ est continue de $[s, T]$ dans X et que son image est incluse dans E , vérifiant (Z) , alors $\int_s^t T_0(t - \tau)B(\tau)U(\tau, s)x d\tau \in \mathcal{D}(A_0)$. D'après (3.2), on a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} A_0U(t, s)x &= A_0T_0(t - s)x + A_0 \int_s^t T_0(t - \tau)B(\tau)U(\tau, s)x d\tau, \\ &= T_0(t - s)A_0x + A_0 \int_s^t T_0(t - \tau)B(\tau)U(\tau, s)x d\tau, \quad x \in \mathcal{D}(A_0). \end{aligned} \tag{3.16}$$

En utilisant (Z_2) et le fait que l'application $t \mapsto T_0(t - s)A_0x$ est continue, pour $x \in \mathcal{D}(A_0)$, alors l'application :

$$t \mapsto A_0U(t, s)x$$

est continue de $[s, T]$ dans X . Donc d'après le lemme 3.5, l'application $t \mapsto U(t, s)x$ est continûment différentiable de $[s, T]$ dans X , pour $x \in \mathcal{D}(A_0)$ et $s \in [0, T[$. Ce qui signifie que $u(t) = U(t, s)x$ est une solution classique du problème (3.1). L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité de la construction de $U(t, s)$. $\square$

Remarque 4.3. Dans le cas où l'opérateur $B(t)$ est un opérateur linéaire borné de X dans $X^{\odot*}$, fortement continu de $[0, T]$ dans $X^{\odot*}$, on montre dans [Cea] que si X est $\odot$ -réflexif relativement à $T_0(t)$, alors il existe une famille d'évolution $U(t, s)$ sur X solution de :

$$U(t, s)x = T_0(t-s)x + \int_s^t T_0^{\odot*}(t-\tau)B(\tau)U(\tau, s)x d\tau, \quad x \in X \quad (3.17)$$

où $X^{\odot} = \{x^* \in X^*, \lim_{t \rightarrow 0} T^*(t)x^* = x^*\}$ et $T_0^{\odot}(t)$ est la restriction de $T_0^*(t)$ à $X^{\odot}$.

Dans le cas où l'image de $B(t)$ est incluse dans un sous-espace de $X^{\odot*}$ vérifiant les conditions suivantes :

- (i) $\int_s^t T_0^{\odot*}(t-\tau)h(\tau) d\tau \in \mathcal{D}(A_0^{\odot*})$; $s \leq t \leq T$, pour toute application continue $h : [s, T] \mapsto X^{\odot*}$,
- (ii) $\left\| A_0^{\odot*} \int_s^t T_0^{\odot*}(t-\tau)h(\tau) d\tau \right\| \leq M \sup_{s \leq \tau \leq T} \|h(\tau)\|$, $s \leq t \leq T$,

alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A_0^{\odot*})$, $s \in [0, T[$, la fonction $t \mapsto U(t, s)x$ est l'unique solution *-faible du problème :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = A_0^{\odot*}u(t) + B(t)u(t) ; & t > s, \\ u(s) = x^{\odot*}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Ce qui signifie que $u(s) = x^{\odot*}$, $u(t) \in \mathcal{D}(A_0^{\odot*})$, pour $s < t \leq T$ et que l'application :

$$t \mapsto \langle U(t, s)x, x^{\odot} \rangle ; \quad x^{\odot} \in X^{\odot}$$

est continûment différentiable à droite sur $]s, T]$ avec

$$\frac{d}{dt} \langle U(t, s)x, x^{\odot} \rangle = \left\langle \left(A_0^{\odot*} + B(t) \right) U(t, s)x, x^{\odot} \right\rangle ; \quad x^{\odot} \in X^{\odot}.$$

English extended abstract. This paper deals with the existence of a solution to the following Cauchy problem :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = [A_0 + B(t)]u(t), & 0 < s < t < T \\ u(s) = x \end{cases} \quad (3.1)$$

where A_0 is the infinitesimal generator of a semi-group $T_0(t)$ of class C_0 defined on a Banach space X and verifying $\|T_0(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$, $x \in X$ and $B(t)$ is a linear operator on X , strongly continuous on $[0, T]$. We show in Proposition 3.1

that, under these hypotheses, there exists a strongly continuous evolutionary system $(U(t, s))_{0 \leq s \leq t \leq T}$ which is a solution to the following variation-of-constants formula :

$$U(t, s)x = T_0(t - s)x + \int_s^t T_0(t - \tau)B(\tau)U(\tau, s)x \, d\tau, \quad x \in X. \quad (3.2)$$

Moreover, we show that

$$\|U(t, s)\| \leq Me^{(\omega + BM)(t-s)}. \quad (3.3)$$

In Proposition 3.2, we show that the system $(U(t, s))_{0 \leq s \leq t \leq T}$ satisfies the following properties :

$$\begin{aligned} A_1) \quad & \frac{\partial^+}{\partial t} U(t, s)x|_{t=s} = [A_0 + B(s)]x, \quad \text{for } x \in \mathcal{D}(A_0), \\ A_2) \quad & \frac{\partial}{\partial s} U(t, s)x = -U(t, s)[A_0 + B(s)]x, \quad \text{for } x \in \mathcal{D}(A_0). \end{aligned}$$

The following definition is then needed.

Definition 4.1. We say that a subspace E of X satisfies hypothesis (Z) if for every $s \in [0, T[$ and every continuous function $h : [s, T] \rightarrow X$ whose image is contained in E , we have

$$\begin{aligned} Z_1) \quad & \int_s^t T_0(t - \tau)h(\tau) \, d\tau \in \mathcal{D}(A_0), \quad s \leq t \leq T, \\ Z_2) \quad & \text{the function } t \mapsto A_0 \int_s^t T_0(t - \tau)h(\tau) \, d\tau \text{ is continuous on } [s, T]. \end{aligned}$$

We show, in Theorem 4.2, that if the image of $B(t)$ is included in a subspace E satisfying (Z) , then problem (3.1) admits a unique classical solution given by $u(t) = U(t, s)x$, where $U(t, s)$ is the evolutionary system satisfying (3.2).

BIBLIOGRAPHIE

- [Ba] J. M. Ball, *Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constants formula*, Proc. Amer. Math. Soc. **63** (1977), 370–373.
- [Cea] Ph. Clément, O. Diekmann, M. Gyllenberg, H. J. A. M. Heijmans and H. R. Thieme, *Perturbation theory for dual semigroups II. Time-dependent perturbations in the sun-reflexive case*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **109** (1988), 145–172.
- [D] O. Diekmann, *Perturbed dual semigroups and delay equations. Dynamics of infinite dimensional systems*, vol. F 37, Springer, Berlin-New York, 1987, pp. 67–73.
- [Is] S. Ishii, *Linear evolution equations $du/dt + A(t)u = 0$: a case where $A(t)$ is strongly uniform-measurable*, J. Math. Soc. Japan **34** (1982), 413–424.
- [Ka] T. Kato, *Linear evolution equations of hyperbolic type*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **17** (1970), 241–258.
- [Ka2] T. Kato and H. Tanabe, *On the abstract evolution equation*, Osaka Math. J. **14** (1962), 107–133.
- [Ke] H. Kellermann, *Linear evolution equation with time dependent domain*, Semesterbricht funktionalanalysis. Tübingen wintersemester (1985-1986).
- [Ko] K. Kobayasi, *On a theorem for linear evolution equations of hyperbolic type*, J. Math. Soc. Japan **31** (1979), 647–654.
- [Pa] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

- [Ph] R. S. Phillips, *Perturbation theory for semi-groups of linear operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 199–221.
- [Ta] H. Tanabe, *Equations of evolution*, 1979.
- [Yo] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

O. DIEKMANN

VAKGROEP - WISKUNDE BOSTBUS 80010

3508 TA UTRECHT UNIVERSITY

UTRECHT

THE NETHERLANDS

M. FILALI

UNIVERSITÉ MOHAMED 1^{er}

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

FACULTÉ DES SCIENCES

OUIDA

MAROC