

UNE MÉTHODE NON LINÉAIRE DE CONTRÔLE AVEC PÉNALISATION PAR L'ÉQUATION D'ÉTAT

JEAN-SÉBASTIEN LE BRIZAUT ET MARC POGU

RÉSUMÉ. Cet article présente une méthode pour minimiser des fonctionnelles associées à des équations aux dérivées partielles avec paramètre. On les interprète en terme de projection. La méthode consiste alors à pénaliser la fonctionnelle par l'équation d'état prise comme contrainte. L'existence d'un minimum de la fonctionnelle pénalisée est montrée dans des espaces adaptés. Une illustration de ces résultats est donnée à partir d'une équation non linéaire de la chaleur. L'étude en dimension finie correspondante est enfin présentée.

ABSTRACT. This article presents a method to minimize functionals associated with partial differential equations with parameters. It consists then in penalizing the functional by the state equation taken as a constraint. The existence of a minimum of the penalized functional is proved in adapted spaces. An illustration of these results is given for a nonlinear heat equation. The corresponding finite dimensional case is finally presented.

1. Introduction. Cet article concerne des problèmes de contrôle associés à des équations aux dérivées partielles non linéaires – équation d'état – dépendant d'un paramètre – le contrôle. La non-linéarité intervient dans l'opérateur associé aux dérivées partielles. Nous devons minimiser des fonctionnelles qui dépendent de la solution de l'équation d'état et du paramètre.

On montre que la résolution des équations aux dérivées partielles se ramène à annuler une projection dans un espace de Hilbert adapté. Cet aspect original est ici essentiel pour prendre l'équation d'état comme terme de pénalisation de la fonctionnelle.

L'optimisation est présentée sous forme abstraite dans le paragraphe 2. Les hypothèses sur les données sont énoncées dans le paragraphe 3. L'existence d'un minimum de la fonctionnelle sans terme de pénalisation est montrée dans le paragraphe 4. Nous montrons également que la fonctionnelle pénalisée atteint son minimum. Dans le paragraphe 5, une équation de la chaleur non linéaire est exprimée en terme de projection et les résultats des paragraphes 1 à 4 sont alors appliqués. Le cas de la dimension finie est étudié dans le paragraphe 6.

Reçu le 11 septembre 1995 et, sous forme définitive, le 8 juillet 1996.

2. Présentation du problème. On considère un problème de contrôle dépendant de l'état ψ et du contrôle u . Le couple $\rho = (\psi, u)$ satisfait l'équation d'état et les contraintes représentées par la relation globale :

$$E(\rho) = 0. \quad (1)$$

Soit J une fonctionnelle, le problème est de minimiser :

$$J(\rho) \quad (2)$$

quand ρ vérifie la relation (1).

3. Hypothèses sur les données. On suppose que :

$$(V, (\cdot, \cdot), |\cdot|) \text{ un espace de Hilbert séparable.} \quad (3)$$

Dans (1) et (2), on considère les applications :

$$E : V \rightarrow Z \quad \text{où } Z \text{ est un espace de Hilbert,} \quad (4)$$

$$J : V \rightarrow \mathbb{R} \quad (5)$$

et on suppose que E et J sont faiblement séquentiellement continues sur $(V, |\cdot|)$, c'est-à-dire :

$$v_n \rightarrow v \text{ faiblement dans } V$$

entraîne :

$$E(v_{n'}) \rightarrow E(v) \text{ faiblement dans } Z \quad (6)$$

$$J(v_{n'}) \rightarrow J(v) \text{ dans } \mathbb{R}, \quad (7)$$

où $(v_{n'})$ est une sous-suite extraite de (v_n) .

On suppose que :

$$\inf\{J(v); v \in V\} > -\infty. \quad (8)$$

Soit $R > 0$ un réel fixé, on cherche ρ dans la sphère $B_R = \{v \in V; |v| \leq R\}$. Pour prendre en compte (1) dans la minimisation de (2), on introduit :

$$K = \{v \in B_R; E(v) = 0\},$$

et on suppose :

$$K \neq \emptyset. \quad (9)$$

4. Résultats classiques d'existence. On note :

$$m = \inf\{J(v); v \in K\}.$$

Fonctionnelles sans termes de pénalisation.

Théorème 1. *La fonctionnelle J atteint son minimum dans K :*

$$(\exists \rho \in K) : J(\rho) = m. \quad (10)$$

Pénalisation par l'équation d'état. Afin de minimiser J dans V , on introduit, pour un entier $k > 0$, la fonctionnelle pénalisée :

$$J_k(v) = J(v) + kF(v) \quad (11)$$

où

$$F(v) = F_0(v) + F_1(v)$$

$$F_0(v) = |E(v)|_Z^2$$

$$F_1(v) = (\max(|v| - R, 0))^2.$$

On note :

$$m_k = \inf\{J_k(v) ; v \in V\}.$$

Théorème 2. *Soit k fixé, la fonctionnelle J_k atteint son minimum dans V :*

$$(\exists \rho_k \in V) : J_k(\rho_k) = m_k. \quad (12)$$

Ces théorèmes sont établis en utilisant les hypothèses (3) à (9) et en appliquant le théorème de compacité faible de Riesz.

Théorème 3.

- (a) *Une sous-suite $(\rho_{k'})$ de la suite (ρ_k) , définie en (12), converge faiblement vers une solution de (10).*
- (b) *Toutes les suites (ρ_k) sont telles que : $m_k \rightarrow m$.*
- (c) *La suite (ρ_k) rend possible la construction d'une solution approchée de (10) :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N) : (k \geq N) \Rightarrow (J(\rho_k) \leq m \text{ et } F(\rho_k) \leq \varepsilon).$$

Pour démontrer les théorèmes 2 et 3, on peut utiliser, par exemple, des arguments analogues à ceux de [12] et à ceux du chapitre 46.7 de [15].

5. Illustration par le contrôle d'une équation parabolique non linéaire. Soit $L > 0$ et $T > 0$, on introduit $\Omega =]0, 1[$, $I =]0, T[$ et on note par x et t les variables dans Ω et I . On note successivement $Q_T = \Omega \times I$, $\Sigma_0 = \{0\} \times I$, $\Sigma_L = \{L\} \times I$ et $\Omega_0 = \Omega \times \{0\}$. L'inconnue $\theta : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait le problème aux limites (équation de la chaleur non linéaire) :

$$\begin{aligned} C(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla(\lambda(\theta) \nabla \theta) &= f & (Q_T) \\ \theta &= u & (\Sigma_0) \\ \lambda(\theta) \nabla \theta &= 0 & (\Sigma_L) \\ \theta &= u(0) & (\Omega_0) \end{aligned} \quad (13)$$

où les fonctions $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ sont données et $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est le paramètre de contrôle.

On souhaite minimiser la fonctionnelle :

$$J(u) = \int_{Q_T} (\theta - \theta^*)^2 dx dt \quad (14)$$

où la fonction $\theta^* : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée et où θ est solution de (13).

On suppose que les données vérifient :

$$f \in L^2(Q_T), u \in H^1(I), \theta^* \in L^2(Q_T). \quad (15)$$

Introduisons :

$$\begin{aligned} \psi &= \theta - u \\ \Gamma(s) &= \int_0^s C(\sigma) d\sigma \\ \beta(s) &= \int_0^s \lambda(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Le problème aux limites (13) est alors transformé en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\psi + u) - \Delta \beta(\psi + u) &= f & (Q_T) \\ \psi &= 0 & (\Sigma_0) \\ \nabla \beta(\psi + u) &= 0 & (\Sigma_L) \\ \psi &= 0. & (\Omega_0) \end{aligned} \quad (16)$$

La fonctionnelle (14) s'écrit :

$$J(\psi, u) = \int_{Q_T} (\psi + u - \theta^*)^2 dx dt. \quad (17)$$

Dans la suite, on s'intéresse aux couples (ψ, u) solutions de (16) (17).

Remarque. Pour $u \in H^1(I)$ fixé et sous les hypothèses (23), énoncées ensuite, le problème (16) admet une solution $\psi \in L^2(I, H^1(\Omega))$; voir par exemple [9] où, de plus, sous les hypothèses (23), le problème (16) (17) est traité. Sous des hypothèses complémentaires (par rapport à (23)) de régularité, la solution de (16) devient dérivable en temps au sens usuel (on peut se reporter, par exemple, à [14, 16] et aux bibliographies associées) de sorte que (13) admet une solution $\psi \in H^1(Q_T)$. Dans la suite, on s'intéresse à l'application des résultats des paragraphes 3 et 4 dans le cas des hypothèses (18) (19) ci-dessous, moins restrictives que (23). Ceci est motivé par des conditions sur C et λ rencontrées lors de l'étude de certains problèmes de thermique (se reporter au sous-paragraphe 6.2).

5.1. Transformation du problème aux limites par projection. On suppose :

$$C \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } C \in C^0(\mathbb{R}) \quad (18)$$

$$\lambda \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } \lambda \in C^0(\mathbb{R}). \quad (19)$$

On introduit les espaces :

$$\begin{aligned} E_0 &= \{v \in H^1(Q_T); v = 0(\Sigma_0)\} \\ H(Q_T) &= \{v \in E_0, v = 0(\Omega_0)\} \\ Z &= \{Z(v); v \in E_0\} \quad \text{où } Z(v) = (v, \nabla v, -v). \end{aligned}$$

On a les inclusions :

$$E_0 \subset H^1(Q_T) \quad (20)$$

$$H(Q_T) \subset H^1(Q_T). \quad (21)$$

Introduisons quelques notations utiles dans la suite.

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u, v)_1 = (u, v)_0 + (\nabla u, \nabla v)_0$$

où $L^2(\Omega)$ est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_0 = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Les normes associées sont notées respectivement : $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_0$.

On munit $H^1(Q_T)$ du produit scalaire :

$$((u, v))_1 = ((u, v))_0 + ((\nabla u, \nabla v))_0 + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right)_0$$

où $L^2(Q_T)$ est muni du produit scalaire :

$$((u, v))_0 = \int_0^T (u(t), v(t))_0 dt.$$

Les normes associées sont notées respectivement : $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_0$.

L'application trace (en espace et en temps, se rapportant à $Q_T = \Omega \times I$) dans $H^1(Q_T)$, $\|\cdot\|_1$ est continue ce qui implique que l'injection :

$$v \in E_0 \rightarrow Z(v)$$

est continue. On observe que Z est un sous-espace vectoriel fermé de $[L^2(Q_T)]^3$, muni de la norme produit induite par $\|\cdot\|_0$. La projection P_Z de $[L^2(Q_T)]^3$ dans Z est bien définie.

Proposition 1. *On a équivalence entre :*

- a) *existence de $(\psi, u) \in H(Q_T) \times H^1(I)$, solution de (16), et*
- b) *existence de $(\psi, u) \in H(Q_T) \times H^1(I)$ tels que $P_Z Q(\psi, u) = 0$, où $Q(\psi, u) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\psi + u), \nabla \beta(\psi + u), f \right)$.*

Démonstration. Étape 1 : (a) implique (b).

On suppose qu'il existe $(\psi, u) \in H(Q_T) \times H^1(I)$ solution de (16). En utilisant la densité de $C^1(Q_T)$ dans $H^1(Q_T)$ et la première condition (18), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\psi + u) = C(\psi + u) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \right). \quad (i)$$

La relation (21) entraîne :

$$\psi \in H^1(Q_T)$$

et on a :

$$(\psi + u) \in H^1(Q_T)$$

ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \in L^2(Q_T).$$

Comme C vérifie (18), on a, en utilisant (i) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\psi + u) \in L^2(Q_T).$$

L'hypothèse (15) sur f entraîne, avec la première condition de (16) :

$$\Delta \beta(\psi + u) \in L^2(Q_T).$$

Soit $v \in E_0$. À t fixé, on multiplie la première équation de (16) par v dans le produit scalaire de $L^2(\Omega)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\psi + u), v \right)_0 - (\Delta \beta(\psi + u), v)_0 = (f, v)_0$$

ou encore :

$$(\Delta \beta(\psi + u), v)_0 = (g, v)_0 \text{ pour presque tout } t \quad (ii)$$

où $g = \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\psi + u) - f$.

On utilise la formule de Green généralisée [4] pour modifier (ii) :

$$\begin{aligned} (\Delta \beta(\psi + u), v)_0 &= [\nabla \beta(\psi + u)(L, t)v(L, t) - \nabla \beta(\psi + u)(0, t)v(0, t)] \\ &\quad - (\nabla \beta(\psi + u), \nabla v)_0, \end{aligned}$$

la condition en (Σ_L) de (16) et la définition de E_0 entraînent :

$$(\Delta \beta(\psi + u), v)_0 = -(\nabla \beta(\psi + u), \nabla v)_0.$$

On a donc, dans $L^2(\Omega)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\psi + u), v \right)_0 + (\nabla \beta(\psi + u), \nabla v)_0 - (f, v)_0 = 0$$

d'où par intégration sur I :

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\psi + u), v \right) \right)_0 + ((\nabla \beta(\psi + u), \nabla v))_0 - ((f, v))_0 = 0. \quad (\text{iii})$$

Revenons aux expressions de $Q(\psi, u)$ et de $Z(v)$ définies précédemment, on a :

$$(Q(\psi, u), Z(v))_{[L^2(Q_T)]^3} = 0 \quad \forall v \in E_0$$

ou encore :

$$P_Z Q(\psi, u) = 0. \quad (\text{iv})$$

Étape 2 : (b) implique (a).

On suppose qu'il existe $(\psi, u) \in H(Q_T) \times H^1(I)$ solution de (iv); revenons aux définitions de $Q(\psi, u)$ et de Z , on obtient (iii).

Prenons, dans (iii), $v = \varphi$ où $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\psi + u) - \Delta \beta(\psi + u) = f \quad (\text{v})$$

c'est-à-dire la première équation de (16).

De même que dans l'étape 1, on déduit de (v) que :

$$\Delta \beta(\psi + u) \in L^2(Q_T) \quad (\text{vi})$$

de sorte que la formule de Green généralisée s'applique. En tenant compte de (iii), (v) et (vi), on obtient :

$$\int_0^T (\nabla \beta(\psi + u)(L, t) v(L, t) - \nabla \beta(\psi + u)(0, t) v(0, t)) dt = 0 \quad \forall v \in E_0.$$

Puisque $(v \in E_0)$, on a :

$$v(0, t) = 0$$

d'où :

$$\int_0^T \nabla \beta(\psi + u)(L, t) v(L, t) dt = 0$$

ce qui implique :

$$\nabla \beta(\psi + u)(L, t) = 0. \quad (\text{vii})$$

De (vii) et des conditions aux limites imposées par les espaces $H(Q_T)$ et E_0 , on obtient les conditions aux limites de (16). $\square$

5.2. Utilisation de la projection comme contrainte de la pénalisation. Posons :

$$\begin{aligned} \rho &= (\psi, u) \\ V &= H(Q_T) \times H^1(I) \\ E(\rho) &= P_Z Q(\rho) \\ J(\rho) &= \|\psi + u - \theta^*\|_0^2. \end{aligned}$$

Avec ces notations, il résulte de la proposition 1 que le problème (16) (17) est ramené à (1) (2).

Vérifions les hypothèses (3)–(9).

L'inclusion (21) et la continuité de l'application trace (en espace et en temps, se rapportant à $Q_T = \Omega \times I$) entraînent que $H(Q_T)$ est un fermé. $H^1(Q_T)$ est un espace séparable ce qui implique que $H(Q_T)$ est séparable. $H^1(I)$ – la norme et le produit scalaire sur cet espace sont définis comme sur $H^1(\Omega)$ – est séparable. Le produit de deux espaces séparables est séparable, ce qui donne (3).

Puisque P_Z est linéaire continue, il suffit de montrer que Q est faiblement séquentiellement continue de $(V, |\cdot|)$ dans $[L^2(Q_T)]^3$. On se limite à la première composante de Q . On a :

$$E(\rho_n) = P_Z Q(\psi_n, u_n)$$

et

$$\psi_n \rightarrow \psi \text{ faiblement dans } H^1(Q_T)$$

$$u_n \rightarrow u \text{ faiblement dans } H^1(I)$$

entraînent :

$$\begin{aligned} \psi_{n'} &\rightarrow \psi \text{ dans } L^2(Q_T) \\ u_{n'} &\rightarrow u \text{ dans } L^2(I). \end{aligned} \tag{22}$$

Les convergences fortes entraînent :

$$\Gamma(\psi_{n'} + u_{n'}) \rightarrow \Gamma(\psi + u) \text{ dans } L^2(Q_T)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\psi_{n'} + u_{n'}) = C(\psi_{n'} + u_{n'}) \frac{\partial}{\partial t} (\psi_{n'} + u_{n'})$$

permet d'obtenir, par utilisation des distributions :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\psi_{n'} + u_{n'}) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\psi + u) \text{ faiblement dans } L^2(Q_T).$$

De même que pour la dérivation en temps, la relation :

$$\nabla \beta(\psi_{n'} + u_{n'}) = \lambda(\psi_{n'} + u_{n'}) \nabla(\psi_{n'} + u_{n'})$$

permet d'obtenir :

$$\nabla \beta(\psi_{n'} + u_{n'}) \rightarrow \nabla \beta(\psi + u) \text{ faiblement dans } L^2(Q_T).$$

La relation (6) est donc vérifiée.

La relation (7) résulte des convergences fortes (22).

La condition (8) est assurée puisque :

$$J(\rho) \geq 0.$$

Avec les seules hypothèses (18) (19) et f quelconque, le système (16) n'a pas (à notre connaissance) nécessairement de solutions. Cependant, il est possible de construire des fonctions f de telle sorte que (9) soit satisfaite. Sous les conditions plus restrictives :

$$\begin{aligned} 0 < C1 \leq C(s) \leq C2 \quad \forall s \in \mathbb{R} \\ 0 < \lambda1 \leq \lambda(s) \leq \lambda2 \quad \forall s \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{23}$$

le système (16) a une solution unique [8, 9] et (9) est satisfaite.

6. Cas de la dimension finie. Le système (13) et la fonctionnelle (14) sont discrétisées en utilisant les éléments finis en espace et les différences finies en temps – se reporter à [10].

On est ramené en dimension finie. On pose $W = \mathbb{R}^N$ muni de la norme euclidienne $|\cdot|$ associée au produit scalaire défini par :

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^N u_i v_i.$$

Dans ces conditions, J_k est définie sur W par :

$$J_k(\rho) = J(\rho) + k|P_I Q_I(\rho)|^2 \quad (24)$$

où P_I est la projection sur un sous-espace de W et où Q_I est une fonction de W dans W . On utilise l'algorithme du gradient :

$$\rho^{n+1} = \rho^n - \nu \nabla J_k(\rho^n), \quad \nu > 0.$$

6.1. Convergence à ε -près. Sous l'hypothèse :

$$|\nabla^2 J_k(\rho) u \cdot v| \leq M |u| |v| \quad (25)$$

où $\nabla^2 J_k$ désigne la différentielle seconde de J_k et où M est une constante strictement positive, on montre, avec les arguments de [5], que J_k a au moins un minimum local à ε -près, c'est-à-dire :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \rho_\varepsilon \in W) : (|\nabla J_k(\rho_\varepsilon)| \leq \varepsilon).$$

Revenons à (13) (14), l'hypothèse (25) est réalisée lorsque :

$$C' \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } \lambda' \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

6.2. Comportement numérique. On prend :

$$C(\theta) = 0,2 + \theta/3000$$

$$\lambda(\theta) = 1 - \theta/1200.$$

Les conditions (18) et (19) ne sont vérifiées que partiellement. Néanmoins les essais numériques montrent que l'algorithme fournit des solutions acceptables.

Les hypothèses fonctionnelles sont suffisantes pour assurer la convergence à ε -près.

Les ordres de grandeur numériques de $J(\rho)$ et de $|P_I Q_I(\rho)|^2$ nous conduisent à pondérer la seconde quantité par rapport à la première : dans (24), on substitue k par $\mu = k/A$ où A est une constante de pondération. On montre dans [10] que pour μ dans l'intervalle $[10^{-8}, 10^{-3}]$ l'erreur moyenne entre la solution calculée et la solution exacte varie entre 1 et 4 alors qu'elle est au moins supérieure à 20 en dehors de cet intervalle. Lorsque l'on prend $A = 10^6$, on constate que la sensibilité par rapport à k consiste à le prendre dans $]0, 1000]$.

Une méthode du gradient, construit à partir des états adjoints de (13), conduit à des résultats similaires en ce qui concerne la qualité des résultats, le temps de calcul utilisé et la difficulté de la mise en œuvre [10].

L'avantage de la pénalisation (24) est que la résolution de l'équation d'état n'est pas nécessaire ce qui peut être utile quand les hypothèses (23) ne sont pas vérifiées.

7. Commentaires. La minimisation d'une fonctionnelle avec équation d'état prise en contrainte a été étudiée : en [13] pour des équations aux dérivées partielles semi-linéaires, la non-linéarité portant sur le second membre et ne portant pas sur les dérivées partielles, en [6] en stationnaire où une partie des équations est prise en contrainte. Ici, nous traitons des non-linéarités portant sur les dérivées partielles et nous prenons toute l'équation d'état en contrainte.

Bien que n'assurant que la convergence de sous-suites et ne fournissant que des solutions à ε -près (Théorème 3(a) et 3(c)), la pénalisation directe par l'équation d'état utilisée ici évite l'introduction de multiplicateurs de Lagrange (comme par exemple dans [2], [7] et [14] où des lagrangiens augmentés sont utilisés) ce qui n'exige pas d'introduire des opérateurs adjoints.

Dans le paragraphe 3, si l'on considère seulement la condition (8) et la continuité de J sur $(V, |\cdot|_V)$, on obtient des minima globaux à ε -près. Dans ces conditions, (25) n'étant pas nécessaire, on peut à nouveau, en appliquant les résultats de [3], construire une suite minimisante de (11) de manière à estimer l'ensemble des minima globaux :

$$A_{m+\varepsilon} = \{ v \in V ; J_k(v) \in [m, m + \varepsilon] \}.$$

Par une méthode de projection analogue à celle du paragraphe 5, nous pouvons encore traiter (13) (14) en introduisant une équation généralisée. En remplaçant l'hypothèse $\psi \in H(Q_T)$ dans la proposition 1 par :

$$\psi \in L^2(Q_T), \nabla \psi \in L^2(Q_T),$$

on obtient :

$$Z(v) = \left(-\frac{\partial v}{\partial t}, \nabla v, -v \right) \text{ et } Q(\psi, u) = (\Gamma(\psi + u), \nabla \beta(\psi + u), f).$$

En la remplaçant par :

$$\psi \in L^2(Q_T)$$

on obtient :

$$Z(v) = \left(-\frac{\partial v}{\partial t}, -\Delta v, -v \right) \text{ et } Q(\psi, u) = (\Gamma(\psi + u), \beta(\psi + u), f).$$

Les arguments de compacité (6) et (7) ne sont alors plus nécessaires pour utiliser des méthodes à ε -près. La transformation par projection n'est pas limitée à (13) mais s'applique à un grand nombre d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

L'originalité de la méthode exposée dans les paragraphes 2 à 4 ne réside pas dans chacune de ses étapes – mise à part l'interprétation des équations aux dérivées partielles en termes de projection au sous-paragraphe 5.1 – mais dans son ensemble. Cette méthode est un moyen, de l'aspect fonctionnel à l'aspect numérique, pour traiter des problèmes de contrôle associés à des équations aux dérivées partielles éventuellement mal posées (au sens de [1, p. 229], c'est-à-dire pour lesquelles il n'existe pas actuellement d'espaces fonctionnels assurant l'existence et l'unicité de la solution. En particulier, si (23) n'est pas satisfaite, l'existence et l'unicité de la solution de (13) n'est pas assurée. Cette

méthode peut être utilisée par exemple lorsque la fonctionnelle est non convexe; dans cette direction, la non-convexité est montrée dans [11], explicitement pour le contrôle de systèmes différentiels et numériquement pour le contrôle d'équations aux dérivées partielles.

English extended abstract. This paper exposes a method to minimize linear functionals that are associated to partial differential equations with parameters.

The optimization problem is presented in Section 2 where an equation E and an related functional J are associated in an abstract way.

In the context of separable Hilbert spaces, the hypotheses on the initial datas are stated in Section 3 where the main assumption is that E and J are weakly sequentially compact. The existence of a minimum for functional J without a penalizing term is shown in Section 4 (Theorem 1). We show that the penalized functional attains its minimum (Theorem 2). We also give a within ε existence result for the penalization (Theorem 3).

The arguments contained in Sections 2–4 are illustrated starting from the control of a nonlinear parabolic equation in Section 5 by making use of results in Sobolev spaces. We show that the solution of the partial differential equation amounts to the annihilation of a projection in a suitable Hilbert space (Proposition 1). This allows us to consider the partial differential equation as a penalizing term of the functional of the control problem (subsection 5.2).

The finite-dimensional case is presented in Section 6. Starting from an algorithm of the gradient, we present a ε -convergence result in subsection 6.1. The numerical behavior of the result is discussed in subsection 6.2.

Elements of comparison are stated in Section 7. We also give possible extensions of the method of paragraphs 2–4 by making use of less restrictive hypotheses on the functionals. The method described in the present paper can be seen as a global way – from the functional aspect to the numeric one – to deal with control problems that are associated to possibly ill-conditioned partial differential problems, that is, for which these are no known functional spaces can be used to show the existence and unicity of the solution.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. P. Aubin, *Initiation à l'analyse appliquée*, Masson, Paris, 1994.
2. M. Bergounioux, *A Lagrangian algorithm for state constrained boundary control problems*, 16th Conference on System Modelling and Optimization, Compiègne, France (1992).
3. S. H. Chew et Q. Zheng, *Integral global optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
4. R. Dautray et J. L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques (8) Évolution : semi-groupe, variationnel*, Masson, Paris, 1988.
5. I. Ekeland et R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.
6. J. Haslinger et A. Klarbring, *Fictitious domain / mixed finite element approach for a class of optimal shape design problems*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **29** (1995), 435–450.
7. K. Ito et K. Kunisch, *The augmented Lagrangian method for equality and inequality constraints in Hilbert spaces*, Math. Programming **46** (1990), 341–360.
8. J.-S. Le Brizaut, *Functional solution of an identification in a vulcanization process*, Appl. Math. Lett. **6** (1993), 43–46.

9. ———, *Étude fonctionnelle de contrôles d'une vulcanisation*, Ann. Sci. Math. Québec **18** (1994), 173–197.
10. ———, *Another nonlinear control method: penalization by the state equation*, Systems Analysis Modelling and Simulation **16** (1994), 177–195.
11. ———, *Une classe de fonctionnelles non-convexes associées au contrôle d'équations aux dérivées partielles non-linéaires*, 27^e Congrès National d'Analyse Numérique, Super-Besse, France (1995).
12. J. L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
13. ———, *Contrôle des systèmes distribués singuliers*, Gauthier-Villars, Paris, 1983.
14. P. Neittaanmaki et D. Tiba, *Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems: Theory, Algorithms and Applications*, Marcel Dekker, New York, 1994.
15. E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications III Variational Methods and Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
16. ———, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications IIB Nonlinear Monotone Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

J.-S. LE BRIZAUT ET M. POGU
 ÉQUIPE DE RECHERCHE EN MATHÉMATIQUES
 ÉCOLE CENTRALE DE NANTES
 1 RUE DE LA NOË
 44072 NANTES CEDEX 03
 FRANCE