

## SUR LES CHAOS DE LÉVY STABLES D'INDICE $0 < \alpha < 1$

AI HUA FAN

**RÉSUMÉ.** À partir d'un processus ponctuel de Poisson, on construit sur  $\mathbf{R}^d$  ce qu'on appelle chaos additif de Lévy. Après exponentiation, on construit un opérateur de chaos, qu'on appelle chaos multiplicatif de Lévy. Cet opérateur dépend de trois paramètres  $\alpha, \beta$  et  $u$  ( $0 < \alpha < 1, \beta > 0, u > 0$ ). On démontre qu'il existe une valeur critique déterminant la singularité et la régularité d'une mesure relativement à cet opérateur. Cette valeur est  $D = (1 - \alpha)\beta du^\alpha$ . Précisément, si une mesure est portée par un borélien de dimension inférieure à  $D$ , elle est tuée par cet opérateur; en revanche, si une mesure est d'énergie d'ordre  $D$  finie, elle est préservée.

**ABSTRACT.** The additive Lévy chaos of index  $0 < \alpha < 1$  on  $\mathbf{R}^d$  is first constructed from a Poisson point process. Then the multiplicative Lévy chaos is constructed from a sequence of independent copies of such additive chaos. Via exponentiation we obtain an operator acting on measures. This operator depends upon three parameters  $\alpha, \beta$  and  $u$  ( $0 < \alpha < 1, \beta > 0, u > 0$ ). We prove that there exists a critical value which determines the singularity and the regularity of a measure relative to the operator. The value is  $D = (1 - \alpha)\beta du^\alpha$ . More precisely, if a measure is supported by Borel set of Hausdorff dimension  $< D$ , it is killed by this operator; on the other hand, if a measure is of finite energy of order  $D$ , it is preserved.

**1. Introduction.** Le terme «chaos» a été employé par Wiener [11] en 1938 pour désigner des processus indexés par des ensembles, par exemple, le processus défini par

$$E \rightarrow \int_E dB_t$$

où  $B_t$  est le mouvement brownien. Ce processus est appelé par N. Wiener le chaos pur. Rappelons que Wiener utilise le mouvement brownien pour définir le chaos pur. Or dans le sens inverse, comme Kakutani a remarqué, le chaos pur peut être défini directement et il permet ensuite de construire rapidement le mouvement brownien.

En fait, la construction d'un chaos pur a besoin de deux ingrédients. D'une part, une mesure  $\mu$  définie sur un espace mesurable tel que l'espace de Hilbert  $L^2(\mu)$  soit séparable; d'autre part, un espace de probabilité  $\Omega$  assez riche sur lequel il existe une suite de variables i.i.d. de loi  $N(0, 1)$  qui engendrent un espace de Hilbert  $\mathcal{H}(\subset L^2(\Omega))$

---

Reçu le 2 novembre 1995 et, sous forme définitive, le 10 septembre 1996.

dit Hilbert gaussien. Par définition, une version du chaos additif de Wiener (on préfère «additif» à «pur») est un isomorphisme isométrique  $W$  de  $L^2(\mu)$  dans  $\mathcal{H}$ .

Considérons le cas particulier où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}$ . Soit  $W$  le chaos additif de Wiener. Alors le mouvement brownien peut être défini comme

$$B_t = W(1_{[0,t]})$$

où  $1_{[0,t]}$  est l'indicatrice de l'intervalle  $[0, t]$  (ou  $[t, 0]$  si  $t < 0$ ). La justification se fait par  $\|B_t - B_s\|^2 = |t - s|$  qui est une conséquence immédiate de l'isométrie.

Notre premier objectif est de construire le chaos additif de Lévy, analogie avec le chaos additif de Wiener. Il s'agit, pour chaque  $0 < \alpha < 1$ , d'un isomorphisme isométrique entre  $L^\alpha(\mu)$  et un sous-espace de  $\mathcal{L}^\alpha$  qui est constitué de variables aléatoires  $\alpha$ -stables au sens de Lévy. Voici notre construction. Si  $\mu = dt$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}^d$ , on définit le chaos additif de Lévy  $W_\alpha$  d'indice  $\alpha$  par

$$W_\alpha(g) = \int \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+} ug(t) d\mu_\omega(t, u)$$

où  $\mu_\omega$  est un processus de Poisson ponctuel défini sur  $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+$  avec l'intensité

$$C_\alpha u^{-1-\alpha} dt du$$

( $t \in \mathbf{R}^d, u \in \mathbf{R}^+, C_\alpha$  une constante) (Théorème 1).

Le deuxième objectif est d'étudier les exponentiations de chaos additifs de Lévy et ses produits, ce que l'on appelle chaos multiplicatifs de Lévy. La première motivation des chaos multiplicatifs se trouve dans la modélisation probabiliste de la turbulence [5, 6]. Notre inspiration provient plus directement de la géophysique [8, 9, 11]. Les chaos multiplicatifs de Lévy, dont la théorie est parallèle à celle des chaos multiplicatifs gaussiens [3], entrent dans le cadre des chaos multiplicatifs que J. P. Kahane a décrit en 1987 [4]. Selon la théorie de Kahane, un chaos multiplicatif donne naissance à une projection sur l'espace des mesures. Les mesures dans le noyau de cette projection sont dites singulières et celles dans l'image sont dites régulières. On donnera une condition de singularité (Théorème 2) et une condition de régularité (Théorème 3) en terme de dimension de la mesure.

On construit les chaos additifs de Lévy au §2 et les chaos multiplicatifs de Lévy au §3. La condition de singularité est donnée au §4. Au §6, on donne la condition de régularité dont la preuve est basée sur la  $L^2$ -théorie et la probabilité de Peyrière (§5).

**2. Chaos additif de Lévy.** Soit  $0 < \alpha < 1$ . Une variable positive  $X$ , définie dans un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , est dite  $\alpha$ -stable si elle satisfait, pour une certaine constante  $\xi \geq 0$ , à l'équation suivante

$$\mathbf{E}e^{-uX} = e^{-\xi^\alpha u^\alpha} \quad (u \geq 0).$$

Cette constante s'appelle le *paramètre* de  $X$ , que l'on note par  $\|X\|_\alpha$ . On dit que  $X$  est *standard* si  $\|X\|_\alpha = 1$ .

Désignons par  $\mathcal{L}_+^\alpha(\Omega)$  l'ensemble de toutes les variables  $\alpha$ -stables. Cet ensemble n'est ni un espace linéaire ni un cône linéaire car la somme de deux telles variables n'est pas forcément  $\alpha$ -stable.

L'espérance d'une variable non nulle appartenant à  $\mathcal{L}_+^\alpha(\Omega)$  est infinie. On a cependant

**Proposition 1.** Soit  $X$  une variable  $\alpha$ -stable de paramètre  $\xi$ . Soit  $n \in \mathbf{N}$ . On a

$$\mathbf{E}X^n e^{-X} = \frac{d^n}{dt^n} \exp(-(1-t)^\alpha \xi^\alpha) \big|_{t=0}.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X e^{-X} &= \alpha \xi^\alpha e^{-\xi^\alpha}, \\ \mathbf{E}X^2 e^{-X} &= \alpha \xi^\alpha e^{-\xi^\alpha} (1 - \alpha + \alpha \xi^\alpha). \end{aligned}$$

*Preuve.* On utilise simplement la définition de  $X$  et l'expression

$$e^{-(1-t)X} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n e^{-X} \frac{t^n}{n!}. \quad \square$$

Définissons ensuite

$$\mathcal{L}^\alpha = \{ X : X^+, X^- \in \mathcal{L}_+^\alpha; X^+ \text{ et } X^- \text{ indépendantes} \},$$

$$\|X\|_\alpha^\alpha = \|X^+\|_\alpha^\alpha + \|X^-\|_\alpha^\alpha \quad (X \in \mathcal{L}^\alpha).$$

Considérons maintenant l'espace  $\mathbf{R}^d$  ( $d \geq 1$ ) muni de la mesure de Lebesgue  $dt$ . Définissons d'abord le cône

$$L_+^\alpha = \{ f \geq 0 : \|f\|_\alpha^\alpha = \int f^\alpha dt < \infty \}$$

puis l'espace linéaire

$$L^\alpha = \{ f : f^+ \in L_+^\alpha \text{ et } f^- \in L_+^\alpha \}.$$

Pour  $f \in L_\alpha$ , on définit encore

$$\|f\|_\alpha^\alpha = \|f^+\|_\alpha^\alpha + \|f^-\|_\alpha^\alpha.$$

Ainsi  $L_\alpha$  devient un espace métrique muni de la distance

$$d(f, g) = \|f - g\|_\alpha^\alpha \quad (f, g \in L^\alpha).$$

**Théorème 1.** Il existe un opérateur  $W_\alpha : L_+^\alpha(\mathbf{R}^d) \rightarrow \mathcal{L}_+^\alpha(\Omega)$  tel que

- (a)  $W_\alpha$  soit linéaire.
- (b)  $\|W_\alpha(g)\|_\alpha = \|g\|_\alpha$ .
- (c) Soient  $g_1, g_2 \in L_+^\alpha(\mathbf{R}^d)$ . Pour que  $W_\alpha(g_1)$  et  $W_\alpha(g_2)$  soient indépendantes il faut et il suffit que l'ensemble  $\{g_1 \neq 0 \text{ et } g_2 \neq 0\}$  soit de mesure nulle. Plus généralement, les  $W_\alpha(g_1), \dots, W_\alpha(g_n)$  sont indépendantes si et seulement si p.p. il n'y a au plus qu'une fonction de  $g_1, \dots, g_n$  qui ne s'annule pas.

*Preuve.* Soit  $\mu_\omega$  le processus de Poisson ponctuel défini sur  $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+$  avec l'intensité

$$\sigma = C_\alpha \frac{dt du}{u^{1+\alpha}} \quad (t \in \mathbf{R}^d, u \in \mathbf{R}^+)$$

où

$$C_\alpha^{-1} = \int_0^\infty (1 - e^{-u}) \frac{du}{u^{1+\alpha}}.$$

Pour tout borélien  $A \subset \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+$ ,  $\mu_\omega(A)$  est une variable de Poisson de paramètre  $\sigma(A)$ , c'est-à-dire que

$$\mathbf{E} e^{-\lambda \mu_\omega(A)} = e^{-\sigma(A)(1-e^{-\lambda})}.$$

À partir de là, on peut définir  $\int f d\mu_\omega$  pour les  $f \geq 0$  et les  $f$  telles que l'une des deux intégrales suivantes soit finie :

$$\int (1 - e^{-\lambda f^+}) d\sigma, \quad \int (1 - e^{-\lambda f^-}) d\sigma$$

(si, par exemple, la première intégrale est infinie, on définit  $\int f^+ d\mu_\omega = \infty$ ). L'intégrale ainsi définie admet sa transformée de Laplace comme

$$\mathbf{E} \exp(-\lambda \int f d\mu_\omega) = \exp(-\int (1 - e^{-\lambda f}) d\sigma).$$

Définissons alors

$$W_\alpha(g) = \int \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+} u g(t) d\mu_\omega(t, u).$$

Évidemment,  $W_\alpha$  est linéaire. Pour (b), il suffit de calculer la transformée de Laplace

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{-\lambda W_\alpha(g)} &= \exp \left( -C_\alpha \int_{\mathbf{R}^d} dt \int_{\mathbf{R}^+} (1 - e^{-\lambda u g(t)}) \frac{du}{u^{1+\alpha}} \right) \\ &= \exp \left( -C_\alpha \int_{\mathbf{R}^d} \lambda^\alpha g(t)^\alpha dt \int_{\mathbf{R}^+} (1 - e^{-v}) \frac{dv}{v^{1+\alpha}} \right) \\ &= \exp(-\lambda^\alpha \|g\|_\alpha^\alpha). \end{aligned}$$

Pour (c), on tient compte du fait que

$$\mathbf{E} e^{-\lambda(W_\alpha(g_1) + W_\alpha(g_2))} = e^{-\|g_1 + g_2\|_\alpha^\alpha \lambda^\alpha}.$$

On a utilisé la linéarité de  $W_\alpha$ . Alors pour que  $W_\alpha(g_1)$  et  $W_\alpha(g_2)$  soient indépendantes il faut et il suffit que

$$\|g_1 + g_2\|_\alpha^\alpha = \|g_1\|_\alpha^\alpha + \|g_2\|_\alpha^\alpha$$

i.e.

$$\int_{\mathbf{R}^d} (g_1^\alpha + g_2^\alpha - (g_1 + g_2)^\alpha) dt = 0.$$

Comme l'intégrande est toujours non négative, la dernière égalité signifie que

$$g_1^\alpha + g_2^\alpha = (g_1 + g_2)^\alpha \text{ p.p. sur } \mathbf{R}^d.$$

Le reste ne repose que sur le fait simple: soient  $a \geq 0, b \geq 0$  et  $0 < \alpha < 1$ , alors

$$a^\alpha + b^\alpha = (a + b)^\alpha \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0. \quad \square$$

*Remarque 1.* On peut étendre  $W_\alpha : L^\alpha \rightarrow \mathcal{L}^\alpha$  en définissant

$$W_\alpha(g) = W_\alpha(g^+) - W_\alpha(g^-).$$

Cette extension satisfait aussi à (a), (b) et (c).

*Remarque 2.* Nous n'avons pas besoin de nous limiter à l'espace euclidien. Le chaos additif de Lévy se construit sur tout espace mesuré.

*Remarque 3.* Si  $1 < \alpha \leq 2$ , le chaos additif de Lévy  $W_\alpha$  d'indice  $\alpha$  est défini par

$$W_\alpha(g) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int \int_{\mathbf{R}^d \times \{u \geq \varepsilon\}} ug(t) d\mu_\omega(tu) - \int \int_{\mathbf{R}^d \times \{u \geq \varepsilon\}} ug(t) d\sigma(tu) \right)$$

où  $\mu_\omega$  est un processus de Poisson pontuel défini sur  $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+$  avec l'intensité

$$\sigma = C_\alpha \frac{dt du}{u^{1+\alpha}} \quad \text{avec} \quad C_\alpha^{-1} = \int_0^\infty (e^{-u} - 1 + u) \frac{du}{u^{1+\alpha}}.$$

*Remarque 4.* Soit  $0 < \alpha < 1$ . Sur l'espace  $\mathbf{R}_+$ , on définit pour  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$

$$W_\alpha = \int_0^{+\infty} f(t) dT_t^{(\alpha)}$$

où  $T_t^\alpha : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  est le subordonateur d'indice  $\alpha$ . Sur l'espace  $\mathbf{R}$ , il suffit de prendre deux tels subordonateurs indépendants. Cette construction est due à M. Yor. L'avantage de la nôtre est qu'elle s'adapte au cas de plusieurs dimensions.

**3. Chaos multiplicatif de Lévy.** Soient  $W_\alpha^{(n)}$  une suite de copies indépendantes de  $W_\alpha$ . Soient  $B_n(t)$  une suite de boules de même centre  $t$  et de volume  $v_n$  tels que

$$v_n = \frac{\beta}{n} \quad (\beta > 0).$$

Soit  $u > 0$ . Posons maintenant

$$X_n(t) = W_\alpha^{(n)}(u \mathbf{1}_{B_n(t)}).$$

Construisons ensuite le poids positif

$$P_n(t) = \exp\left(\frac{\beta}{n} u^\alpha - X_n(t)\right).$$

Puis faisons la multiplication

$$Q_n(t) = \prod_{m=1}^n P_m(t).$$

Ainsi on obtient une martingale indexée. On entre alors dans le cadre de chaos multiplicatifs (ou bien multiplications indépendantes) dont J. P. Kahane a fondé la base [4].

Pour toute mesure  $\sigma \in \mathcal{M}^+(\mathbf{R}^d)$ , p.s. la mesure aléatoire  $Q_n\sigma$  converge faiblement (sur  $C_c(\mathbf{R}^d)$ ) vers une mesure aléatoire que l'on note par  $Q\sigma$  ou précisément  $Q_{(\alpha,\beta,u)}\sigma$  [4]. L'opérateur  $Q$  transforme donc des mesures en mesures aléatoires. Il y a deux cas extrêmes. Le premier est  $Q\sigma = 0$  p.s., on dit alors que  $Q$  est *dégénéré* sur  $\sigma$  ou  $\sigma$  est *singulière*. Le second est  $\mathbf{E}Q\sigma = \sigma$ , on dit que  $Q$  agit *pleinement* sur  $\sigma$  ou  $\sigma$  est *régulière*. Dans la suite, on va essayer de déterminer quelles mesures sont singulières et quelles autres sont régulières. On verra que *grosso modo* la dimension de la mesure donne la réponse: les mesures de dimension petite sont singulières et les mesures de dimension grande sont régulières. Signalons que l'opérateur  $\mathbf{E}Q$  est une projection dans l'espace  $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$  [4]. Donc le travail est d'essayer de déterminer le noyau et l'image de cette projection.

**4. Noyau de  $\mathbf{E}Q$ .** On ne peut déterminer le noyau de  $\mathbf{E}Q$  que partiellement. Rappelons que la dimension d'une mesure  $\sigma \in \mathcal{M}^+(\mathbf{R}^d)$ , que l'on note par  $\text{Dim } \sigma$ , est définie comme la plus petite des dimensions des boréliens portant cette mesure (voir [2], où  $\text{Dim } \sigma$  s'appelle dimension supérieure de  $\sigma$ ).

**Théorème 2.** *L'opérateur  $Q_{(\alpha,\beta,u)}$  est dégénéré sur  $\sigma \in \mathcal{M}^+(\mathbf{R}^d)$  si*

$$\text{Dim } \sigma < (1 - \alpha)\beta du^\alpha.$$

*Preuve.* Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\sigma$  est portée par un compact  $K$  dont la dimension de Hausdorff  $\dim K < \lambda$  avec  $\text{Dim } \sigma < \lambda < (1 - \alpha)\beta du^\alpha$ . D'après le théorème 3 dans [4], il suffit de démontrer qu'il existe un certain  $0 < h < 1$  tel que

$$\mathbf{E} \sup_{t \in B} (Q_n(t))^h \leq C(\text{diam } B)^{(1-h)\lambda}$$

vaille pour toute boule  $B$  et un certain  $n = n(B)$  dépendant de  $B$ .

Soit  $r_n$  le rayon de la boule  $B_n(t)$ . Comme le volume de  $B_n(t)$  est égal à  $\beta/n$ , on a

$$r_n = \left( \frac{\beta}{\gamma_d n} \right)^{1/d} \quad \text{où } \gamma_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}.$$

Soit  $B = B(t_0, r)$ . Supposons que  $r_{n+1} < r \leq r_n$ . D'après le fait que pour tout  $m \leq n$  on a

$$B_m(t) \supset B(t_0, r_m - r_n) \quad \text{si } t \in B(t_0, r)$$

et le fait que

$$W_\alpha(g_1) \leq W_\alpha(g_2) \quad \text{si } g_1 \leq g_2,$$

pour tout  $0 < h < 1$  on a

$$\mathbf{E} \sup_{t \in B} (Q_n(t))^h \leq C \exp \left( hu^\alpha \beta \log n - h^\alpha u^\alpha \sum_{m=1}^n |B(t_0, r_m - r_n)| \right)$$

$C$  étant une constante et  $|\cdot|$  signifiant le volume. Or

$$\sum_{m=1}^n |B(t_0, r_m - r_n)| = \beta \log n + O(1)$$

car

$$|B(t_0, r_m - r_n)| = \beta \sum_{j=0}^d (-1)^j C_d^j n^{-j/d} m^{-(d-j)/d}.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{E} \sup_{t \in B} (Q_n(t))^h \leq C n^{-(h^\alpha - h)\beta u^\alpha}$$

$C$  étant une constante qui diffère de la précédente. Comme  $\frac{1}{n} \approx (\text{diam} B)^d$ , on a alors

$$\mathbf{E} \sup_{t \in B} (Q_n(t))^h \leq C (\text{diam} B)^{\frac{h^\alpha - h}{1-h} \beta u^\alpha (1-h)}.$$

Pour l'obtention de ce qu'on a voulu au début de la démonstration, il suffit donc de remarquer

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{h^\alpha - h}{1 - h} = 1 - \alpha$$

et de choisir un  $h$  suffisamment proche de 1.  $\square$

**5.  $L^2$ -théorie et probabilité de Peyrière.** Ce sont des préparatifs pour l'étude de l'image de  $\mathbf{E}Q$ .

**Proposition 2.** *La martingale  $Q_n \sigma$  converge dans  $L^2$  si et seulement si*

$$I_{(2-2^\alpha)\beta du^\alpha}(\sigma) \approx \int \int \frac{d\sigma(t)d\sigma(s)}{|t-s|^{(2-2^\alpha)\beta du^\alpha}} < \infty.$$

*Preuve.* Il suffit de démontrer que

$$\mathbf{E} \left( \int Q_n d\sigma \right)^2 \rightarrow I_{(2-2^\alpha)\beta du^\alpha} \quad (n \rightarrow \infty).$$

En utilisant

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{B_n(t)} + \mathbf{1}_{B_n(s)} &= \mathbf{1}_{B_n(t) \triangle B_n(s)} + 2\mathbf{1}_{B_n(t) \cap B_n(s)} \\ |B_n(t) \triangle B_n(s)| &= |B_n(t)| + |B_n(s)| - 2|B_n(t) \cap B_n(s)|, \end{aligned}$$

on obtient facilement

$$\mathbf{E} \left( \int Q_n d\sigma \right)^2 = \int \int \exp \left( (2-2^\alpha)u^\alpha \sum_{m=1}^n |B_m(t) \cap B_m(s)| \right) d\sigma(t)d\sigma(s).$$

Moyennant le fait suivant dont la preuve est contenue dans le lemme suivant

$$\sum_{m=1}^{\infty} |B_m(t) \cap B_m(s)| = \beta d \log \frac{1}{|t-s|} + O(1)$$

on achève la preuve.  $\square$

**Lemme 1.** Soit  $B_r(t)$  la boule de centre  $t$  et de rayon  $r$  dans  $\mathbf{R}^d$ . On a

$$|B_r(t) \cap B_r(s)| = |B_r(0)| + O(|t - s|r^{d-1}).$$

*Preuve.* On calcule directement, en supposant  $|t - s| \leq 2r$ ,

$$\begin{aligned} |B_r(t) \cap B_r(s)| &= 2 \int \cdots \int_{x_d \geq \frac{|t-s|}{2}, x_1^2 + \cdots + x_{d-1}^2 \leq r^2 - x_d^2} dx_1 \cdots dx_d \\ &= 2\gamma_{d-1} \int_{|t-s|/2}^r (r^2 - x_d^2)^{(d-1)/2} dx_d \end{aligned}$$

où  $\gamma_d$  est précisée dans la démonstration du théorème 2. Or,

$$\int_{|t-s|/2}^r (r^2 - x_d^2)^{(d-1)/2} dx_d = r^d \int_0^{\pi/2} \cos^d y dy + O(|t - s|r^{d-1})$$

d'où le résultat. Il fallait remarquer que

$$2\gamma_{d-1} \int_0^{\pi/2} \cos^d y dy = \gamma_d. \quad \square$$

**Proposition 3.** Sous la condition dans la proposition précédente, l'égalité

$$\mathbf{E} \int \int k(t, s) dQ\sigma(t) dQ\sigma(s) \approx \int \int \frac{k(t, s)}{|t - s|^{(2-2\alpha)\beta du^\alpha}} d\sigma(t) d\sigma(s)$$

est valable pour  $k$  positive ou bornée.

En particulier,

$$\mathbf{E}I_\theta(Q\sigma) < \infty \Leftrightarrow I_{\theta+(2-2\alpha)\beta du^\alpha}(\sigma) < \infty.$$

Supposons  $\sigma(\mathbf{R}^d) = 1$  et  $\mathbf{E}Q\sigma = \sigma$ . La probabilité de Peyrière  $q$  est définie sur l'espace  $\Omega \times \mathbf{R}^d$  par

$$\int \int f(\omega, t) dq(\omega, t) = \mathbf{E} \int f(\omega, t) Q\sigma(dt)$$

pour toute fonction mesurable positive  $f(\omega, t)$ . Comme  $X_n(t), P_n(t), Q_n(t)$  deviennent des variables aléatoires sur l'espace de probabilité  $(\Omega \times \mathbf{R}^d, q)$ , on les désigne simplement par  $X_n, P_n, Q_n$ .

**Proposition 4.** Si  $\mathbf{E}Q\sigma = \sigma$ , les  $X_n$  sont  $q$ -indépendantes.

On peut suivre [4] pour prouver cette proposition. Outre l'hypothèse  $\mathbf{E}Q\sigma = \sigma$  et l'indépendance des  $W_\alpha^{(n)}$ , il y a un autre élément qui joue un rôle essentiel dans la preuve de cette proposition. C'est que, pour tout  $n$  et toute  $f_n$ , l'espérance

$$\mathbf{E}P_n(t)f_n(X_n(t))$$

ne dépend pas de  $t$ .

En passant, on obtient la formule

$$\int f(X_n) dq = \mathbf{E} P_n(t) f(X_n(t)).$$

En particulier, on a, d'après la proposition 1

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_q \log P_n &= \frac{u^\alpha \beta}{n} (1 - \alpha) \\ \mathbf{E}_q (\log P_n)^2 &= \left( \frac{u^\alpha \beta}{n} (1 - \alpha) \right)^2 + \frac{u^\alpha \beta}{n} \alpha (1 - \alpha). \end{aligned}$$

Donc la variance de  $\log P_n$  est

$$V_q(\log P_n) = \frac{u^\alpha \beta}{n} \alpha (1 - \alpha).$$

**Lemme 2.** *On a  $q$ -p.s.*

$$\frac{1}{\log N} \sum_1^N \log P_n \rightarrow u^\alpha (1 - \alpha) \beta.$$

*Preuve.* Comme

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{E}_q \left( \frac{\log P_n - \mathbf{E} \log P_n}{\log^\tau n} \right)^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u^\alpha (1 - \alpha) \beta}{n \log^{2\tau} n} < \infty \quad (\text{si } \tau > \tfrac{1}{2}),$$

la série suivante converge  $q$ -p.s.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log P_n - \mathbf{E} \log P_n}{\log^\tau n}.$$

Prenons  $\tau = 1$ . Le lemme de Kronecker nous assure que  $q$ -p.s.

$$\frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N (\log P_n - \mathbf{E} \log P_n) \rightarrow 0.$$

Observons que  $\mathbf{E} \log P_n = u^\alpha \beta (1 - \alpha)/n$ , d'où le lemme.  $\square$

**6. Image de  $\mathbf{E}Q$ .** Rappelons la définition de  $\mathcal{M}_{D^+}^+(\mathbf{R}^d)$ . Que  $\sigma$  appartienne à  $\mathcal{M}_{D^+}^+(\mathbf{R}^d)$  signifie que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  et un compact  $K$  tel que  $\sigma(\mathbf{R}^d/K) < \varepsilon$  et que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sigma 1_K(B(t, e^{-n}))}{n} < -D - \delta$$

uniformément en  $t$ . Ou bien, pour une suite  $r_n \rightarrow 0$  telle que  $\lim(\log r_n / \log r_{n+1}) = 1$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sigma 1_K(B(t, r_n))}{\log 1/r_n} < -D - \delta.$$

**Théorème.** Supposons  $\sigma \in \mathcal{M}_{D^+}^+(\mathbf{R}^d)$  et  $D \geq (1-\alpha)\beta du^\alpha$ . Alors l'opérateur  $Q_{(\alpha,\beta,u)}$  agit pleinement sur  $\sigma$ . De plus, si  $D > (1-\alpha)\beta du^\alpha$ ,

$$Q_{(\alpha,\beta,u)}\sigma \in \mathcal{M}_{D-(1-\alpha)\beta du^\alpha}^+(\mathbf{R}^d) \quad p.s.$$

*Preuve.* On le démontre en deux étapes en suivant Kahane [3], et on peut se borner au cas  $D > (1-\alpha)\beta du^\alpha$ . D'après l'hypothèse faite sur  $\sigma$ ,

$$I_\eta(\sigma 1_K) = \int_K \int_K \frac{d\sigma(t)d\sigma(s)}{|t-s|^\eta} < \infty \quad \text{si } D < \eta < D + \delta.$$

Dans la première étape on suppose  $D \geq (2-2^\alpha)\beta du^\alpha$ . Selon la  $L^2$ -théorie (proposition 2),  $\mathbf{E}Q_{(\alpha,\beta,u)}\sigma = \sigma$ . Donc la probabilité de Peyrière est bien définie. Soit  $R_n$  l'opérateur produit des poids  $P_m(m \geq e^{dn})$ . Considérons d'abord

$$\rho_n(t) = R_n\sigma(B(t, e^{-n})).$$

Soit  $\chi_n(t, s)$  la fonction indicatrice de l'ensemble des points  $(t, s)$  tels que  $|t-s| \leq e^{-n}$ . On peut écrire

$$\rho_n(t) = \int \chi_n(t, s) dR_n\sigma(s)$$

d'où, et d'après la définition de la probabilité de Peyrière et la proposition 3,

$$\int \rho_n dq = \int \int \chi_n(t, s) \exp \left( (2-2^\alpha)u^\alpha \sum_{m=[e^{dn}]}^{\infty} |B_m(t) \cap B_m(s)| \right) d\sigma(t)d\sigma(s).$$

Puisque

$$\sum_{m=1}^{[e^{dn}]} |B_m(t) \cap B_m(s)| = \beta dn + O(1) \quad \text{si } |t-s| = O(e^{-n}),$$

on a

$$\begin{aligned} & \int \rho_n dq \\ & \leq C \int \int e^{-(2-2^\alpha)\beta u^\alpha dn} \chi_n(t, s) \exp \left( (2-2^\alpha)u^\alpha \sum_{m=1}^{\infty} |B_m(t) \cap B_m(s)| \right) d\sigma(t)d\sigma(s) \\ & = C \int \int e^{-(2-2^\alpha)\beta du^\alpha n} \frac{\chi_n(t, s)}{|t-s|^{(2-2^\alpha)\beta du^\alpha}} d\sigma(t)d\sigma(s). \end{aligned}$$

Puisque  $e^n = O(1/|t-s|)$  si  $\chi_n(t, s) = 1$ , on a

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{(\eta-(2-2^\alpha)\beta du^\alpha)n} \frac{\chi_n(t, s)}{|t-s|^{(2-2^\alpha)\beta du^\alpha}} \leq \frac{O(1)}{|t-s|^\eta}.$$

Donc

$$\int \sum_{m=1}^{\infty} e^{\eta m} \rho_n dq < \infty$$

et par conséquent  $\rho_n = O(e^{-\eta n})$   $q$ -p.s. Donc presque sûrement

$$\rho_n(t) = O(e^{-\eta n}) \quad Q\sigma\text{-p.p.}$$

Il est donc presque sûr que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K_\varepsilon^1$  contenu dans  $K$ , tel que

$$Q\sigma(K/K_\varepsilon^1) < \varepsilon,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \rho_n(t)}{n} \leq -\eta \text{ uniformément sur } K_\varepsilon^1.$$

D'autre part, du lemme 2 on peut déduire que presque sûrement pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K_\varepsilon^2$  contenu dans  $K$  tel que

$$Q\sigma(K/K_\varepsilon^2) < \varepsilon$$

$$\frac{\log Q_n(t)}{\log n} \rightarrow u^\alpha \beta (1 - \alpha) \text{ uniformément sur } K_\varepsilon^2.$$

Posons maintenant

$$S_\varepsilon = 1_{K_\varepsilon^1 \cap K_\varepsilon^2} Q\sigma.$$

On alors

$$Q\sigma(K/K_\varepsilon^1 \cap K_\varepsilon^2) < 2\varepsilon,$$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log S_\varepsilon(B(t, e^{-n}))}{n} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log Q_{[e^{dn}]}(t)}{n} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \rho_n(t)}{n} \\ &\leq (1 - \alpha)\beta du^\alpha - \eta \end{aligned}$$

uniformément sur  $K_\varepsilon^1 \cap K_\varepsilon^2$ . Cela entraîne que  $Q_{(\alpha, \beta, u)}\sigma \in M_{(D - (1 - \alpha)\beta du^\alpha)^+}^+(\mathbf{R}^d)$ .

Deuxième étape. Observons d'abord que, si  $u$  se décompose comme

$$u^\alpha = u_1^\alpha + u_2^\alpha,$$

alors il existe deux copies indépendantes de  $W_\alpha, W'_\alpha$  et  $W''_\alpha$ , telles que

$$W_\alpha(u 1_{B(t, r)}) = W'_\alpha(u_1 1_{B(t, r)}) + W''_\alpha(u_2 1_{B(t, r)}).$$

Cette égalité signifie que les deux processus de chaque côté du signe d'égalité ont la même loi conjointe. Pour éclaircir ce point, il suffit de rappeler la linéarité et l'isométrie de  $W_\alpha$ . Par conséquent, et généralement, si

$$u^\alpha = u_1^\alpha + u_2^\alpha + \cdots + u_\ell^\alpha$$

alors on peut décomposer  $Q_{(\alpha,\beta,u)}$  en un produit d'opérateurs indépendants

$$Q_{(\alpha,\beta,u)} = Q_{(\alpha,\beta,u_1)} Q_{(\alpha,\beta,u_2)} \cdots Q_{(\alpha,\beta,u_\ell)}.$$

Supposons maintenant

$$\begin{aligned} (2 - 2^\alpha)\beta du_1^\alpha &\leq D \\ (2 - 2^\alpha)\beta du_2^\alpha &\leq D - (1 - \alpha)\beta du_1^\alpha \\ &\vdots \\ (2 - 2^\alpha)\beta du_\ell^\alpha &\leq D - (1 - \alpha)\beta d(u_1^\alpha + u_2^\alpha + \cdots + u_{\ell-1}^\alpha). \end{aligned}$$

Tour à tour, en appliquant ce que nous avons démontré en première étape, on obtient finalement

$$Q_{(\alpha,\beta,u)}\sigma \in M_{(D-(1-\alpha)\beta u^\alpha)^+}^+.$$

Il reste de vérifier qu'il existe de tels  $u_1, \dots, u_\ell$ . Par exemple, on peut choisir  $u_1, \dots, u_\ell$  tels que

$$\begin{aligned} (2 - 2^\alpha)\beta du_1^\alpha &= D \\ (2 - 2^\alpha)\beta du_2^\alpha &= D(1 - \frac{1 - \alpha}{2 - 2^\alpha}) \\ &\vdots \\ (2 - 2^\alpha)\beta du_\ell^\alpha &= D(1 - \frac{1 - \alpha}{2 - 2^\alpha})^{\ell-1}. \end{aligned}$$

Alors on a

$$(2 - 2^\alpha)\beta d(u_1^\alpha + u_2^\alpha + \cdots + u_\ell^\alpha) = D \frac{1 - \left[1 - \frac{1 - \alpha}{2 - 2^\alpha}\right]^\ell}{\frac{1 - \alpha}{2 - 2^\alpha}}$$

i.e.

$$(1 - \alpha)\beta d(u_1^\alpha + u_2^\alpha + \cdots + u_\ell^\alpha) = D \left[1 - \frac{1 - \alpha}{2 - 2^\alpha}\right]^\ell \nearrow D \quad (\ell \rightarrow +\infty) \quad \square$$

**English extended abstract.** This paper studies stable additive and multiplicative Lévy chaos of index  $0 < \alpha < 1$ . Recall that a  $\alpha$ -stable random variable  $X$  is a positive variable characterized by its Laplace transform

$$\mathbf{E}e^{-uX} = e^{-\xi^\alpha u^\alpha} \quad (\text{some } \xi \geq 0, \text{ all } u \geq 0).$$

Additive Lévy chaos is a kind of generalization of Wiener integral that Wiener called “pure chaos” [11]. As it is pointed out by Kakutani, the Wiener integral is an isometry between  $L^2(\mathbf{R})$  and a gaussian Hilbert space. A major property of this isometry is that the orthogonality in  $L^2(\mathbf{R})$  signifies the independence in the gaussian Hilbert space.

Instead of  $L^2(\mathbf{R})$ , we take now  $L^\alpha(\mathbf{R})$ . Can we find a substitute for the gaussian Hilbert space such that there is an isometry between  $L^\alpha(\mathbf{R})$  and the substitute space with a similar property that we mentioned above? We prove that a possible choice for the substitute for the gaussian Hilbert space is a space of  $\alpha$ -stable variables and that an “isometry” can be defined by

$$W_\alpha(g) = \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+} ug(t) d\mu_\omega(t, u)$$

where  $\mu_\omega$  est a Poisson point process with intensity measure  $C_\alpha u^{-1-\alpha} dt du$ . Actually this construction works not only on euclidean space but also on any measure space. That means  $L^\alpha(\mathbf{R})$  or  $L^\alpha(\mathbf{R}^d)$  can be replaced by  $L^\alpha(\mu)$  where  $\mu$  is a measure on some measurable space. M. Yor pointed out (personal communication) that for one dimension case,  $W_\alpha$  can be obtained through subordinators.

As in the case of the multiplicative gaussian chaos studied by J. P. Kahane [3], the multiplicative Lévy chaos is constructed by taking the exponentiation of a sequence of independent copies of Lévy processes. More precisely, we consider

$$P_n(t) = \exp\left(\frac{\beta}{n} u^\alpha - X_n(t)\right) \quad \text{with} \quad X_n(t) = W_\alpha^{(n)}(u 1_{B_n(t)})$$

where  $W_\alpha^{(n)}$  is a sequence of independent copies of  $W_\alpha$  and  $B_n(t)$  is the ball centered at  $t$  of volume  $\beta/n$  (here we consider only the euclidean space with Lebesgue measure). The multiplicative Lévy chaos then enters into the theory of independent multiplications described by J. P. Kahane in [4] where the subject of study was the following martingale indexed by  $t \in \mathbf{R}^d$

$$Q_n(t) = P_1(t) \cdots P_n(t).$$

It was proved in [4] that for any measure  $\sigma \in M^+(\mathbf{R}^d)$ , the sequence of random measures  $Q_n \sigma$  converges almost surely to a random measure noted  $Q\sigma$  in the weak topology. Thus we obtain an operator  $Q$  which transforms a measure  $\sigma$  into a random measure  $Q\sigma$ . There are two extreme cases:  $Q\sigma = 0$  and  $\mathbf{E}Q\sigma = \sigma$ . If the first (resp. second) case occurs, we say that  $\sigma$  is  $Q$ -singular (resp.  $Q$ -regular). A major problem of the theory of independent multiplications is to determine when a measure is  $Q$ -singular or  $Q$ -regular. It is good to note that the operator  $\mathbf{E}Q$  is a projection in the space of measures  $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$  and that  $\sigma$  is  $Q$ -singular means it is in the kernel of  $\mathbf{E}Q$  and  $\sigma$  is  $Q$ -regular means it is in the image of  $\mathbf{E}Q$ . So, the above problem becomes how to determine the kernel and the image of  $\mathbf{E}Q$ . For the multiplicative chaos of Lévy, we prove the following partial result by using the notions of dimensions of  $\sigma$ . Let

$$D = (1 - \alpha)\beta u^\alpha.$$

If the upper dimension of  $\sigma$  is strictly smaller than  $D$ ,  $\sigma$  belongs to the kernel of  $\mathbf{E}Q$ ; if the lower dimension of  $\sigma$  is strictly larger than  $D$ ,  $\sigma$  belongs to the image of  $\mathbf{E}Q$ . Recall that upper dimension of  $\sigma$  is the infimum of  $\dim A$  ( $\dim$  means the Hausdorff dimension) taken over  $A$  such that  $\sigma(A^c) = 0$  and the lower dimension of  $\sigma$  is the supremum of  $\dim B$  taken over  $B$  such that  $\sigma(B) \neq 0$  (see [2] for other descriptions of dimensions).

Finally we point out that the interest for studying independent multiplications came from the stochastic modelization of turbulences [5, 6]. See also [8, 9, 11] for our inspiration from geophysics .

## BIBLIOGRAPHIE

1. P. Biane et M. Yor, *Valeurs principales associées aux temps locaux browniens*, Bull. Sci. Math. (2) **111** (1987), 23–101.
2. A. H. Fan, *Sur les dimensions de mesures*, Studia Math. **111** (1994), 1–17.
3. J. P. Kahane, *Sur le chaos multiplicatif*, Ann. Sci. Math. Québec **9** (1985), 105–150.
4. ———, *Positive martingales and random measures*, Chinese Ann. Math. Ser. B **8** (1987), 1–12.
5. A. N. Kolmogoroff, *Précisions sur la structure locale de la turbulence dans un fluide visqueux aux nombres de Reynolds élevés*, Mécanique de la turbulence, Colloq. intern. CNRS (Marseille, 1961), Editions CNRS, Paris, 1962, pp. 447–451.
6. B. Mandelbrot, *Possible refinement of the log-normal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence*, Statistical Models and Turbulence, Proceedings of a Symposium held at the University of California, San Diego (La Jolla), July 15–21, 1971 (M. Rosenblatt and C. Van Atta, eds.), Lecture Notes in Phys., vol. 12, Springer-Verlag, Berlin, 1972, pp. 333–351.
7. D. Revuz et M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
8. D. Schertzer et S. Lovejoy, *Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling of multiplicative processes*, J. Geophys. Res. D **92** (1987), 9693–9714.
9. D. Schertzer et S. Lovejoy, *Singularité anisotropes, divergence des moments en turbulence: invariance d'échelle généralisée et processus multiplicatifs*, Ann. Sci. Math. Québec **11** (1987), 139–181.
10. N. Wiener, *The homogeneous chaos*, Amer. J. Math. **60** (1938), 897–936.
11. J. Wilson, D. Schertzer et S. Lovejoy, *Continuous multiplicative cascade models of rain and clouds*, Nonlinear Variability in Geophysics (D. Schertzer and S. Lovejoy, eds.), Kluwer Academic Press, Amsterdam, 1991, pp. 185–207.

A. H. FAN

MATHÉMATIQUES, BÂTIMENT I

UNIVERSITÉ CERGY-PONTOISE

8, LE CAMPUS

95033 CERGY-PONTOISE CEDEX

FRANCE