

SUR LE TYPE DE CERTAINES FONCTIONS ENTIÈRES. APPLICATION AU PROBLÈME DE LOCALISATION DES POINTS SINGULIERS

MARCEL BERLAND

RÉSUMÉ. Considérant une fonction analytique φ de la variable complexe s définie par un élément L -Dirichlétien

$$\{\varphi\} : \sum_{n=1}^{\infty} P_n(s) \exp(-s\lambda_n)$$

où (λ_n) est une D -suite et $P_n(s)$ est un polynôme taylorien de degré m_n , on énonce une généralisation d'un théorème de M. Blambert, en utilisant des résultats connus dus à R. Parvatham et à M. Berland sur cet élément. Dans la deuxième partie, comme application à un problème de localisation des points singuliers où l'élément dirichlétien:

$$\{f\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,v_n} \exp(-s\lambda_n)$$

(où (a_{n,v_n}) est une suite réelle non nulle avec v_n étant l'indice de P_n au point $s = 0$) a pour abscisse de convergence $\sigma_c^f = 0$, on montre que le point $s = 0$ appartient à la frontière de l'étoile de Riesz de l'élément $\{f\}$.

ABSTRACT. In this work we consider a function φ defined by a L -Dirichletian element:

$$\{\varphi\} : \sum_{n=1}^{\infty} P_n(s) \exp(-s\lambda_n)$$

where (λ_n) is a D -sequence and $P_n(s)$ is a polynomial of degree m_n . We associate a classical Dirichletian element:

$$\{f\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,v_n} \exp(-s\lambda_n)$$

where a_{n,v_n} is the coefficient of the polynomial P_n where modulus is the maximum of the moduli of all the coefficients of P_n . We extend the notion of the type of order (R) of an entire function by an associate L -Dirichletian element $\{\varphi_\alpha\}$, $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n(s)}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_n)} \right) \exp(-s\lambda_n).$$

Then in the second part of the paper we consider the localization of singular points of f analytic function defined by $\{f\}$ where a_{n,v_n} is the real coefficient.

Reçu le 8 mars 1996 et, sous forme définitive, le 5 septembre 1996.

1. On considère un élément L -dirichlétien

$$\{\varphi\} : \sum_{n=1}^{\infty} P_n(s) \exp(-s\lambda_n) \text{ avec } s = \sigma + i\tau, (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2,$$

où P_n est un polynôme de degré m_n de la variable complexe s , définie par

$$P_n(s) = \sum_{j=0}^{m_n} a_{n,j} s^j, \quad a_{n,m_n} \neq 0,$$

les $a_{n,j}$ sont de constantes complexes, (λ_n) est une D -suite ($\Leftrightarrow (\lambda_n)$ est une suite positive, strictement croissante non bornée) avec $\lambda_1 > 1$.

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : A_n = \max \left\{ |a_{n,j}| \mid j \in \{0, 1, \dots, m_n\} \right\}.$$

On supposera, dans tout ce qui suit, que tous les polynômes P_n ont des «indices au point $s = 0$ » (M. Berland [2]); on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : A_n = |a_{n,v_n}| (> 0)$$

(où v_n est l'indice de P_n au point $s = 0$).

On considère l'élément dirichlétien classique

$$\{f\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,v_n} \exp(-s\lambda_n)$$

(où (a_{n,v_n}) est la suite des coefficients a_{n,v_n} non nulle de $\{f\}$) et on note σ_c^f son abscisse de convergence. On pose

$$D = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (m_i + 1)}{\lambda_n} \right\}$$

$$D^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{\lambda_n} \right\} \quad (D^* \text{ est la densité supérieure de la } D\text{-suite } (\lambda_n)).$$

On supposera, dans tout ce qui suit, que

$$D < \infty (\Rightarrow D^* < \infty \text{ et } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log n}{\lambda_n} \right\} = 0,$$

où $\log x$ désigne pour $x > 0$, le logarithme népérien de x). D'où

$$\sigma_c^f = \sigma_a^f$$

(où σ_a^f est l'abscisse de convergence absolue de $\{f\}$) avec

$$\sigma_c^f = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log A_n}{\lambda_n} \right\}.$$

On supposera, dans tout ce qui suit, que σ_c^f est finie. On désigne par E_n l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ qui sont les zéros de P_n et par E_∞ l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ qui sont chacun un zéro pour une infinité de P_n . On pose

$$E^* = E^d \cup E_\infty \quad (\text{où } E^d \text{ est le «dérivé» de } E = \bigcup_n E_n).$$

On supposera que $\mathbb{C} - E^* \neq \emptyset$. Cet ensemble est un ouvert de $\mathbb{C}$. On pose

$$\bar{L}(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{s}{\lambda_n}\right)^2\right)^{m_n+1}.$$

Ce produit infini (si $D < \infty$) converge absolument et sous-uniformément sur $\mathbb{C}$ ($\Leftrightarrow$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$). La fonction $\bar{L} : s \mapsto \bar{L}(s)$ est une fonction entière de $\mathbb{C}$ et $\bar{L} \in B(1, \pi D)$ (où $B(1, \pi D)$ est la classe de fonctions entières d'ordre borélien un et de type de cet ordre πD). On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : M_n = \max \left\{ \frac{|\gamma_{n,i}|}{i!} \mid i \in \{0, 1, \dots, m_n\} \right\}$$

(où $\gamma_{n,i}$ est la valeur au point $s = \lambda_n$ de la $i^{\text{ème}}$ dérivée de la fonction $s \mapsto \frac{(s - \lambda_n)^{m_n+1}}{\bar{L}(s)}$ définie par continuité au point λ_n)

$$\gamma = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log M_n}{\lambda_n} \right\}$$

et

$$\gamma^+ = \max\{0, \gamma\}.$$

On considère respectivement les deux éléments dirichlétien et L -dirichlétien

$$\{f_\alpha\} : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n,v_n}}{\Gamma(1 + \alpha \lambda_n)} \right) \exp(-s \lambda_n)$$

et

$$\{\varphi_\alpha\} : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n(s)}{\Gamma(1 + \alpha \lambda_n)} \right) \exp(-s \lambda_n)$$

associés à $\{f\}$ et à $\{\varphi\}$, indexés par $\alpha > 0$ ($\Rightarrow \Gamma(1 + \alpha \lambda_n) > 0$).

Si $D < \infty$ ($\Rightarrow L = 0$) et $\sigma_c^f \in \mathbb{R}$, alors (M. Blambert [4]):

- 1) $\sigma_c^{f_\alpha} = -\infty$ (où $\sigma_c^{f_\alpha}$ est l'abscisse de convergence de $\{f_\alpha\}$);
- 2) la fonction $s \mapsto f_\alpha(s)$ (où $f_\alpha(s)$ est la somme de $\{f_\alpha\}$ au point s) est une fonction entière de $\mathbb{C}$ et son ordre à la Ritt est $1/\alpha$ (> 0);
- 3) eu égard au théorème Lindelöf-Blambert-Yu (M. Blambert [3], C. Y. Yu [17]), on a

$$\tau_R^{f_\alpha} e = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ (\alpha \lambda_n) \left(\frac{A_n}{\Gamma(1 + \alpha \lambda_n)} \right)^{1/(\alpha \lambda_n)} \right\}$$

(où $\tau_R^{f_\alpha}$ est le type de l'ordre à la Ritt $1/\alpha$ de f_α).

Il en résulte que

$$1 + \log \tau_R^{f_\alpha} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log A_n}{\alpha \lambda_n} + \log \left(\frac{\alpha \lambda_n}{\Gamma(1 + \alpha \lambda_n)^{1/(\alpha \lambda_n)}} \right) \right\}.$$

Or

$$\sigma_c^f = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log A_n}{\lambda_n} \right\} \in \mathbb{R}$$

et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log \left(\frac{\alpha \lambda_n}{\Gamma(1 + \alpha \lambda_n)^{1/(\alpha \lambda_n)}} \right) \right\} = 1.$$

D'où

$$\log \tau_R^{f_\alpha} = \frac{\sigma_c^f}{\alpha} \iff \tau_R^{f_\alpha} = \exp \left(\frac{\sigma_c^f}{\alpha} \right).$$

On sait (M. Berland [1]) que si $D < \infty (\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \{m_n/\lambda_n\} < \infty)$ et $\sigma_c^{f_\alpha} = -\infty$, $E_a^{\varphi_\alpha} = \mathbb{C}$ (où $E_a^{\varphi_\alpha}$ est l'ensemble de convergence absolue de $\{\varphi_\alpha\}$) et donc φ_α est une fonction entière de $\mathbb{C}$ définie par $\varphi_\alpha(s)$ (où $\varphi_\alpha(s)$ est la somme de $\{\varphi_\alpha\}$ au point s).

Soit la fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$s(u) = \sigma(u) + i\tau(u),$$

vérifiant les trois conditions suivantes (S. Mandelbrojt [15]):

- 1) σ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{u \rightarrow -\infty} \sigma(u) = -\infty$ et $\lim_{u \rightarrow \infty} \sigma(u) = \infty$;
- 2) il existe (σ_1, τ_1) de $\mathbb{R}^2$, $\{\sigma(u) \geq \sigma_1 \Rightarrow \tau(u) = \tau_1\}$;
- 3) $\{|\tau(u)|/u \in \mathbb{R}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ bornée.

On pose

$$\forall \ell > 0 : B_{\pi\ell} = \bigcup_{u \in \mathbb{R}} \overline{d(s(u), \pi\ell)}$$

($B_{\pi\ell}$ est la bande curviligne de largeur $2\pi\ell$ ayant pour axe l'ensemble $\{s(u) \mid u \in \mathbb{R}\}$).

On sait enfin que sous les conditions suivantes :

$$D < \infty, \sigma_c^{f_\alpha} = -\infty, \gamma \in [-\pi D, 0], \ell \geq \max\{2, D\};$$

$$\rho_R^{f_\alpha} = \frac{1}{\alpha}, B_\ell^* = \{s' \in C \mid |s' - s(u)| \leq \ell\}, \forall n \geq n_1, E_n \cap B_\ell^* = \emptyset;$$

$$B_{\pi\ell} \cap E^* = \emptyset, \tau_R^{f_\alpha} = \exp \left(\frac{\sigma_c^f}{\alpha} \right),$$

alors

$$\rho_{B_{\pi\ell}}^{\varphi_\alpha} = \frac{1}{\alpha} \text{ (R. Parvatham [16]) et } \tau_{B_{\pi\ell}}^{\varphi_\alpha} = \exp \left(\frac{\sigma_c^f}{\alpha} \right) \text{ (M. Berland [2])}$$

(où l'on désigne respectivement par $\rho_{B_{\pi\ell}}^{\varphi_\alpha}$ et $\tau_{B_{\pi\ell}}^{\varphi_\alpha}$, l'ordre à la Ritt et le type de cet ordre de φ_α dans $B_{\pi\ell}$).

En outre, on a

$$\tau_{B_{\pi\ell}}^{\varphi_\alpha} e \rho_{B_{\pi\ell}}^{\varphi_\alpha} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \lambda_n \left(\frac{A_n}{\Gamma(1 + \alpha \lambda_n)} \right)^{\rho_{B_{\pi\ell}}^{\varphi_\alpha} / \lambda_n} \right\}.$$

On énonce une généralisation d'un théorème de M. Blambert [3].

Théorème I. *Dans les mêmes conditions ci-dessus (où $\sigma_c^f \in \mathbb{R}$), il est impossible que φ_α soit du type $\tau_{B_{\pi\ell}}^{\varphi_\alpha} < \exp(\sigma_c^f / \alpha)$ de l'ordre $1/\alpha$ dans $B_{\pi\ell}$ (où $\ell \geq \max\{2, D\}$).*

Remarque. S. Mandelbrojt [15] a montré que la densité supérieure D^* est au plus égale à la densité maximale (au sens de G. Pólya) de la D -suite (λ_n) . Notant $\mathcal{D}$ celle-ci et la supposant finie, on sait alors, (avec $\sigma_c^f \in \mathbb{R}$ et $\delta = 0$ où δ est l'indice de condensation (au sens de V. Bernstein) de la D -suite (λ_n)), sur chaque intervalle fermé de l'axe de convergence de $\{f\}$ de longueur $2\pi\mathcal{D}$, il existe au moins un point tel que l'adhérence du disque centré en ce point et de rayon $(\pi D + \gamma^+)$ contient au moins un point singulier pour la fonction analytique définie par l'élément L -dirichlétien $\{\varphi\}$ (M. Blambert et R. Parvatham [11]). Il est impossible que la fonction entière de C , notée φ_α , soit du type $\tau_{B_{\pi\ell}}^{\varphi_\alpha} < \exp(\sigma_c^f / \alpha)$ de l'ordre (à la Ritt) $1/\alpha$ ($= \rho_{B_{\pi\ell}}^{f_\alpha}$ où $\ell \geq \max\{2, D\}$ et $\nu_n = m_n$), dans $B_{\pi\ell}$, car $\sigma_c^f = \sigma_H^f$, eu égard à $\delta = 0$, avec $\gamma = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{\log(|\gamma_{n,0}|/m_n!)/\lambda_n\}$.

2. On supposera dans tout ce qui suit, pour éviter d'inutiles complications d'écriture, que $D < \infty$ ($\Rightarrow D^* < \infty$ et $L = 0$), $\sigma_c^f = \sigma_a^f = 0$ (donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(\log A_n)/\lambda_n\} = 0$) en notant simplement a_n au lieu de a_{n,v_n} (où (a_n) est la suite réelle des coefficients de l'élément dirichlétien $\{f\}$, à termes tous différents de zéro (où $A_n = |a_n|$), satisfaisant aux conditions suivantes : il existe une suite infinie strictement croissante d'entiers $(n_i), i \in \mathbb{N}$, avec $n_0 = 0$, telle que :

- ① $\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : a_{n_i} a_{n_{i+1}} < 0$;
- ② $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{(n_i)\} : a_n a_{n+1} > 0$, et il existe n_1 de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\forall n \in \{1, 2, \dots, n_1\} : a_n > 0$. On a donc l'élément dirichlétien

$$\{f\} : \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} A_n \exp(-s\lambda_n) \right)$$

avec la convention $(-1)^0 = 1$;

- ③ il existe i' de $\mathbb{N}$, $\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, i'\}$

$$n_{i+1} - n_i \leq n_i;$$

- ④ $\limsup_{i \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n_i}{\lambda_{n_i}} \right\} = D_1^* < \infty$ (D_1^* est la densité supérieure de la D -suite $(\lambda_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$);
- ⑤ $\lim_{i \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\lambda_{n_{i+1}}}{\lambda_{n_i}} \right\} = 1$ ($\Leftrightarrow \lambda_{n_{i+1}} \sim \lambda_{n_i}$).

D'après ③, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, i'\} : n'_{i+1} > n_{i+1} - n_i$$

et

$$\sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} A_n \exp(-s_0 \lambda_n + p \lambda_n^*) < n'_{i+1} A_{n'_{i+1}} \exp(-s_0 \lambda_{n'_{i+1}} + p \lambda_{n'_{i+1}}^*)$$

où s_0 est un réel fixé strictement positif,

$$n'_{i+1} \in \{n_i + 1, n_i + 2, \dots, n_{i+1}\},$$

$$\lambda_n^* = \log \lambda_n$$

et

$$A_{n'_{i+1}} \exp(-s_0 \lambda_{n'_{i+1}}) = \max \{A_n \exp(-s_0 \lambda_n) \mid n \in \{n_i + 1, \dots, n_{i+1}\}\}.$$

D'après ④, on a

$$\frac{n'_{i+1}}{\lambda_{n'_{i+1}}} < \frac{n_{i+1}}{\lambda_{n_i}} < \frac{2n_i}{\lambda_{n_i}},$$

et donc

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n'_{i+1}}{\lambda_{n'_{i+1}}} \right\} \leq 2D_1^*$$

implique que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists i_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, i_\varepsilon\} : \frac{n'_{i+1}}{\lambda_{n'_{i+1}}} < 2D_1^* + \varepsilon.$$

Posant

$$i'_\varepsilon = \max\{i', i_\varepsilon\},$$

on a donc: $\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, i'_\varepsilon\}$

$$\sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} A_n \exp(-s_0 \lambda_n + p \lambda_n^*) < (2D_1^* + \varepsilon) \lambda_{n'_{i+1}} A_{n'_{i+1}} \exp(-s_0 \lambda_{n'_{i+1}} + p \lambda_{n'_{i+1}}^*).$$

D'après ⑤, en posant

$$\forall j \in \mathbb{N} : \nu_j = \sup \{ \lambda_{n_{i+1}}^* - \lambda_{n_i}^* \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, j\} \},$$

on a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \nu_j = 0 \implies \forall \varepsilon_1 > 0, \exists j_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, j_{\varepsilon_1}\}, \nu_j < \varepsilon_1.$$

Donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, \max\{i'_\varepsilon, j_{\varepsilon_1}\}\}, \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, j\};$$

$$1 \leq \sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} \left(\frac{A_n \exp(-s_0 \lambda_n + p \lambda_n^*)}{A_{n'_{i+1}} \lambda_{n'_{i+1}} \exp(-s_0 \lambda_{n'_{i+1}} + p \lambda_{n'_{i+1}}^*)} \right) \leq (2D_1^* + \varepsilon) \exp(p\varepsilon_1).$$

On considère l'élément dirichlétien suivant :

$$\{f_{s_0}^*\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-s_0 \lambda_n - s \lambda_n^*).$$

Il est évident que $\sigma_a^{f_{s_0}^*} = -\infty$ et donc

$$\forall s \in \mathbb{C} : f_{s_0}^*(s) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} A_n \exp(-s_0 \lambda_n - s \lambda_n^*) \right)$$

(où $f_{s_0}^*(s)$ est la somme en s de $\{f_{s_0}^*\}$).

Pour i_1 de $\mathbb{N}$, on considère l'élément dirichlétien suivant :

$$\{f_{i_1, s_0}^*\} : \sum_{n=n_{i_1}+1}^{\infty} a_n \exp(-s_0 \lambda_n - s \lambda_n^*)$$

et on a

$$\forall s \in \mathbb{C} : f_{i_1, s_0}^*(s) = \sum_{i=i_1}^{\infty} (-1)^i \left(\sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} A_n \exp(-s_0 \lambda_n - s \lambda_n^*) \right)$$

(où $f_{i_1, s_0}^*(s)$ est la somme en s de $\{f_{i_1, s_0}^*\}$). Donc,

$\forall p \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, \max\{i'_\varepsilon, j_{\varepsilon_1}\}\}, \exists i_1 \geq j$ (où i_1 est un entier) tel que

$$\begin{aligned} f_{i_1, s_0}^*(-p) &= \sum_{i=i_1}^{\infty} (-1)^i \left(\sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} A_n \exp(-s_0 \lambda_n + p \lambda_n^*) \right) \\ &= \sum_{i=i_1}^{\infty} \left(\sum_{n=n_{2i}+1}^{n_{2i+1}} \dots \right) - \sum_{i=i_1}^{\infty} \left(\sum_{n=n_{2i+1}+1}^{n_{2i+2}} \dots \right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \sum_{i=i_1}^{\infty} \left(\sum_{n=n_{2i}+1}^{n_{2i+1}} A_n \exp(-s_0 \lambda_n + p \lambda_n^*) \right) \\ \leq (2D_1^* + \varepsilon) \exp(p\varepsilon_1) \sum_{i=i_1}^{\infty} A_{n'_{2i+1}} \lambda_{n'_{2i+1}} \exp(-s_0 \lambda_{n'_{2i+1}} + p \lambda_{n'_{2i+1}}^*) \end{aligned}$$

et

$$\sum_{i=i_1}^{\infty} \left(\sum_{n=n_{2i}+1}^{n_{2i+1}} A_n \exp(-s_0 \lambda_n + p \lambda_n^*) \right) \geq \sum_{i=i_1}^{\infty} A_{n'_{2i+1}} \exp(-s_0 \lambda_{n'_{2i+1}} + p \lambda_{n'_{2i+1}}^*)$$

et les relations analogues pour $\sum_{i=i_1}^{\infty} \left(\sum_{n=n_{2i+1}+1}^{n_{2i+2}} \cdots \right)$.

On considère les éléments dirichlétiens suivants :

$$\begin{aligned} \{\Phi_{i_1}\} &: \sum_{i=i_1}^{\infty} A_{n'_{2i+1}} \exp(-s\lambda_{n'_{2i+1}}); \\ \{\Psi_{i_1}\} &: \sum_{i=i_1}^{\infty} A_{n'_{2i+2}} \exp(-s\lambda_{n'_{2i+2}}); \\ \{\Phi_{i_1, s_0}^*\} &: \sum_{i=i_1}^{\infty} A_{n'_{2i+1}} \exp(-s_0\lambda_{n'_{2i+1}} - s\lambda_{n'_{2i+1}}^*); \\ \{\Psi_{i_1, s_0}^*\} &: \sum_{i=i_1}^{\infty} A_{n'_{2i+2}} \exp(-s_0\lambda_{n'_{2i+2}} - s\lambda_{n'_{2i+2}}^*). \end{aligned}$$

Il est évident que $\sigma_a^{\Phi_{i_1, s_0}^*} = \sigma_a^{\Psi_{i_1, s_0}^*} = -\infty$ (puisque $\sigma_c^{\Phi_{i_1}} \leq 0$ et $\sigma_c^{\Psi_{i_1}} \leq 0$). On note $\{\Phi_{i_1}^{(1)}\}$ et $\{\Psi_{i_1}^{(1)}\}$ les éléments dirichlétiens respectivement dérivés termes à termes, par rapport à s , des éléments dirichlétiens $\{\Phi_{i_1}\}$ et $\{\Psi_{i_1}\}$. De même on note $\{\Phi_{i_1, s_0}^{*(1)}\}$ et $\{\Psi_{i_1, s_0}^{*(1)}\}$ les éléments dirichlétiens respectivement dérivés terme à terme, par rapport à s_0 , des éléments dirichlétiens $\{\Phi_{i_1, s_0}^*\}$ et $\{\Psi_{i_1, s_0}^*\}$. On a

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N} : \Phi_{i_1, s_0}^*(-p) + (2D_1^* + \varepsilon) \exp(p\varepsilon_1) \Psi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p) \\ \leq \sum_{i=i_1}^{\infty} (-1)^i \left(\sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} A_n \exp(-s_0\lambda_n + p\lambda_n^*) \right) \\ \leq -\Psi_{i_1, s_0}^*(-p) - (2D_1^* + \varepsilon) \exp(p\varepsilon_1) \Phi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p). \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N} : \Phi_{i_1}^1(p/s_0) &= \Phi_{i_1, s_0}^*(-p) + (2D_1^* + \varepsilon) \exp(p\varepsilon_1) \Psi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p) \\ \Phi_{i_1}^2(p/s_0) &= -\Psi_{i_1, s_0}^*(-p) - (2D_1^* + \varepsilon) \exp(p\varepsilon_1) \Phi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p). \end{aligned}$$

On a alors

$$\forall p \in \mathbb{N} : \Phi_{i_1}^1(p/s_0) \leq f_{i_1, s_0}^*(-p) \leq \Phi_{i_1}^2(p/s_0)$$

et donc

$$\min \left\{ |\Phi_{i_1}^1(p/s_0)|, |\Phi_{i_1}^2(p/s_0)| \right\} \leq |f_{i_1, s_0}^*(-p)| \leq \max \left\{ |\Phi_{i_1}^1(p/s_0)|, |\Phi_{i_1}^2(p/s_0)| \right\}.$$

Il est évident que

$$\begin{aligned} \Phi_{i_1}^1(p/s_0) &= \Phi_{i_1, s_0}^*(-p) - (2D_1^* + \varepsilon) \exp(p\varepsilon_1) |\Psi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p)| \\ \Phi_{i_1}^2(p/s_0) &= -\Psi_{i_1, s_0}^*(-p) + (2D_1^* + \varepsilon) \exp(p\varepsilon_1) |\Phi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p)|. \end{aligned}$$

On considère la fonction χ_{i_1} définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $[0, +\infty[$: $p \mapsto \chi_{i_1}(p) = \min \{ |\Phi_{i_1}^1(p/s_0)|, |\Phi_{i_1}^2(p/s_0)| \}$. Désignant par ρ_{i_1, s_0} le rayon du disque de convergence de l'élément taylorien au point s_0 :

$$\{f_{i_1, s_0}\} : \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (s - s_0)^p}{p!} f_{i_1, s_0}^*(-p),$$

on a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{i_1, s_0}} &= \limsup_{p \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{|f_{i_1, s_0}^*(-p)|}{p!} \right)^{1/p} \right\} \\ &\geq \limsup_{p \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{|\chi_{i_1}(p)|}{p!} \right)^{1/p} \right\}. \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \limsup_{p \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{|\Phi_{i_1}^1(p/s_0)|}{p!} \right)^{1/p} \right\}; \\ \omega_2 &= \limsup_{p \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{|\Phi_{i_1}^2(p/s_0)|}{p!} \right)^{1/p} \right\}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\min\{\omega_1, \omega_2\} = \limsup_{p \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{\chi_{i_1}(p)}{p!} \right)^{1/p} \right\}.$$

Posant :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N} : \Lambda_1(p) &= \exp(-p\varepsilon_1) \left(\frac{\Phi_{i_1, s_0}^*(-p)}{\Psi_{i_1, s_0}^*(-p)} \right) \left(\frac{\Psi_{i_1, s_0}^*(-p)}{\Psi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p)} \right); \\ \Lambda_2(p) &= \exp(-p\varepsilon_1) \left(\frac{\Psi_{i_1, s_0}^*(-p)}{\Phi_{i_1, s_0}^*(-p)} \right) \left(\frac{\Phi_{i_1, s_0}^*(-p)}{\Phi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p)} \right). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N} : |\Phi_{i_1}^1(p/s_0)| &= \exp(p\varepsilon_1) |2D_1^* + \varepsilon - \Lambda_1(p)| |\Psi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p)| \\ |\Phi_{i_1}^2(p/s_0)| &= \exp(p\varepsilon_1) |2D_1^* + \varepsilon - \Lambda_2(p)| |\Phi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p)|. \end{aligned}$$

Il est évident que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \frac{\Psi_{i_1, s_0}^*(-p)}{|\Psi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p)|} < 1. \text{ De même pour } \frac{\Phi_{i_1, s_0}^*(-p)}{|\Phi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p)|}.$$

(λ_n) et (μ_n) étant deux D -suites, on considère les deux éléments dirichlétiens suivants dont les coefficients sont strictement positifs :

$$\{f_1\} : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \exp(-s\lambda_n) \text{ avec } \sigma_c^{f_1} = -\infty ;$$

$$\{f_2\} : \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \exp(-s\mu_n) \text{ avec } \sigma_c^{f_2} = -\infty.$$

On considère les deux fonctions entières f_1 et f_2 définies par

$$s \mapsto f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \exp(-s\lambda_n)$$

$$s \mapsto f_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \exp(-s\mu_n).$$

Définition. (σ_n) étant une suite réelle décroissante avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = -\infty$ les deux fonctions f_1 et f_2 sont dites «exponentiellement équivalentes sur la suite (σ_n) » si une inégalité du type ci-dessous est vraie pour toute valeur appartenant à la suite (σ_n)

$$\exists \theta \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} : \exp(-\theta|\sigma_n|) \leq \frac{f_1(\sigma_n)}{f_2(\sigma_n)} \leq \exp(\theta|\sigma_n|).$$

Si Φ_{i_1, s_0}^* et Ψ_{i_1, s_0}^* sont «exponentiellement équivalentes sur la suite des entiers négatifs» avec $\theta = 0$, alors on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \Lambda_1(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \Lambda_2(p) = 0.$$

Il en résulte que

$$\omega_1 = \limsup_{p \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{|\Psi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p)|}{p!} \right)^{1/p} \right\}$$

et

$$\omega_2 = \limsup_{p \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{|\Phi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p)|}{p!} \right)^{1/p} \right\}.$$

Remarque. L'élément dirichlétien

$$\left\{ \Psi_{i_1, s_0}^{*(1)} \right\} : \sum_{i=i_1}^{\infty} -A_{n'_{2i+2}} \lambda_{n'_{2i+2}} \exp(-s_0 \lambda_{n'_{2i+2}} - s \lambda_{n'_{2i+2}}^*)$$

a pour abscisse de convergence $\sigma_c^{\Psi_{i_1, s_0}^{*(1)}} = -\infty$. Notant $\Psi_{i_1, s_0}^{*(1)}(s)$ la valeur de $\left\{ \Psi_{i_1, s_0}^{*(1)} \right\}$ en s de $\mathbb{C}$, on considère alors la fonction entière $\Psi_{i_1, s_0}^{*(1)} : s \mapsto \Psi_{i_1, s_0}^{*(1)}(s)$.

Il est évident que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \left| \Psi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p) \right| = \Psi_{i_1, s_0}^*(-p-1),$$

et

$$\forall i \in \mathbb{N}, \frac{\left| \Psi_{i_1, s_0}^{*(1)}(-p_i) \right|}{\Psi_{i_1, s_0}^*(-p_i)} = \mu_i$$

où (μ_i) est une suite strictement croissante et positive non bornée et (p_i) est une suite infinie strictement croissante. Même chose pour $\left\{ \Phi_{i_1, s_0}^{*(1)} \right\}$.

On a l'équivalence suivante :

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{s_0} \iff \sigma_c^{\Phi_{i_1}} = \sigma_c^{\Psi_{i_1}} = 0.$$

Ce résultat, joint au résultat trivial $\rho_{s_0} \geq s_0$ entraîne $\rho_{s_0} = s_0$.

Théorème II. *Sous les conditions suivantes : $D < \infty$, l'élément dirichlétien $\{f\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-s\lambda_n)$ a pour abscisse de convergence égale à 0, et $(a_n) (= (a_{n, v_n}))$ est la suite des coefficients a_n , réelle à termes tous différents de zéro, satisfaisant ①, ②, ③, ④ et ⑤, les éléments dirichlétiens $\{\Phi_{i_1}\}$ et $\{\Psi_{i_1}\}$ ont une abscisse de convergence égale à 0, et les fonctions entières $\{\Phi_{i_1, s_0}^*\}$ et $\{\Psi_{i_1, s_0}^*\}$ sont exponentiellement équivalentes sur la suite des entiers négatifs avec $\theta = 0$. Alors le point $s = 0$ appartient à la frontière de l'étoile rectiligne de Riesz de $\{f\}$. En outre, il est impossible que la fonction entière φ_α (avec $\alpha > 0$) définie par l'élément L-dirichlétien*

$$\{\varphi_\alpha\} : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n(s)}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_n)} \right) \exp(-s\lambda_n)$$

soit du type $\tau_{B_{\pi\ell}}^{\varphi_\alpha} < 1$ de l'ordre (à la Ritt) $\frac{1}{\alpha}$ dans $B_{\pi\ell}$ (où $\ell \geq \max\{2, D\}$).

Remarques. 1) On précise que sous le vocable «étoile rectiligne de Riesz de l'élément dirichlétien $\{f\}$ », il sera question de l'étoile rectiligne de Riesz du prolongement analytique rectiligne de la fonction

$$\forall s \in \left\{ s' \in \mathbb{C} \mid \Re s' > \sigma_c^f = 0, \Im s' \in \mathbb{R} \right\}, f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-s\lambda_n),$$

effectué parallèlement à l'axe réel à partir de tout point de l'ouvert maximal de convergence simple de $\{f\}$.

2) Pour que le point $s = 0$ appartienne à la frontière de l'étoile rectiligne de Riesz de l'élément dirichlétien $\{f\}$, il est nécessaire et suffisant que

$$\forall s_0 > 0 : \rho_{f_{s_0}} = s_0$$

(où $\rho_{f_{s_0}}$ est le rayon de convergence de $\{f_{s_0}\}$).

3) $f_{s_0}^*$ étant la fonction entière de $\mathbb{C}$ définie par l'élément dirichlétien $\{f_{s_0}^*\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-s_0 \lambda_n - s \lambda_n^*)$, on sait que $f_{s_0}^*$ est au moins du type maximal de l'ordre borélien égal à un, la fonction entière définie par

$$\sum_{i=0}^{i_1-1} (-1)^i \left(\sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} A_n \exp(-s_0 \lambda_n - s \lambda_n^*) \right)$$

est du type moyen de l'ordre borélien égal à un. On peut donc considérer la fonction f_{i_1, s_0}^* définie par

$$f_{i_1, s_0}^*(s) = \sum_{i=i_1}^{\infty} (-1)^i \left(\sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} A_n \exp(-s_0 \lambda_n - s \lambda_n^*) \right)$$

au lieu de

$$f_{s_0}^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-s_0 \lambda_n - s \lambda_n^*).$$

4) Sous les conditions suivantes (M. Blambert et R. Parvatham [10] et [11]) $D < \infty$, $\delta^+ < \infty$, $\sigma_c^f \in \mathbb{R}$, l'adhérence de tout disque centré en un point quelconque de l'axe de convergence de $\{f\}$ (définie par $\{f\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-s \lambda_n)$ avec $A_n = |a_n|$ ($= |a_{n, m_n}|$) et de rayon au moins égal à $\pi(D^* + D) + \delta^+ + \gamma^+$ contient au moins un point singulier pour la fonction analytique définie par l'élément L -dirichlétien $\{\varphi\} : \sum_{n=1}^{\infty} P_n(s) \exp(-s \lambda_n)$. On sait (d'après A. F. Leontiev) que

$$\forall s \in A_c^f, \text{Fr}(\mathcal{E}) \cap \overline{d(s, \pi D^* + \delta^+)} \neq \emptyset$$

(où A_c^f est l'axe de convergence de $\{f\}$ et $\mathcal{E}$ est l'étoile rectiligne de Riesz de l'élément $\{f\}$) et que, pour chaque t de $\mathbb{R}$, le disque fermé $d(\sigma_c^f + it, \pi(D^* + D) + \delta^+ + \gamma^+)$ contient au moins un point singulier pour la fonction définie par $\{\varphi\}$; en posant :

$$\delta^+ = \max\{0, \delta\};$$

$$\delta = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \log \left| \frac{1}{C'(\lambda_n)} \right| \right\}$$

où $C'(\lambda_n)$ désigne la valeur au point λ_n de la dérivée première de la fonction (entière)

$$C : s \mapsto C(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{s}{\lambda_n} \right)^2 \right].$$

English extended abstract. This paper contains an extension of a result due to M. Blambert [3] that gives rise, using classical theorems, to a generalization of a result of S. Mandelbrojt. These theorems are, on one part, G. Pólya's result on the repartition on the holomorphy axis of the singularities of functions that are defined by Dirichlet series whose sequences of exponents have finite "maximal density" and, on the other part, V. Bernstein's result on the use of the notion of "condensation index" of the sequence of the exponents of a Dirichlet series for the localization of the abscissa of holomorphy. By

convention, a D -sequence is a positive strictly increasing unbounded sequence (λ_n) . Consider the following two Dirichletian elements

$$\begin{aligned} \{f\} &: \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-s\lambda_n) \text{ where } s = \sigma + i\tau, (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2 \\ \{f_\alpha\} &: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_n)} \exp(-s\lambda_n) \text{ where } \alpha > 0, \end{aligned}$$

and assume that $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(\log n)/\lambda_n\} = 0$ and that the abscissa of convergence of $\{f\}$, which we denote by σ_c^f , is finite. Then $\sigma_c^{f_\alpha} = -\infty$, where $\sigma_c^{f_\alpha}$ is the abscissa of convergence of $\{f_\alpha\}$. The function $s \mapsto f_\alpha(s)$ is an entire function on $\mathbb{C}$ having Ritt order $1/\alpha$. Finally, $\tau_R^{f_\alpha} = \exp(\sigma_c^f/\alpha)$, where $\tau_R^{f_\alpha}$ denotes the type of the Ritt order $1/\alpha$. We recall M. Blambert's result If the D -sequence (λ_n) has a finite "maximal density" (in the sense of G. Pólya) D finite and $L = 0$, then it is impossible for f_α to be of type $\tau_{B_0}^{f_\alpha} < \exp(\sigma_H^f/\alpha)$ of the Ritt order $1/\alpha$ in a strip $B_0 = \{s \in \mathbb{C} \mid |\tau - \tau_0| < \ell\}$ with $\ell > \pi D$ where σ_H^f is the abscissa of holomorphy of $\{f\}$.

This theorem is generalized in section 1 by considering a L -Dirichletian element (studied, with success, especially by B. Lepson (1952))

$$\begin{aligned} \{\varphi\} &: \sum_{n=1}^{\infty} P_n(s) \exp(-s\lambda_n) \text{ where } P_n(s) = \sum_{j=0}^{m_n} a_{n,j} s^j, a_{n,m_n} \neq 0 \\ A_n &= \max \left\{ |a_{n,j}| \mid j \in \{0, 1, \dots, m_n\} \right\} = |a_{n,\nu_n}| \end{aligned}$$

(where ν_n is the index of P_n at $s = 0$) and the two classical Dirichletian elements

$$\begin{aligned} \{f\} &: \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\nu_n} \exp(-s\lambda_n), \\ \{f_\alpha\} &: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n,\nu_n}}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_n)} \exp(-s\lambda_n) \text{ (where } \alpha > 0). \end{aligned}$$

Put

$$D = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{(m_i + 1)}{\lambda_n} \right\},$$

and assume that D and σ_c^f are both finite. Then $L = 0$, $\sigma_c^{f_\alpha} = -\infty$, the function $f_\alpha : s \mapsto f_\alpha(s)$ is an entire function on $\mathbb{C}$ having Ritt order $1/\alpha$. Further, $\tau_R^{f_\alpha} = \exp(\sigma_c^f/\alpha)$ (where $\tau_R^{f_\alpha}$ is the type of the order $1/\alpha$ of f_α). Finally, denote by E_n the set of points of $\mathbb{C}$ that are the zeros of P_n , and by E_∞ the set of points of $\mathbb{C}$ that are a root of an infinity of P_n 's. Put $E^* = E^d \cup E_\infty$ (where E^d is the derived set of $E = \bigcup_n E_n$) and assume that $\mathbb{C} \setminus E^* \neq \emptyset$. This set is open in $\mathbb{C}$. Consider the L -Dirichletian element

$$\{\varphi_\alpha\} : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n(s)}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_n)} \right) \exp(-s\lambda_n)$$

that is associated to $\{\varphi\}$ and indexed by $\alpha > 0$ ($\Rightarrow \Gamma(1 + \alpha\lambda_n) > 0$). It is known that $D < \infty$ ($\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \{m_n/\lambda_n\} < \infty$) and $\sigma_c^{f\alpha} = -\infty$, $E_a^{\varphi\alpha} = \mathbb{C}$ (M. Berland (1983)) (where $E_a^{\varphi\alpha}$ denotes the set of absolute convergence of $\{\varphi_\alpha\}$) hence φ_α is an entire function. We assume that $B_{\pi\ell} \cap E^* = \emptyset$ (where $B_{\pi\ell}$ is the curvilinear strip of width $2\pi\ell$ with axis $\{s(u) \mid u \in \mathbb{R}\}$). Then (under certain conditions)

$$\rho_{B_{\pi\ell}}^{\varphi\alpha} = \frac{1}{\alpha} \text{ (R. Parvatham (1984)) and } \tau_{B_{\pi\ell}}^{\varphi\alpha} = \exp\left(\frac{\sigma_c^f}{\alpha}\right) \text{ (M. Berland (1995))}$$

(where $\rho_{B_{\pi\ell}}^{\varphi\alpha}$ and $\tau_{B_{\pi\ell}}^{\varphi\alpha}$ respectively denote Ritt order and corresponding type of φ_α in $B_{\pi\ell}$). The following theorem holds

Theorem I. *Under the above conditions, it is impossible that φ_α be of type $\tau_{B_{\pi\ell}}^{\varphi\alpha} < \exp(\sigma_c^f/\alpha)$ of the order $1/\alpha$ in $B_{\pi\ell}$ (where $\ell \geq \max\{2, D\}$).*

In section 2, as an application to a problem of localization of singular points of the Dirichletian element

$$\{f\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\nu_n} \exp(-s\lambda_n)$$

whose abscissa of convergence satisfies $\sigma_c^f = 0$ (to avoid unnecessary writing complications), it is shown (under certain conditions, in particular that the sequence (a_{n,ν_n}) is real nonzero) that the point $s = 0$ belongs to the boundary of the star (in the sense of Riesz) of the Dirichletian element $\{f\}$. In particular, it is impossible that φ_α be of type $\tau_{B_{\pi\ell}}^{\varphi\alpha} < 1$ of the Ritt order $1/\alpha$ in $B_{\pi\ell}$ where $\ell \geq \max\{2, D\}$ (Theorem II). In this paper, the expression “étoile rectiligne de Riesz de l’élément dirichlétien $\{f\}$ ” always means the rectilinear star (in the sense of Riesz) of the rectilinear analytic continuation of the function

$$\forall s \in \left\{ s' \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s') > \sigma_c^f = 0, \operatorname{Im}(s') \in \mathbb{R} \right\}, f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,\nu_n} \exp(-s\lambda_n)$$

made parallel to the real axis starting from every point of the maximal open set of simple convergence of $\{f\}$.

Consider the two entire functions f_1 and f_2 defined by

$$\begin{aligned} s &\longmapsto f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \exp(-s\lambda_n), \\ s &\longmapsto f_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \exp(-s\mu_n). \end{aligned}$$

where (λ_n) and (μ_n) are D -sequences, (α_n) and (β_n) are strictly positive sequences. Note that f_1 and f_2 are exponentially equivalent on the nonnegative integers if and only if

$$\exists \theta \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} : \exp(-\theta_n) \leq \frac{f_1(-n)}{f_2(-n)} \leq \exp(\theta_n).$$

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Berland, *Sur la convergence de certaines séries d'exponentielles dont les coefficients sont des polynômes tayloriens*, Thèse Grenoble (1983), 1–100.
2. ———, *Sur la notion de type de l'ordre à la Ritt des fonctions entières définies par des éléments L -dirichlétiens*, J. Anal. **3** (1995), 17–41.
3. M. Blambert, *Sur une généralisation de la notion de type d'une fonction entière définie par une série de Dirichlet et ses applications*, C. R. Acad. Sci. Paris **229** (1949), 338–340.
4. ———, *Sur la notion de type de l'ordre d'une fonction entière*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **79** (1962), 353–375.
5. ———, *Sur certaines applications de la notion de suite quasi-positive par rapport à une D -suite*, C. R. Acad. Sci. Paris **261** (1965), 3518–3820.
6. ———, *Extension par voie somatique d'une propriété de type algorithmique de la théorie des singularités des fonctions analytiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **15** (1965), 575–596.
7. M. Blambert et M. Berland, *Sur l'ordre (R) de certaines classes d'applications*, Bull. Sci. Math. (2) **98** (1974), 63–80.
8. ———, *Sur l'ordre au sens de J. F. Ritt des applications définies par des éléments B et L -dirichlétiens*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **278** (1974), 423–425.
9. ———, *Sur la convergence des éléments L -dirichlétiens*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **280** (1975), A263–A266.
10. M. Blambert et R. Parvatham, *Quelques applications d'un théorème de Leontiev-Lapin*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **286** (1978), A373–A376.
11. ———, *Sur la localisation des points singuliers des fonctions définies par des éléments L -dirichlétiens*, Bull. Sci. Math. (2) **105** (1981), 349–365.
12. ———, *On the singularities of analytic functions defined by L -Dirichletian elements*, J. Math. Anal. Appl. **82** (1981), 292–294.
13. ———, *Sur une inégalité fondamentale et les singularités d'une fonction analytique définie par un élément LC -dirichlétien*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **33** (1983), 135–160.
14. Q. S. Liu, *On the Ritt order of an entire function defined by an L -Dirichletian element*, Approx. Theory Appl. **5** (1989), 55–67.
15. S. Mandelbrojt, *Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications.*, Gauthier-Villars, Paris, 1952.
16. R. Parvatham, *On the Ritt order of entire functions defined by L -Dirichletian elements*, Indian J. Pure Appl. Math **15** (1984), 387–396.
17. C. Y. Yu, *Quelques théorèmes dans la théorie des séries de Dirichlet*, C. R. Acad. Sci. Paris **228** (1949), 641–643.

M. BERLAND
 4, RUE DUPIN
 75006 PARIS
 FRANCE