

EXPONENTIELLES D'ÉLÉMENTS DE LIE ET CALCUL DIFFÉRENTIEL LIBRE

BELKACEM BENDIFFALAH

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous démontrons l'indépendance polynomiale des exponentielles d'éléments de Lie, généralisant ainsi un vieux théorème de Kuo-Tsai Chen. Pour ce faire, nous introduisons une théorie différentielle pour ce cadre non commutatif, qui conduit à un théorème de décomposition spectrale, analogue au théorème de structure des solutions d'une équation différentielle linéaire.

ABSTRACT. In this article, we develop a noncommutative Differential Calculus in order to have a generalization of the theorem of Kuo-Tsai Chen, on linear independence of exponentials of Lie elements. We obtain the independence over the tensor polynomials, and a Spectral Decomposition Theorem, analogous to the structural theorem about solutions of a linear differential equation.

Introduction. Les *éléments de Lie* sont les séries en des variables non commutatives, telles que les termes homogènes sont des polynômes de Lie. Leur théorie a débuté à la fin du siècle dernier, avec ce qui est convenu d'appeler maintenant *la formule BCH* (pour Baker-Campbell-Hausdorff). On touchait là aux fondements même de la géométrie différentielle. Depuis, avec la théorie des algèbres de Hopf [MM] initiée par P. Cartier¹, les éléments de Lie se sont vus attribués des rôles très divers; nous devons par exemple à Kuo-Tsai Chen leur introduction en topologie algébrique, pour le calcul de l'homologie des espaces de lacets grâce à sa théorie des *intégrales itérées*; mais aussi : applications aux groupes libres (combinatoire), à la K-théorie et à la théorie des nombres (polylogarithmes), à la théorie des équations différentielles linéaires (solutions exponentielles), etc. Le livre de C. Reuteneuer, *Free Lie Algebras* [Reu], devenait plus qu'indispensable pour faire le point.

Dans le présent article, nous proposons d'éclairer et de généraliser un théorème de Chen, encore resté mystérieux, à savoir *l'indépendance linéaire des exponentielles d'éléments de Lie* [Ch]. Pour cela, nous construisons un calcul différentiel «non commutatif» permettant d'appréhender le cadre non commutatif des algèbres tensorielles et de leurs complétées, aussi bien que l'autorisait le classique calcul différentiel au niveau commutatif. Dans cette théorie, la plupart des théorèmes classiques portant sur les éléments de Lie et leurs exponentielles (Friedrichs, BCH, Ree, Chen, ...) deviennent

Reçu le 12 juillet 1995 et, sous forme définitive, le 14 mars 1996.

¹sous l'appellation d'*hyperalgèbres*.

de banales propriétés «différentielles» (série de Taylor, règle de Leibniz, lemme de Poincaré, décomposition spectrale, ...).

Les deux principaux résultats obtenus sont :

- i) une généralisation du théorème de Chen : *l'indépendance polynomiale des exponentielles d'éléments de Lie*. En fait, notre preuve donne un peu plus : *l'indépendance quasi-polynomiale*, les quasi-polynômes étant les éléments d'une certaine algèbre, intermédiaire entre celle des polynômes et celle des séries.
- ii) un théorème de *décomposition spectrale*, où chaque noyau itéré, paramétré par les exponentielles d'éléments de Lie (le spectre de nos opérateurs «différentiels»), est isomorphe à l'espace des quasi-polynômes. Il s'agit là, d'une version «non commutative» d'un résultat classique de la théorie des équations différentielles, sur les combinaisons polynomiales d'exponentielles de formes linéaires.

C'est en étudiant un théorème de De Rham «singulier» [Be1, Be2] que l'auteur a ressenti la nécessité de formaliser ce nouveau calcul différentiel. Mais il existe d'autres situations où cet outil serait particulièrement adapté, comme la théorie algébrique des noeuds (cf. R. H. Fox), ou encore pour l'étude des morphismes de Lie et des automorphismes polynomiaux via une «théorie jacobienne non commutative» (cf. C. Reutenauer).

La lettre K désigne un corps commutatif de caractéristique nulle, la lettre A un ensemble (alphabet) de *lettres*; nous utiliserons l'alphabet secondaire $X = \{X_a, a \in A\}$ (les variables) afin d'éviter certaines discussions logiques.

1. Caractérisations différentielles des éléments de Lie. Dans cette section (§1.1 et §1.2), nous mettons en place ce que nous appelons le «calcul différentiel non commutatif» : on y trouve le développement en série de Taylor (proposition 1.5, corollaire 1.6), la formule de Leibniz (proposition 1.8) et, le plus important, un lemme de Poincaré non commutatif (théorème 1.7). On observe ensuite (§1.3) les éléments de Lie sous cet éclairage (proposition 1.9, proposition 1.12 et corollaire 1.13).

1.1 Opérateurs différentiels généralisés. Ce paragraphe précise les notations qui seront utilisées à travers tout l'article.

Le monoïde libre. Notons A^* le monoïde libre des *mots sur l'alphabet A*. La *concaténation* des mots sera notée additivement et o désignera le mot *vide*. Tout mot non vide $k \in A^*$ s'écrit de manière unique $k = (k_1, \dots, k_p)$ avec $k_i \in A$; sa longueur p sera aussi notée $\#k$. Par convention, nous posons $\#o = 0$. Nous introduirons aussi la notation $\widehat{k} = (k_p, \dots, k_2, k_1)$ (renversement de k). Nous adopterons une notation multiplicative pour le monoïde libre X^* : pour tout mot $k \in A^*$, posons $X^k = 1$ si $k = o$ (l'unité) et $X^k = X_{k_1} \cdots X_{k_p}$ si $k = (k_1, \dots, k_p)$: ainsi, pour tout mot i et j sur l'alphabet A , nous aurons $X^i X^j = X^{i+j}$.

L'algèbre libre sur l'alphabet X. La K -algèbre du monoïde X^* possède différents statuts : elle est isomorphe à l'algèbre tensorielle de l'espace $K^X = \bigoplus_{a \in A} K X_a$ (i.e., l'algèbre libre de K^X) et à l'algèbre enveloppante universelle de $Lie\langle X \rangle$ (l'algèbre de Lie libre sur K^X). Toutes ces algèbres isomorphes seront notées $K\langle X \rangle$. En résumé, nous avons une algèbre de Hopf (graduée, connexe, antipodique), avec $Q(K\langle X \rangle)$

$= K^X$ et $P(K < X >) = Lie < X >$ (foncteurs P et Q de [MM]). Décrivons ses opérations :

- tout polynôme $u \in K < X >$ admet une écriture unique sous la forme $u = \sum_{k \in A^*} u_k X^k$, où les k -coefficients $u_k \in K$ sont tous nuls, sauf pour un nombre fini d'entre eux. Nous avons :

$$(1.1.1) \quad \forall u = \sum_i u_i X^i, \forall v = \sum_i v_i X^i, \quad uv = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} u_i v_j \right) X^k;$$

- le o -coefficient $u_o = (u)_o$ est appelé le *terme constant* de u : c'est la co-unité de $K < X >$;
- l'antipode de $K < X >$ est défini sur la base canonique $\{X^k\}_k$ par : $X^k \mapsto (-1)^{\#k} X^{\bar{k}}$;
- notons X_a pour $X_a \otimes 1$ et Y_a pour $1 \otimes X_a$ ($a \in A$); le coproduit de $K < X >$ est l'opération

$$(1.1.2) \quad \Delta : K < X > \longrightarrow K < X > \otimes K < X >, \quad u \mapsto u(X + Y),$$

où $u(X + Y)$ désigne l'élément $\sum_k u_k (X + Y)^k$ avec, pour chaque mot $k = (k_1, \dots, k_p)$, $(X + Y)^k = (X_{k_1} + Y_{k_1}) \cdots (X_{k_p} + Y_{k_p})$.

Les éléments de Lie. La valuation canonique induit une ultramétrie sur $K < X >$: $dist(u, v) = 2^{-val(u-v)}$. Nous noterons $K \ll X \gg$, l'algèbre de Hopf valuée complète obtenue par complétion métrique². À l'instar des polynômes, tout élément de $K \ll X \gg$ s'écrit sous forme d'une série $u = \sum_k u_k X^k$ (sans restriction sur les coefficients). La fermeture topologique de $Lie < X >$ dans $K \ll X \gg$ sera notée $Lie \ll X \gg$; ses éléments, appelés *les éléments de Lie*, sont les séries dont les composantes homogènes appartiennent à $Lie < X >$.

L'algèbre des mélanges. Avant de définir ce qu'est un *mélange*, remarquons d'abord qu'un mot de longueur $n \in \mathbb{N}$ sur l'alphabet A est aussi une application : $[1, n] \rightarrow A$.

Définition 1.1. Un mélange de deux mots i et j ($\#i = p$, $\#j = q$) est un triplet (u, v, k) , où $u : [1, p] \rightarrow [1, p + q]$ et $v : [1, q] \rightarrow [1, p + q]$ sont des injections croissantes à images disjointes et k est l'unique mot sur l'alphabet A , vérifiant $k \circ u = i$ et $k \circ v = j$.

Nous noterons $\beta(i, j)$, l'ensemble des mélanges des mots i et j . Un abus de notation et de langage nous conduira à écrire $k \in \beta(i, j)$ pour un mélange $(u, v, k) \in \beta(i, j)$ et nous parlerons du *mélange* k . Ainsi, nous pouvons écrire, pour tout mot i , $\beta(i, o) = \beta(o, i) = \{i\}$. Sans difficulté, la notion de mélange se généralise à plusieurs mots et définit, par bilinéarité, une opération binaire β sur $K < X >$. La proposition suivante en donne la structure, elle utilise l'isomorphisme de dualité $K < X > \cong (K < X >)^*$ (au sens gradué) dû à la base canonique.

Proposition 1.2. *L'application β est la transposée de Δ [Reu]. En transposant aussi les autres opérations de $K < X >$, nous obtenons une structure d'algèbre de Hopf commutative (graduée, connexe, antipodique) sur $K < X >$ [MM].*

²Bourbaki l'appelle l'algèbre de Magnus.

Nous noterons $Sh(X)$ cette algèbre. Elle a même unité, co-unité et antipode que l'algèbre libre $K\langle X \rangle$; le coproduit est défini, sur la base, par $X^k \mapsto \sum_{i+j=k} X^i \otimes X^j$; son produit β sera appelé *produit de mélange*³. Par ailleurs, nous avons $Q(Sh(X)) = Lie\langle X \rangle$ et $P(Sh(X)) = K^X$ [MM]. Nous avons même un isomorphisme d'algèbres (Perrin et Viennot [Reu, p.147]) :

$$(1.1.3) \quad Sh(X) = Sym(Lie\langle X \rangle) .$$

Représentation de $Sh(X)$. Le couplage de l'algèbre des mélanges et de l'algèbre libre, définit une structure de $Sh(X)$ -module sur l'espace $K\langle X \rangle$ et sur l'espace $K\ll X \gg$. En notant $\partial : Sh(X) \rightarrow End(K\ll X \gg)$ le morphisme d'algèbres correspondant, nous obtenons

$$\forall u \in Sh(X), \forall v \in K\ll X \gg, \quad \partial_u(v) = \sum_j \left(\sum_i u_i \sum_{k \in \beta(i,j)} v_k \right) X^j .$$

Nous arrivons à la définition des *opérateurs différentiels généralisés*.

Définition 1.3. Pour tout mot i , le i -ième opérateur différentiel est l'endomorphisme ∂_{X^i} de $K\langle X \rangle$ (ou de $K\ll X \gg$), noté ∂_i :

$$(1.1.4) \quad \forall v = \sum_j v_j X^j, \quad \partial_i(v) = \sum_j \left(\sum_{k \in \beta(i,j)} v_k \right) X^j .$$

Clairement, ∂_i est un opérateur gradué de $K\langle X \rangle$ ($d^\circ \partial_i = -\#i$) et $\partial_i X^j = \delta_i^j$ si $\#j = \#i$. Par exemple, pour tout mot $k = (a, a, \dots, a)$ (formé de n fois la même lettre $a \in A$), nous avons

$$(1.1.5) \quad \partial_k = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial X_a} \right)^n ;$$

remarquons que nous retrouvons les dérivations canoniques si $\#k = 1$.

Proposition 1.4. *Le morphisme ∂ est injectif. En particulier, l'espace vectoriel engendré par les opérateurs ∂_k ($k \in A^*$) est muni d'une structure d'algèbre, isomorphe à $Sh(X)$.*

Démonstration. Puisque l'action de $Sh(X)$ sur $K\langle X \rangle$ est graduée, il suffit de montrer la liberté de la famille $\{\partial_k\}_k$ degré par degré; soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $v \in Sh(X)$, $d^\circ v = n$; à voir :

$$\sum_{\#k=n} v_k \partial_k = 0 \implies \forall k, v_k = 0 .$$

Puisque $\partial_k X^l = \delta_k^l$ pour tout mot l de longueur n , si l'on applique le premier membre à X^l , il devient $v_l = 0$ et cela pour tout l , soit $v = 0$, soit le second membre. $\square$

³suggestion du rapporteur (*Shuffle product* en anglais).

Le produit de mélange donne :

$$(1.1.6) \quad \forall i, j \in A^*, \quad \partial_i \partial_j = \sum_{k \in \beta(i, j)} \partial_k = \partial_j \partial_i ;$$

par exemple, $\partial_{(a, b)} + \partial_{(b, a)} = \partial_{(a)} \partial_{(b)}$. Et la relation antipodale devient

$$(1.1.7) \quad \forall k \in A^*, k \neq o, \quad \sum_{i+j=k} (-1)^{\#i} \partial_i \partial_{\hat{j}} = 0 .$$

1.2. Calcul différentiel (non commutatif). Nous allons nous évertuer dans ce paragraphe, à montrer que les opérateurs ∂_k fournissent un substitut du calcul différentiel pour le cadre non commutatif. Par exemple, la propriété $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ (1.1.6) sera utilisée comme un « lemme de Schwarz ».

Développement en série de Taylor. La proposition qui suit peut être considérée comme l'équivalent non commutatif de la formule de Taylor. Pour la comprendre, nous avons besoin des notations de (1.1.2) et de la complétion du coproduit :

$$(1.2.1) \quad \Delta : K \ll X \gg \longrightarrow K \ll X \gg \hat{\otimes} K \ll X \gg, \quad u \longmapsto u(X + Y) .$$

Proposition 1.5. *Pour toute série $u \in K \ll X \gg$, nous avons*

$$u(X + Y) = \sum_k (\partial_k u) Y^k .$$

Démonstration. Remarquons d'abord l'identité

$$(X + Y)^k = \sum_{i, j | k \in \beta(i, j)} X^i Y^j .$$

Donc, si $u = \sum_k u_k X^k$, il vient

$$\begin{aligned} u(X + Y) &= \sum_k u_k \sum_{i, j | k \in \beta(i, j)} X^i Y^j \\ &= \sum_{i, j} \left(\sum_{k \in \beta(i, j)} u_k \right) X^i Y^j \\ &= \sum_i \left(\sum_j \left(\sum_{k \in \beta(i, j)} u_k \right) X^i \right) Y^j \\ &= \sum_j (\partial_j u) Y^j . \quad \square \end{aligned}$$

C'est sous la forme suivante que la formule de Taylor nous sera la plus utile.

Corollaire 1.6. Soit $u \in K \ll X \gg$. Pour tout mot k , nous avons $u_k = (\partial_k(u))_o$.

Démonstration. Il suffit de remplacer les X_a ($a \in A$) par des zéros dans la proposition. $\square$

Nous en déduisons, par exemple, la «séparation modulo le terme constant» :

$$(1.2.2) \quad \bigcap_{k \neq o} \text{Ker}(\partial_k) = K.$$

Lemme de Poincaré. Puisque $Q(\text{Sh}(X)) = \text{Lie}\langle X \rangle$, les opérateurs ∂_u (avec u parcourant une K -base quelconque $\mathcal{B}$ de $\text{Lie}\langle X \rangle$) suffisent pour conserver le même pouvoir de séparation. La question qui s'impose alors est celle de l'opération inverse : l'intégration non commutative.

Théorème 1.7. Pour tout morphisme K -linéaire $f : \text{Lie}\langle X \rangle \rightarrow K \ll X \gg$, $u \mapsto f_u$, les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) Il existe $F \in K \ll X \gg$, unique, tel que $F_o = 0$ et $\partial_u F = f_u$ pour tout $u \in \text{Lie}\langle X \rangle$.
- ii) On a $\partial_u(f_v) = \partial_v(f_u)$, pour tout $u, v \in \text{Lie}\langle X \rangle$ (formules de Stokes).

Démonstration. Clairement (i) implique (ii) : c'est le lemme de Schwarz «non commutatif». Montrons que (ii) entraîne (i) : déjà, l'unicité de F , si $F_o = 0$, provient de la «séparation modulo le terme constant» dont il était question tantôt (1.2.2). Utilisons (1.1.3) pour l'existence : si $\mathcal{B}$ est une base totalement ordonnée de $\text{Lie}\langle X \rangle$, nous pouvons étendre le morphisme f à l'idéal d'augmentation I de $\text{Sh}(X)$, comme suit : soit $w \in I$, alors $w = \sum_{p,\alpha} a_\alpha v_{\alpha_1} \circ \cdots \circ v_{\alpha_p}$ (somme finie) où le produit de mélange est noté $\circ$, $a_\alpha \in K$, $p \geq 1$ et v_α parcourt les applications croissantes de $[1, p]$ dans $\mathcal{B}$. L'écriture étant unique, posons $f_w = \sum_{p,\alpha} a_\alpha \partial_{v_{\alpha_1}} \cdots \partial_{v_{\alpha_{p-1}}} f_{v_{\alpha_p}}$. Avec l'hypothèse (ii) nous avons :

$$\forall u \in \text{Sh}(X), v \in I, \quad \partial_u(f_v) = f_{u \circ v}.$$

Par exemple, pour tout mot $i \neq o$ et tout mot j ,

$$(1.2.3) \quad \partial_j(f_{X^i}) = \sum_{k \in \beta(i,j)} f_{X^k}.$$

Définissons alors $F = \sum_{j \neq o} (f_{X^j})_o X^j$: ainsi d'une part $F_o = 0$ et, d'autre part,

$$\forall i \neq o, \quad \partial_i(F) = \sum_j \sum_{k \in \beta(i,j)} (f_{X^k})_o X^j \quad (1.1.4)$$

$$= \sum_j (\partial_j f_{X^i})_o X^j \quad (1.2.3)$$

$$= \sum_j (f_{X^i})_j X^j \quad (\text{Taylor})$$

$$= f_{X^i}, \quad (\text{Taylor})$$

soit $\partial_u(F) = f_u$, pour tout $u \in \text{Lie}\langle X \rangle$. $\square$

Nous verrons ensuite que ce lemme de Poincaré «non commutatif» serait faux, si l'on remplaçait $K \ll X \gg$ (les séries) par $K \langle X \rangle$ (les polynômes). Ce défaut sera résorbé grâce aux quasi-polynômes (corollaire 2.12).

Formule de Leibniz. La propriété suivante justifie la terminologie arrêtée : elle se présente comme une «règle de Leibniz», ce qui affirme le caractère différentiel des opérateurs ∂_k .

Proposition 1.8. *Pour tout mot k et pour deux séries u, v , nous avons :*

$$\partial_k(uv) = \sum_{i+j=k} (\partial_i u)(\partial_j v) .$$

Démonstration. Le coproduit Δ est un morphisme d'algèbres : $\Delta(uv) = \Delta(u)\Delta(v)$. Ce qui s'écrit, avec les notations habituelles (1.1.2, 1.2.1),

$$\begin{aligned} \sum_k (\partial_k(uv))Y^k &= \sum_i (\partial_i u)Y^i \sum_j (\partial_j v)Y^j \\ &= \sum_k \left(\sum_{i+j=k} (\partial_i u)(\partial_j v) \right) Y^k . \end{aligned}$$

Reste à identifier le k -ième terme de chaque membre. $\square$

1.3. Caractérisations des éléments de Lie.

Le théorème de Friedrichs.

Proposition 1.9. *Pour toute série sans terme constant u , nous avons l'équivalence*

$$u \in \text{Lie} \ll X \gg \iff \forall k \neq o, \partial_k u \in K .$$

Démonstration. C'est un corollaire du critère de Friedrichs [Ree, Theorem 2.1]. Rappelons ce dernier, avec les notations de (1.1.2) : *Pour toute série sans terme constant u , nous avons :*

$$u \in \text{Lie} \ll X \gg \iff u(X + Y) = u(X) + u(Y) .$$

Or $u(X + Y) = \sum_k (\partial_k u)Y^k$ d'après la formule de Taylor, soit $\Delta(u) = u(X) + \sum_{k \neq o} (\partial_k u)Y^k$. Ainsi, si u est un élément de Lie, le critère de Friedrichs (sens direct) dit que pour tout $k \neq o$ nous avons $\partial_k u = u_k$, soit $\partial_k u \in K$. La réciproque est aussi facile : si $\partial_k u \in K$, nécessairement $\partial_k u = u_k$ (Taylor). D'où $u(X + Y) = u(X) + u(Y)$ et u est un élément de Lie, d'après ce même critère de Friedrichs (sens inverse). $\square$

Nous en déduisons facilement la caractérisation suivante.

Corollaire 1.10. *Pour toute série sans terme constant u , nous avons l'équivalence*

$$u \in \text{Lie} \ll X \gg \iff \forall i \neq o, j \neq o, \partial_i \partial_j u = 0 .$$

Cette dernière se retrouve dans l'article de Rimhak Ree [Ree, Theorem 2.2] sous la forme :

$$(1.3.1) \quad u \in \text{Lie} \ll X \gg \iff \forall i \neq o, j \neq o, \sum_{k \in \beta(i,j)} u_k = 0 .$$

Application : en utilisant (1.1.7), nous obtenons la formule de Lyndon [Reu, Lemma 1.7] :

$$(1.3.2) \quad \forall u \in \text{Lie}\langle\langle X \rangle\rangle, \forall k, \quad u_k + (-1)^{\#k} u_{\widehat{k}} = 0 .$$

Exponentielles des éléments de Lie. Rappelons que pour toute série $u \in K\langle\langle X \rangle\rangle$ et toute série à une variable $s(t) = \sum_n s_n t^n \in K[[t]]$, la série composée $s(u) = \sum_n s_n u^n$ converge dès que u est sans terme constant. On s'intéressera spécialement à la série exponentielle $s(t) = \sum_n t^n / n!$, notée e^t .

Définition 1.11. Un vecteur propre est une série non nulle v , vecteur propre de chacun des endomorphismes ∂_k ($k \in A^*$), i.e.

$$\exists \alpha \in K\langle\langle X \rangle\rangle, \quad \forall k, \quad \partial_k(v) = \alpha_k v .$$

Un tel élément α est appelé la valeur propre associée.

Puisque pour tout mot k nous avons $\partial_k v = \alpha_k v$, alors $v_k = \alpha_k v_o$ (Taylor). Nous en déduisons que le terme constant de v est non nul et que $\alpha = v_o^{-1} v$. Ainsi, notre intérêt ira exclusivement aux valeurs propres, i.e. les vecteurs propres v tels que $v_o = 1$. Par exemple, l'unité est valeur propre.

Proposition 1.12. Pour toute série v , nous avons la caractérisation suivante :

$$v \text{ est valeur propre} \iff v = e^u, \text{ pour un certain élément de Lie } u.$$

Démonstration. Appliquons deux opérateurs quelconques ∂_i et ∂_j à une valeur propre v , nous trouvons les relations suivantes⁴ :

$$(1.3.3) \quad \forall i, \forall j, \quad \sum_{k \in \beta(i,j)} v_k = v_i v_j .$$

Le théorème est alors démontré (dans un sens) si l'on considère la caractérisation des exponentielles d'éléments de Lie donnée par Ree [Ree, Theorem 2.5]. Réciproquement, si v est l'exponentielle d'un élément de Lie, alors $v_o = 1$ et v vérifie (1.3.3) d'après Ree. D'où

$$\forall i, \quad \partial_i(v) = \sum_j \left(\sum_{k \in \beta(i,j)} v_k \right) X^j \quad (1.1.4)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_j v_i v_j X^j \\ &= v_i v . \quad \square \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

⁴shuffle relations en anglais.

Corollaire 1.13. *Les valeurs propres forment un groupe pour le produit.*

Démonstration. Ce n'est rien d'autre que la célèbre formule de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH), dont la première démonstration algébrique est due à Cartier [Car]. $\square$

Clairement, les vecteurs propres forment aussi un groupe : il est isomorphe au produit direct du groupe des valeurs propres par K^* .

Une application du théorème 1.13 : utilisons (1.1.7) sur l'exponentielle v d'un élément de Lie, nous retrouvons la formule de Chen [Ree, Theorem 2.6] reliant v à v^{-1} :

$$(1.3.4) \quad \forall k, \quad \sum_{i+j=k} (-1)^{\#i} v_i v_j = \delta_k^o, \quad i.e. \quad (v^{-1})_k = (-1)^{\#k} v_k.$$

2. Théorie spectrale. Dans le paragraphe §2.1, nous rappelons le théorème de Chen : les exponentielles d'éléments de Lie forment une famille libre sur K (théorème 2.2). Notre démonstration est nouvelle. Afin de généraliser ce résultat, nous introduisons l'ensemble des quasi-polynômes $Ker(\partial^\infty)$: c'est une K -algèbre intermédiaire entre les polynômes et les séries (définition 2.3, proposition 2.4). Nous démontrons ensuite la liberté sur $Ker(\partial^\infty)$ (théorème 2.7). En particulier, nous obtenons la liberté sur $K\langle X \rangle$. Au paragraphe §2.2, nous démontrons le théorème de décomposition spectrale (théorème 2.14), moyennant un lemme de Poincaré quasi-polynomial (corollaire 2.13).

2.1. Généralisation du théorème de Chen. Commençons par une définition :

Définition 2.1. Le spectre de ∂ , noté $Spectre(\partial)$, désigne l'ensemble des valeurs propres.

Rappelons que la proposition 1.12 affirme que le spectre de ∂ est constitué des exponentielles d'éléments de Lie et que le produit lui induit une structure de groupe (BCH). Le théorème suivant, traduit en termes d'exponentielles d'éléments de Lie, redonne exactement le théorème de Chen [Ch].

Théorème 2.2. *La famille $Spectre(\partial)$ est K -libre.*

Démonstration. Il faut montrer que toute partie finie P de $Spectre(\partial)$ est libre : démontrons la chose, par récurrence sur $n = card(P)$. Si $n = 1$, l'exponentielle de toute série sans terme constant est libre, car non nulle. Soit $n > 0$ et supposons la liberté de toute partie du spectre de cardinal n . Donnons-nous alors $n + 1$ éléments de Lie distincts $u^{(0)}, \dots, u^{(n)}$, tels que

$$(2.1.1) \quad \exists a_0, \dots, a_n \in K, \quad \sum_{l=0}^n a_l e^{u^{(l)}} = 0.$$

Nous pouvons toujours supposer que seul $u^{(0)}$ est éventuellement nul. Le corollaire 1.13 assure l'existence d'éléments de Lie distincts non nuls $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$, tels que

$$1 \leq l \leq n, \quad e^{v^{(l)}} = e^{u^{(l)}} e^{-u^{(0)}}.$$

Et (2.1.1) devient :

$$-a_0 = \sum_{l=1}^n a_l e^{v^{(l)}}.$$

La proposition 1.12 dit que les exponentielles d'éléments de Lie sont vecteurs propres : les opérateurs différentiels généralisés appliqués à l'identité ci-dessus donnent

$$\forall k \neq 0, \quad 0 = \sum_{l=1}^n a_l w_k^{(l)} e^{v^{(l)}},$$

où $w_k^{(l)}$ est le k -ième coefficient de $\exp(v^{(l)})$. L'hypothèse de récurrence affirme alors que

$$\forall k \neq 0, \forall l, \quad a_l w_k^{(l)} = 0.$$

Fixons l : puisque $v^{(l)}$ est non nul, il existe $k \neq 0$ tel que $w_k^{(l)} \neq 0$; donc, dans l'égalité ci-dessus, c'est a_l qui est nul. Enfin, nous avons aussi $a_0 = 0$ d'après (2.1.1). $\square$

L'algèbre des quasi-polynômes. Nous appelons *noyau itéré d'ordre* $m \in \mathbf{N}^*$, l'espace

$$(2.1.2) \quad \text{Ker}(\partial^m) = \bigcap_{i^{(1)} \neq 0, \dots, i^{(m)} \neq 0} \text{Ker}(\partial_{i^{(1)}} \cdots \partial_{i^{(m)}}).$$

Remarquons que ces noyaux itérés sont des sous-espaces vectoriels fermés de $K \ll X \gg$ et qu'ils sont emboîtés : $\text{Ker}(\partial^m) \subset \text{Ker}(\partial^{m+1})$ ($m \geq 1$). Nous poserons

$$(2.1.3) \quad \text{Ker}(\partial^\infty) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \text{Ker}(\partial^m).$$

Définition 2.3. Tout élément P de $\text{Ker}(\partial^\infty)$ est appelé quasi-polynôme; si $P \neq 0$, l'entier m tel que $P \in \text{Ker}(\partial^{m+1}) \setminus \text{Ker}(\partial^m)$, noté $\partial^\circ P$, est appelé quasi-degré de P ($\partial^\circ 0 = -\infty$).

Puisque chaque opérateur ∂_k est gradué ($d^\circ \partial_k = -\#k$), tout polynôme est quasi-polynomial :

$$(2.1.4) \quad \forall P \in K \langle X \rangle, \quad P \in \text{Ker}(\partial^\infty) \text{ et } \partial^\circ P \leq d^\circ P.$$

Donc $\text{Ker}(\partial^\infty)$ est un sous-espace dense de $K \ll X \gg$; de plus, la proposition 1.12, montre que l'unité est la seule exponentielle d'élément de Lie qu'il contient. Remarquons tout de même que le *noyau* (noyau itéré d'ordre 1) et le *binoyau* (noyau itéré d'ordre 2) ne nous sont pas inconnus : nous avons $\text{Ker}(\partial^1) = K$ (1.2.2) et, d'après le corollaire 1.10,

$$(2.1.5) \quad \text{Ker}(\partial^2) = K \oplus \text{Lie} \ll X \gg.$$

La proposition suivante est un «théorème de structure» qu'il faut lire comme suit : *l'espace $\text{Ker}(\partial^\infty)$ est un sous- $\text{Sh}(X)$ -module de $K \ll X \gg$; c'est aussi une sous-algèbre, filtrée croissante par le quasi-degré; de plus, son algèbre graduée est commutative.*

Proposition 2.4. Pour $P, Q \in \text{Ker}(\partial^\infty)$, nous avons :

- o) $\forall k \neq o, \partial^\circ(\partial_k P) \leq \partial^\circ(P) - 1; \exists k, \partial^\circ(\partial_k P) = \partial^\circ(P) - 1;$
- i) $\partial^\circ(P + Q) \leq \sup\{\partial^\circ P, \partial^\circ Q\}$ avec égalité si $\partial^\circ P \neq \partial^\circ Q;$
- ii) $\partial^\circ(PQ) = \partial^\circ(P) + \partial^\circ(Q);$
- iii) pour $[P, Q] = PQ - QP, \partial^\circ[P, Q] \leq \partial^\circ P + \partial^\circ Q - 1.$

Esquisses de démonstration. Les propriétés (o) et (i) sont immédiates à partir des définitions. Pour démontrer (ii), on se ramène à $P, Q \in K\langle X \rangle$: en effet, si $\sum_p u^{(p)}$ désigne la décomposition homogène de $u \in \text{Ker}(\partial^\infty)$, nous avons :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \partial^\circ(u^{(p)}) \leq \partial^\circ(u) \quad \text{et} \quad \exists p, \partial^\circ(u^{(p)}) = \partial^\circ(u).$$

Soit une base de Poincaré-Birkhoff-Witt $\{b^\alpha\}_\alpha$ de $K\langle X \rangle$ où $\{b_p\}_{p \geq 1}$ est une base de $\text{Lie}\langle X \rangle$ et, pour tout mot croissant α de l'alphabet $\mathbf{N}^*$, on a posé $b^\alpha = b_{\alpha_1} \cdots b_{\alpha_r}$ ($r = \#\alpha$). Il suffit alors de vérifier que $\partial^\circ b^\alpha = \#\alpha$, ce que l'on peut voir par récurrence, grâce à la formule de dérivation suivante :

$$\forall k \neq o, \quad \partial_k b^\alpha = \sum_{\alpha \in \beta(i, j)} b^i (b^j)_k.$$

Démontrons (iii) par récurrence sur $\partial^\circ P + \partial^\circ Q$; (iii) est vraie si P ou Q est une constante, car $[P, Q] = 0$. Soit $N > 1$ et supposons que (iii) est vraie dès que $\partial^\circ P + \partial^\circ Q < N$. Étant donnés P, Q tels que $\partial^\circ P + \partial^\circ Q = N$, nous avons

$$\forall k \neq o, \quad \partial_k [P, Q] = [P, \partial_k Q] + [\partial_k P, Q] + \sum_{\substack{i+j=k \\ i \neq o, j \neq o}} (\partial_i P)(\partial_j Q) - (\partial_i Q)(\partial_j P) \quad (\text{Leibniz})$$

D'une part, l'hypothèse de récurrence fournit les inégalités

$$\begin{aligned} \partial^\circ [P, \partial_k Q] &\leq (\partial^\circ P + \partial^\circ Q - 1) - 1 = \partial^\circ P + \partial^\circ Q - 2, \\ \partial^\circ [\partial_k P, Q] &\leq (\partial^\circ P - 1 + \partial^\circ Q) - 1 = \partial^\circ P + \partial^\circ Q - 2. \end{aligned}$$

D'autre part, nous tirons des propriétés (i) et (ii) :

$$\forall i \neq o, j \neq o, \quad \partial^\circ((\partial_i P)\partial_j Q - (\partial_i Q)\partial_j P) \leq \partial^\circ P - 1 + \partial^\circ Q - 1 = \partial^\circ P + \partial^\circ Q - 2.$$

En regroupant, nous obtenons

$$\forall k \neq o, \quad \partial^\circ \partial_k [P, Q] \leq \partial^\circ P + \partial^\circ Q - 2,$$

soit $\partial^\circ [P, Q] \leq \partial^\circ P + \partial^\circ Q - 1$ d'après (o). $\square$

Généralisation du théorème de Chen. Associons à tout élément de $\text{Lie } u$, l'automorphisme ϕ_u de l'algèbre valuée $K\langle\langle X \rangle\rangle$, défini par $\phi_u(P) = e^u P e^{-u}$; nous savons que $\phi_u = \exp(ad_u)$, où ad_u désigne la dérivation adjointe à u [Ree, Theorem 3.2].

Lemme 2.5. *Pour tout élément de Lie u , ϕ_u induit un automorphisme filtré de $Ker(\partial^\infty)$:*

$$\forall P \in Ker(\partial^\infty), \quad \partial^\circ(\phi_u P) = \partial^\circ P .$$

Démonstration. Montrons d'abord l'inégalité suivante par récurrence sur le quasi-degré :

$$(2.1.6) \quad \forall P \in Ker(\partial^\infty), \quad \partial^\circ(\phi_u P) \leq \partial^\circ P .$$

Cette dernière est vraie pour $\partial^\circ P = 0$ (ou $\partial^\circ P = -\infty$) car les constantes sont fixes pour l'endomorphisme ϕ_u . Soit $n > 0$ et supposons que (2.1.6) soit vraie pour $\partial^\circ P < n$. Soit, à présent, un quasi-polynôme P tel que $\partial^\circ P = n$. Pour tout mot k , notons α_k le k -ième coefficient de e^u . En usant de la formule de Leibniz, nous avons

$$\begin{aligned} \forall l \neq 0, \quad \partial_l(\phi_u P) &= \sum_{i+j+k=l} \alpha_i e^u (\partial_j P) (-1)^{\#k} \alpha_k e^{-u} \text{ (théorème 1.12)} \\ &= e^u P e^{-u} \sum_{i+k=l} \alpha_i (-1)^{\#k} \alpha_k \\ &\quad + e^u \sum_{\substack{i+j+k=l \\ j \neq 0}} \alpha_i (\partial_j P) (-1)^{\#k} \alpha_k e^{-u} \\ &= e^u \sum_{\substack{i+j+k=l \\ j \neq 0}} \alpha_i (\partial_j P) (-1)^{\#k} \alpha_k e^{-u} \quad (1.3.4) \\ &= \phi_u \left(\sum_{\substack{i+j+k=l \\ j \neq 0}} \alpha_i (\partial_j P) (-1)^{\#k} \alpha_k \right) . \end{aligned}$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence (2.1.6),

$$\forall l \neq 0, \quad \partial^\circ \partial_l(\phi_u P) \leq \partial^\circ P - 1 ,$$

et $\partial^\circ(\phi_u P) \leq \partial^\circ P$ (propriété (o) de la proposition 2.4).

La seconde inégalité s'obtient en appliquant à nouveau la première (2.1.6) à l'élément de Lie $-u$ et au quasi-polynôme $\phi_u(P)$:

$$\partial^\circ(\phi_{-u} \phi_u P) \leq \partial^\circ(\phi_u P) ,$$

d'où l'autre inégalité puisque $\phi_{-u} \phi_u$ est l'identité. $\square$

En particulier, pour tout élément de Lie u , nous avons la commutation

$$(2.1.7) \quad e^u Ker(\partial^\infty) = Ker(\partial^\infty) e^u .$$

Remarquons que le lemme 2.5 généralise la caractérisation très classique suivante :

$$(2.1.8) \quad v \in Lie \ll X \gg \iff e^u v e^{-u} \in Lie \ll X \gg .$$

Définition 2.6. Le domaine de ∂ , noté $Dom(\partial)$, est le $Ker(\partial^\infty)$ -sous-module de $K\ll X\gg$ engendré par le spectre de ∂ (structure naturelle de module à gauche déduite du produit).

Parce que 1 est une valeur propre, nous avons $Ker(\partial^\infty) \subset Dom(\partial)$ et $Dom(\partial)$ est dense dans $K\ll X\gg$. La formule (2.1.7) montre qu'une définition «à droite» conduirait au même ensemble. Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Chen : la famille $Spectre(\partial)$ est $Ker(\partial^\infty)$ -libre et, en particulier, $Spectre(\partial)$ est $K\langle X \rangle$ -libre.

Théorème 2.7. Pour des éléments de Lie distincts $u^{(1)}, \dots, u^{(m)}$ et pour des quasi-polynômes quelconques $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_m$, nous avons :

$$\sum_{p=1}^m P_p e^{u^{(p)}} Q_p = 0 \implies P_p Q_p = 0, \forall p.$$

Démonstration. D'après le lemme 2.5, nous avons :

$$\forall p, \quad e^{u^{(p)}} Q_p = \phi_{u^{(p)}}(Q_p) e^{u^{(p)}},$$

où $\phi_{u^{(p)}}(Q_p)$ est un quasi-polynôme; donc

$$\sum_{p=1}^m P_p e^{u^{(p)}} Q_p = \sum_{p=1}^m R_p e^{u^{(p)}},$$

avec $R_p = P_p \phi_{u^{(p)}}(Q_p)$ pour tout $p \in [1, m]$. Ainsi, nous pouvons toujours prendre $Q_p = 1$ dans l'énoncé du théorème. Reste à voir :

$$(2.1.9) \quad \sum_{p=1}^m P_p e^{u^{(p)}} = 0 \implies P_p = 0, \forall p.$$

Démontrons (2.1.9) par récurrence sur m ; pour $m = 1$, (2.1.9) exprime l'intégrité de l'algèbre $K\ll X\gg$. Fixons $m \geq 1$ et supposons que (2.1.9) soit vraie.

Donnons-nous $m + 1$ éléments de Lie distincts $u^{(0)}, \dots, u^{(m)}$, tels que seul $u^{(0)}$ soit éventuellement nul et donnons-nous aussi des quasi-polynômes $P_0, \dots, P_m$ vérifiant

$$(2.1.10) \quad \sum_{p=0}^m P_p e^{u^{(p)}} = 0.$$

D'après le corollaire 1.13, il existe des éléments de Lie distincts non nuls $v^{(1)}, \dots, v^{(m)}$, tels que

$$\forall p \in [1, m], \quad \alpha^{(p)} = e^{u^{(p)}} e^{-u^{(0)}}$$

où, pour tout entier p , nous avons posé $\alpha^{(p)} = e^{v^{(p)}}$. La relation (2.1.10) devient

$$-P_0 = \sum_{p=1}^m P_p \alpha^{(p)}.$$

Nous avons par la formule de Leibniz

$$\partial_k(P_p \alpha^{(p)}) = \left(\alpha_k^{(p)} P_p + \sum_{\substack{i+j=k \\ i \neq o}} \alpha_j^{(p)} \partial_i P_p \right) \alpha^{(p)} .$$

Posons $P_p^{(k,1)} = \sum_{\substack{i+j=k \\ i \neq o}} \alpha_j^{(p)} \partial_i P_p$, ainsi $P_p^{(k,1)} \in \text{Ker}(\partial^\infty)$ et $\partial^\circ P_p^{(k,1)} < \partial^\circ P_p$. De même, nous avons (récurrence) :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \partial_k^n(P_p e^{v^{(p)}}) = ((\alpha_k^{(p)})^n P_p + P_p^{(k,n)}) \alpha^{(p)} ,$$

avec $P_p^{(k,n)} \in \text{Ker}(\partial^\infty)$ et $\partial^\circ P_p^{(k,n)} < \partial^\circ P_p$. Pour $n = \partial^\circ P_0 + 1$ ($= 0$ si $P_0 = 0$), nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_k^n(-P_0) \\ &= \sum_{p=1}^m ((\alpha_k^{(p)})^n P_p + P_p^{(k,n)}) \alpha^{(p)} . \end{aligned}$$

C'est ici qu'intervient l'hypothèse de récurrence :

$$(2.1.11) \quad \forall p \in [1, m], \quad \forall k \neq o, \quad (\alpha_k^{(p)})^n P_p + P_p^{(k,n)} = 0 .$$

Mais, pour tout $p \in [1, m]$, $v^{(p)}$ est non nul : il existe $k \neq o$ tel que $\alpha_k^{(p)} \neq 0$. Ainsi, puisque

$$\partial^\circ P_p^{(k,n)} < \partial^\circ P_p$$

les annulations (2.1.11) deviennent

$$\forall p \in [1, m], \quad P_p = 0 .$$

Nécessairement, d'après 2.1.10, nous avons aussi $P_0 = 0$. $\square$

Le domaine de ∂ . Notons $K^{(\text{Lie} \ll X \gg)}$, l'algèbre du groupe $\text{Lie} \ll X \gg$ pour la structure de groupe transportée par l'exponentielle⁵ (corollaire 1.13). Il est naturel de noter e^u tout élément de la base canonique ($u \in \text{Lie} \ll X \gg$). Munissons le $\text{Ker}(\partial^\infty)$ -module à gauche $\text{Ker}(\partial^\infty) \otimes K^{(\text{Lie} \ll X \gg)}$ (module libre) de la structure d'algèbre associative suivante :

$$P \otimes e^u \cdot Q \otimes e^v = (P \phi_u Q) \otimes (e^u e^v), \quad P, Q \in \text{Ker}(\partial^\infty), \quad u, v \in \text{Lie} \ll X \gg .$$

Corollaire 2.8. *Le domaine de ∂ est une sous-algèbre de $K \ll X \gg$, naturellement isomorphe à $\text{Ker}(\partial^\infty) \otimes K^{(\text{Lie} \ll X \gg)}$.*

2.2. Décomposition spectrale.

Intégration des quasi-polynômes. La proposition 1.9 fournit de parfaits contre-exemples à un éventuel lemme de Poincaré polynomial : les éléments de Lie (non polynomiaux). Nous montrons que cet inconvénient disparaît si l'on considère les quasi-polynômes.

⁵Bourbaki l'appelle le groupe de Hausdorff.

Définition 2.9. Posons $\|v\|^2 = \sum_k v_k^2$ pour tout polynôme v et définissons la v -primitive d'une série u , si v est sans terme constant et $\|v\|^2 \neq 0$, comme suit :

$$(2.2.1) \quad \int_v(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n v^{n+1} \partial_v^n(u)}{\|v\|^{2(n+1)} (n+1)!}.$$

La série est bien définie : elle converge dès que $\text{val}(v) \neq 0$. Nous avons donc un endomorphisme $\int_v$ de $K\langle\langle X \rangle\rangle$, continu si v est homogène : $\text{val}(\int_v(u)) \geq \text{val}(u) + \text{val}(v)$.

Proposition 2.10. Pour tout élément de Lie homogène v tel que $\|v\|^2 \neq 0$, $\int_v$ définit une section de ∂_v .

Démonstration. Montrons d'abord la formule suivante

$$(2.2.2) \quad \forall n \geq 1, \forall u, \quad \partial_v(v^n u) - v^n \partial_v(u) = n \|v\|^2 v^{n-1} u.$$

Procédons par récurrence sur n . Si $n = 1$, c'est un calcul direct :

$$\begin{aligned} \partial_v(vu) &= \sum_k v_k \left(v \partial_k u + \sum_{i+j=k} v_i \partial_j(u) \right) & (\text{Leibniz}) \\ &= v \partial_v(u) + \sum_{i,j} v_{i+j} v_i \partial_j(u); \end{aligned}$$

puisque v est homogène, il faut prendre $j = 0$ dans la somme si l'on veut une contribution éventuellement non nulle; nous obtenons la formule désirée :

$$\partial_v(vu) = v \partial_v(u) + (\sum_i v_i^2) u.$$

Supposons (2.2.2) vraie pour un entier $n \geq 1$ fixé. En prenant $v^n u$ au lieu de u dans la formule (2.2.2) vraie à l'ordre 1, il vient

$$\partial_v(v^{n+1} u) = v \partial_v(v^n u) + \|v\|^2 v^n u.$$

Nous finissons avec l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \partial_v(v^{n+1} u) &= v(v^n \partial_v(u) + n \|v\|^2 v^{n-1} u) + \|v\|^2 v^n u \\ &= v^{n+1} \partial_v(u) + (n+1) \|v\|^2 v^n u. \end{aligned}$$

À présent, servons-nous de (2.2.2) pour montrer l'identité suivante :

$$(2.2.3) \quad \forall N, \forall u, \quad \partial_v \left(\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n v^{n+1} \partial_v^n(u)}{\|v\|^{2n} (n+1)!} \right) + \frac{(-1)^{N+1} v^{N+1} \partial_v^{N+1}(u)}{\|v\|^{2(N+1)} (N+1)!} = \|v\|^2 u.$$

Si $N = 0$, nous retrouvons (2.2.2). Supposons que la formule (2.2.3) soit vraie pour un ordre $N \geq 0$ fixé et montrons-la à l'ordre $N+1$. Par la formule (2.2.2), nous apprenons que

$$\partial_v(v^{N+2} \partial_v^{N+1} u) - v^{N+2} \partial_v^{N+2}(u) = (N+2) \|v\|^2 v^{N+1} \partial_v^{N+1}(u).$$

Il ne reste plus qu'à extraire $v^{N+1}\partial_v^{N+1}$ ci-dessus et à le substituer dans (2.2.3) pour conclure. Attaquons-nous enfin à la proposition : $\partial_v \circ \int_v = id$. Par continuité, il suffit de l'obtenir sur un sous-espace dense, disons $K\langle X \rangle$. Soit donc un polynôme u et soit N son degré. Puisque $\partial_v^{N+1}(u) = 0$, d'une part nous pouvons tronquer la série (2.2.1) à l'ordre N et, d'autre part, l'identité (2.2.3) se réduit à :

$$\partial_v \left(\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n v^{n+1} \partial_v^n(u)}{\|v\|^{2n} (n+1)!} \right) = \|v\|^2 u ;$$

c'est exactement ce qu'il fallait montrer : nous lisons $\partial_v(\int_v u) = u$. $\square$

Corollaire 2.11. *Pour tout élément de Lie homogène v tel que $\|v\|^2 \neq 0$, l'opérateur différentiel ∂_v est surjectif et induit des surjections : $Ker(\partial^{n+1}) \longrightarrow Ker(\partial^n)$ ($n \geq 1$).*

Démonstration. Pour tout quasi-polynôme u , nous avons (proposition 2.4) :

$$\forall n, \quad \partial^\circ(v^{n+1}\partial_v^n(u)) = n+1 + \partial^\circ(\partial_v^n(u)) \leq n+1 + \partial^\circ u - n = \partial^\circ u + 1.$$

Supposons $u \in Ker(\partial^m)$. Puisque $Ker(\partial^m)$ et $Ker(\partial^{m+1})$ sont fermés, l'inégalité ci-dessus montre que $\int_v(u) \in Ker(\partial^{m+1})$. $\square$

Le résultat suivant serait faux si l'on supprimait les préfixes «quasi-».

Théorème 2.12. *Soit une série $u \in K\ll X \gg$. Si $\partial_k u$ est quasi-polynomial pour tout mot non vide k , alors u est quasi-polynomial.*

Démonstration. Tout d'abord, l'isomorphisme naturel $K\langle X \rangle = K \otimes \mathbf{Q}\langle X \rangle$ montre que l'on peut toujours choisir une base graduée $\mathcal{B}$ de $Lie\langle X \rangle$ telle que tout élément $v \in \mathcal{B}$ vérifie $\|v\|^2 \neq 0$. Ensuite, puisque $Q(Sh(X)) = Lie\langle X \rangle$, nous avons l'équivalence

$$(2.2.4) \quad \forall k \neq o, \partial_k u \in Ker(\partial^\infty) \iff \forall v \in \mathcal{B}, \partial_v(u) \in Ker(\partial^\infty).$$

Ce qui signifie en d'autres termes :

$$(2.2.5) \quad u \in \bigcap_{v \in \mathcal{B}} \partial_v^{-1} \left(Ker(\partial^\infty) \right).$$

Pour tout $v \in \mathcal{B}$, ∂_v induit une surjection de $Ker(\partial^\infty)$ (corollaire 2.11), d'où

$$\forall v \in \mathcal{B}, \quad \partial_v^{-1} \left(Ker(\partial^\infty) \right) = Ker(\partial^\infty) \oplus D_v$$

où $D_v \subset Ker(\partial_v)$ est un supplémentaire de $Ker(\partial^\infty)$ dans $Ker(\partial^\infty) + Ker(\partial_v)$, et

$$\bigcap_{v \in \mathcal{B}} \partial_v^{-1} \left(Ker(\partial^\infty) \right) = Ker(\partial^\infty) \oplus \bigcap_{v \in \mathcal{B}} D_v.$$

Mais la propriété de séparation « modulo le terme constant » (1.2.2) assure que

$$\bigcap_{v \in \mathcal{B}} D_v \subset \bigcap_{v \in \mathcal{B}} \text{Ker}(\partial_v) = K ,$$

soit $\bigcap_v D_v = \{0\}$ et $u \in \text{Ker}(\partial^\infty)$. $\square$

Nous en déduisons un « lemme de Poincaré quasi-polynomial » (à comparer avec le théorème 1.7) :

Corollaire 2.13. *Pour tout morphisme K -linéaire $f : \text{Lie}\langle X \rangle \rightarrow \text{Ker}(\partial^\infty)$, $u \mapsto f_u$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- i) *Il existe $F \in \text{Ker}(\partial^\infty)$, unique, tel que $F_o = 0$ et $\partial_u F = f_u$ pour tout $u \in \text{Lie}\langle X \rangle$.*
- ii) *On a $\partial_u(f_v) = \partial_v(f_u)$, pour tout $u, v \in \text{Lie}\langle X \rangle$ (formules de Stokes).*

Décomposition spectrale. Définissons le noyau de ∂ relatif à une série :

$$(2.2.6) \quad \forall \alpha \in K\langle\langle X \rangle\rangle, \quad \text{Ker}(\partial - \alpha) = \bigcap_{k \neq o} \text{Ker}(\partial_k - \alpha_k) .$$

D'après la proposition 1.12, nous avons :

$$(2.2.7) \quad \text{Ker}(\partial - \alpha) = \begin{cases} K\alpha & \text{si } \alpha = e^u, u \in \text{Lie}\langle\langle X \rangle\rangle ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour plusieurs séries $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$, nous itérons la définition de noyau relatif comme suit :

$$\text{Ker}((\partial - \alpha^{(1)}) \cdots (\partial - \alpha^{(n)})) = \bigcap_{i^{(1)} \neq o, \dots, i^{(n)} \neq o} \text{Ker}((\partial_{i^{(1)}} - \alpha_{i^{(1)}}^{(1)}) \cdots (\partial_{i^{(n)}} - \alpha_{i^{(n)}}^{(n)})) ;$$

l'ordre des $(\partial - \alpha^{(p)})$ n'importe pas et nous utiliserons des exposants pour signifier les répétitions. Le noyau itéré « absolu » $\text{Ker}(\partial^n)$ est le cas particulier de noyau relatif où $\alpha^{(1)} = \dots = \alpha^{(n)} = 1$. D'après (2.2.7), si l'une des séries $\alpha^{(p)}$ n'est pas exponentielle d'un élément de Lie, la contribution de $(\partial - \alpha^{(p)})$ au noyau itéré relatif est nulle :

$$\begin{aligned} & \text{Ker}((\partial - \alpha^{(1)}) \cdots (\partial - \alpha^{(m)})) \\ &= \text{Ker}((\partial - \alpha^{(1)}) \cdots (\partial - \alpha^{(p-1)})(\partial - \alpha^{(p+1)}) \cdots (\partial - \alpha^{(m)})) . \end{aligned}$$

Soit $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$ des exponentielles d'éléments de Lie distincts et soit des entiers naturels non nuls $m_1, \dots, m_n$ représentant leurs « multiplicités ». Le théorème suivant est le résultat principal de cette section.

Théorème 2.14.

$$\text{Ker}\left((\partial - \alpha^{(1)})^{m_1} \cdots (\partial - \alpha^{(n)})^{m_n}\right) = \bigoplus_{p=1}^n \text{Ker}(\partial^{m_p}) \alpha^{(p)} .$$

Démonstration. Montrons d'abord une inclusion

$$(2.2.8) \quad Ker\left((\partial - \alpha^{(1)})^{m_1} \cdots (\partial - \alpha^{(n)})^{m_n}\right) \supset \bigoplus_{p=1}^n Ker(\partial^{m_p})\alpha^{(p)}.$$

Les opérateurs $\partial_k - \alpha_k^{(p)}$ commutent deux à deux, pour tout mot k et tout entier p . Donc, pour montrer l'inclusion (2.2.8), il suffit de vérifier les suivantes :

$$\forall p \in [1, n], \quad Ker(\partial^{m_p})\alpha^{(p)} \subset Ker(\partial - \alpha^{(p)})^{m_p}.$$

En effet, pour $k \neq o$, pour $p \in [1, n]$ et pour $P \in Ker(\partial^{m_p})$, nous avons

$$\begin{aligned} (\partial_k - \alpha_k^{(p)})(P\alpha^{(p)}) &= \sum_{i+j=k} (\partial_i P)(\partial_j \alpha^{(p)}) - \alpha_k^{(p)} P\alpha^{(p)} \quad (\text{Leibniz}) \\ &= \left(\sum_{i \neq o, i+j=k} \alpha_j^{(p)} \partial_i P \right) \alpha^{(p)} \\ &= Q^{(p,k)} \alpha^{(p)}, \end{aligned}$$

avec $\partial^\circ Q^{(p,k)} < \partial^\circ P$. En itérant, nous trouvons $P\alpha^{(p)} \in Ker(\partial - \alpha^{(p)})^{m_p}$.

Démontrons l'inclusion inverse, par récurrence sur $\sum_p m_p$. Pour $\sum_p m_p = 1$ nous retrouvons (2.2.7). Soit $N > 1$ et supposons que l'inclusion inverse de (2.2.7) soit vraie dès que $\sum_p m_p < N$. Nous envisageons deux cas : $n = 1$ ou $n > 1$.

1^{er} cas : $n = 1$. Posons $\alpha = \alpha^{(1)}$. Pour $v \in Ker(\partial - \alpha)^N$, il faut montrer l'appartenance de $v\alpha^{-1}$ à $Ker(\partial^N)$. Nous avons

$$(2.2.9) \quad \forall k \neq o, \quad (\partial_k - \alpha_k)v \in Ker(\partial - \alpha)^{N-1}.$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$(2.2.10) \quad \forall k \neq o, \exists P^{(k)} \in Ker(\partial^{N-1}), \quad (\partial_k - \alpha_k)v = P^{(k)}\alpha.$$

Or, par la formule de Leibniz, nous avons

$$\partial_k(v\alpha^{-1}) = \sum_{i+j=k} (-1)^{\#j} \alpha_j (\partial_i v) \alpha^{-1}. \quad (1.3.4)$$

$$= \left((-1)^{\#k} \alpha_k v + \sum_{i \neq o, i+j=k} (-1)^{\#j} \alpha_j (P^{(i)}\alpha + \alpha_i v) \right) \alpha^{-1} \quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i \neq o, i+j=k} (-1)^{\#j} \alpha_j P^{(i)} + v \sum_{i+j=k} (-1)^{\#j} \alpha_j \alpha_i \alpha^{-1} \\ &= \sum_{i \neq o, i+j=k} (-1)^{\#j} \alpha_j P^{(i)}, \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

ce qui implique

$$\forall k \neq o, \quad \partial_k(v\alpha^{-1}) \in Ker(\partial^{N-1}).$$

Nous concluons grâce au théorème 2.12 qui assure le caractère quasi-polynomial de $v\alpha^{-1}$.

2^e cas : $n > 1$. Il existe alors deux entiers $q_0, q_1 \in [1, n]$ et un mot non vide k , tels que $\alpha_k^{(q_0)} \neq \alpha_k^{(q_1)}$. Soit $v \in \text{Ker}\left((\partial - \alpha^{(1)})^{m_1} \dots (\partial - \alpha^{(n)})^{m_n}\right)$. Nous avons, pour tout mot i ,

$$\begin{cases} (\partial_i - \alpha_i^{(q_0)})v \in \text{Ker}\left((\partial - \alpha^{(1)})^{m_1} \dots (\partial - \alpha^{(q_0)})^{m_{q_0}-1} \dots (\partial - \alpha^{(n)})^{m_n}\right), \\ (\partial_i - \alpha_i^{(q_1)})v \in \text{Ker}\left((\partial - \alpha^{(1)})^{m_1} \dots (\partial - \alpha^{(q_1)})^{m_{q_1}-1} \dots (\partial - \alpha^{(n)})^{m_n}\right). \end{cases}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence aux lignes ci-dessus, nous obtenons :

$$(2.2.11) \quad \begin{cases} (\partial_k - \alpha_k^{(q_0)})v = \sum_{p=1}^n Q_0^{(p,k)} \alpha^{(p)}, \\ (\partial_k - \alpha_k^{(q_1)})v = \sum_{p=1}^n Q_1^{(p,k)} \alpha^{(p)}, \end{cases}$$

où, pour tout $p \in [1, n]$, $Q_0^{(p,k)}$ et $Q_1^{(p,k)}$ sont des quasi-polynômes tels que :

$$\partial^\circ Q_0^{(p,k)} \leq \begin{cases} m_p - 1 & \text{si } p \neq q_0, \\ m_{q_0} - 2 & \text{si } p = q_0; \end{cases} \quad \partial^\circ Q_1^{(p,k)} \leq \begin{cases} m_p - 1 & \text{si } p \neq q_1, \\ m_{q_1} - 2 & \text{si } p = q_1. \end{cases}$$

De la soustraction des lignes (2.2.11), il sort

$$(\alpha_k^{(q_1)} - \alpha_k^{(q_0)})v = \sum_{p=1}^n (Q_1^{(p,k)} - Q_0^{(p,k)}) \alpha^{(p)},$$

soit, puisque $\alpha_k^{(q_1)} \neq \alpha_k^{(q_0)}$,

$$v \in \bigoplus_{p=1}^n \text{Ker}(\partial^{m_p}) \alpha^{(p)}. \quad \square$$

Par exemple, si α et β sont deux exponentielles d'éléments de Lie, alors nous avons (2.1.5) :

$$\text{Ker}((\partial - \alpha)(\partial - \beta)) = \begin{cases} K\alpha \oplus K\beta & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ (K \oplus \text{Lie}\langle\langle X \rangle\rangle) \alpha & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Corollaire 2.15. *Le domaine de ∂ est la limite inductive des noyaux itérés relatifs :*

$$\text{Dom}(\partial) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)} \in \text{Spectre}(\partial)} \text{Ker}((\partial - \alpha^{(1)}) \dots (\partial - \alpha^{(n)})).$$

Remerciements. Mes premiers remerciements vont à Jean-Paul Brasselet pour la constance de son soutien et pour son écoute amicale. Je remercie aussi Pierre Cartier pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour l'enseignement que j'ai tiré de ses précieuses réflexions. Enfin, je remercie grandement le rapporteur pour la qualité de ses suggestions.

English extended abstract. Exponentials of Lie elements play an important role in many theories. In this article we are interested in an old and mysterious result of Kuo-Tsai Chen: *exponentials of Lie elements are linearly independant* [Ch]. In order to explain this fact, we introduce a new Differential Calculus for the non commutative framework (§1). We obtain a theory where classical (and hard) theorems about Lie elements (formulas of Friedrichs, Ree, Chen, Baker-Campbell-Hausdorff, ...) become usual statements of any good differential theory, namely *Taylor expansion*, *Leibniz rule*, *Poincaré Lemma*, *Spectral Decomposition*, ...

Thanks to this non commutative Differential calculus, we are able to understand Chen's theorem (§2) of which our main result is a generalization: *exponential of Lie elements are independant over the polynomials*. In fact, we have a little more: introducing the "quasi-polynomials" (an algebra lying between tensor polynomials and power series), we obtain the independence over the quasi-polynomials. Another result we give is a *Spectral Decomposition Theorem* for this Differential Calculus: each iterated kernel, parametrized by exponentials of Lie elements (the spectrum), is isomorphic to the space of quasi-polynomials. This is a "non commutative version", fully satisfactory, of a well-known fact in linear differential equations theory, on polynomials combinations of exponentials of linear forms.

The usefulness of a new differential calculus appeared to the author, when he studied a link between a "singular" De Rham Theorem and the special *polylogarithms* functions [Be1, Be2]. But it is obvious that there exist others domains where this non commutative tool may apply. We think, for instance, to Knot Theory in order to compute polynomials invariants (cf. R. H. Fox) or, to the study of Lie morphisms and polynomials automorphisms using a "non commutative Jacobian theory" (cf. C. Reutenauer).

BIBLIOGRAPHIE

- [Be1] B. Bendiffalah, *Contributions à l'étude locale des singularités*, Thèse de doctorat, Université de Provence, Marseille, 1994.
- [Be2] ———, *Shadow forms of Brasselet-Goresky-MacPherson*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 4747–4763.
- [Car] P. Cartier, *Démonstration algébrique de la formule de Hausdorff*, Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 241–249.
- [Che] K. T. Chen, *Linear independence of exponentials of Lie elements*, An. Acad. Brasil. Ci. **31** (1959), 507–509.
- [MM] J. W. Milnor et J. C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. **81** (1965), 211–264.
- [Ree] R. Ree, *Lie elements and an algebra associated with shuffles*, Ann. of Math. **68** (1958), 210–220.
- [Reu] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Clarendon Press, Oxford, 1993.

B. BENDIFFALAH
 LABORATOIRE A.G.A.T.A.
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, CASE 051
 UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER II
 PLACE EUGÈNE BATAILLON
 34095 MONTPELLIER CEDEX 5
 FRANCE