

CONTINUITÉ AUTOMATIQUE DE MORPHISMES D'ALGÈBRES LOCALEMENT CONVEXES

A. BEDDAA

RÉSUMÉ. Nous définissons une notion de saturation dans les algèbres localement convexes (a.l.c.) que nous utilisons pour donner des théorèmes de continuité automatique. En particulier, nous montrons que tout morphisme d'une Q -algèbre topologique dans une a.l.c. saturée est automatiquement continu; ce qui montre l'unicité de la topologie de Q -a.l.c. saturée. Plusieurs applications et conséquences sont données.

ABSTRACT. A notion of saturatedness is defined in locally convex algebras. It is used to give automatic continuity theorems improving known ones. In particular, we show that every homomorphism from a topological Q -algebra into a saturated locally convex algebra is continuous. Some consequences are given.

Introduction. Dans [3], A. C. Cochran a défini dans les algèbres localement uniformément A -convexes (a.l.u. A -convexes) une notion de saturation. Dans [7], M. Oudadess a montré que la classe des a.l.u. A -convexes saturées au sens de Cochran est vide et a proposé une nouvelle définition. Dans le but de donner des théorèmes de continuité automatique, nous étendons cette dernière définition aux algèbres localement convexes (a.l.c.) quelconques. Nous obtenons que dans toute a.l.c. séparée saturée, l'intersection des noyaux des caractères non nuls est réduite à zéro. Ceci entraîne, en particulier, la commutativité et la semi-simplicité de l'algèbre. En utilisant un résultat de [7], nous montrons que toute algèbre normée uniforme est saturée. Ce dernier résultat permet d'obtenir que les algèbres localement multiplicativement convexes (a.l.m.c.) uniformes sont saturées. Nous montrons que tout morphisme d'une Q -algèbre topologique dans une a.l.c. saturée est automatiquement continu (théorème 4). Ce résultat généralise, dans le cas unitaire, le théorème 2.1 donné par S. J. Bhatt dans [1] où l'auteur considère des morphismes d'une Q -a.l.c. dans une a.l.m.c. uniforme. Nous obtenons comme corollaire de ceci, l'unicité de la topologie de Q -a.l.c. saturée; si elle est séparée, cette topologie est normable. Nous obtenons alors, comme conséquence, le théorème 2 de [2]. Dans le cas involutif, nous montrons que les a.l.m.c. stellaires commutatives sont saturées. Nous obtenons alors, comme corollaire du théorème 4, une amélioration, dans le cas commutatif unitaire, du théorème 3.1 donné par Maria Fragouloupoulou dans [5].

Reçu le 16 août 1995 et, sous forme définitive, le 3 juin 1996.

Préliminaires. Soit A une algèbre unitaire sur le corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle spectre d'un élément x de A l'ensemble $\sigma(x) = \{ \lambda \in K \mid \lambda e - x \notin G(A) \}$ où e est l'unité de A et $G(A)$ est le groupe des éléments inversibles de A . Le rayon spectral de x est le nombre $\rho_A(x) = \sup\{ |\lambda|, \lambda \in \sigma(x) \}$. Soit $\mathcal{T}$ une topologie vectorielle sur A . On dira que $(A, \mathcal{T})$ est une algèbre topologique si la multiplication $(x, y) \mapsto xy$ de $A \times A$ dans A est séparément continue. Si en plus $\mathcal{T}$ est localement convexe, on dira que $(A, \mathcal{T})$ est une algèbre localement convexe (a.l.c.). Une algèbre topologique est dite une Q -algèbre si le groupe de ses éléments inversibles est ouvert. Une algèbre localement multiplicativement convexe (a.l.m.c.) est une a.l.c. dont la topologie est définie par une famille filtrante de semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ vérifiant :

$$p_\lambda(xy) \leq p_\lambda(x) p_\lambda(y), \text{ pour tout } x, y \in A \text{ et tout } \lambda \in \Lambda. \quad (1)$$

Une a.l.m.c. est dite uniforme si sa topologie est définie par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ vérifiant (1) et telle que $p_\lambda(x^2) = [p_\lambda(x)]^2$, pour tout x de A et tout $\lambda \in \Lambda$. Elle est dite stellaire si elle est munie d'une involution $*$ telle que $p_\lambda(xx^*) = [p_\lambda(x)]^2$, pour tout x de A et tout λ de Λ .

Dans tout ce qui suit, les algèbres considérées sont complexes associatives et unitaires. L'unité est notée e .

Dans le but d'obtenir des théorèmes de continuité automatique, nous donnons la définition suivante qui est une extension aux a.l.c. de celle dans [7].

Définition 1. Soit A une a.l.c. dont l'ensemble des caractères non nuls $M^*(A)$ est non vide. On dit que A est saturée s'il existe une famille filtrante de semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ définissant la topologie de A et vérifiant :

- (i) $p_\lambda(e) = 1$, pour tout $\lambda \in \Lambda$, où e est l'unité de A .
- (ii) $\forall x \in A, \forall \lambda \in \Lambda$ tels que $p_\lambda(x) = 1$, il existe $\chi_0, \chi \in M^*(A)$ tels que :

$$|\chi_0(x)| = \sup\{ |\chi(y)|, p_\lambda(y) \leq 1 \}.$$

Remarque. Une a.l.c. séparée et saturée est nécessairement commutative et semi-simple. En effet, on a $\text{Rad}A \subset \bigcap \{ \text{Ker}(\chi), \chi \in M^*(A) \} = \{0\}$, car si $x \in A$ et $x \neq 0$, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $p_\lambda(x) \neq 0$. Pour $z = x/p_\lambda(x)$, il existe χ_0 et χ dans $M^*(A)$ tels que $|\chi_0(z)| = \sup\{ |\chi(y)|, p_\lambda(y) \leq 1 \} \geq 1$. D'où $|\chi_0(x)| \geq p_\lambda(x) > 0$. Par conséquent, $x \notin \text{Ker}(\chi_0)$. Pour la commutativité, on a pour tous $x, y \in A$, $xy - yx \in \bigcap \{ \text{Ker}(\chi), \chi \in M^*(A) \} = \{0\}$.

M. Oudadess [7] a étudié les algèbres localement uniformément A -convexes saturées et a montré que les algèbres de Banach saturées sont exactement celles qui sont uniformes. En utilisant ce résultat, nous obtenons la proposition ci-dessous.

Proposition 1. Soit $(A, \|\cdot\|)$ une algèbre uniforme normée non nécessairement complète. Alors A est saturée.

Preuve. La complétée $\tilde{A}$ de A est une algèbre de Banach uniforme, donc saturée [7]. Soit $x \in A$ tel que $\|x\| = 1$. En tant qu'élément de $\tilde{A}$, il existe deux caractères non nuls χ_0 et χ de $\tilde{A}$ tels que :

$$|\chi_0(x)| = \sup\{ |\chi(y)|, \|y\| \leq 1, y \in \tilde{A} \}.$$

Comme les restrictions de χ_0 et χ à A sont des caractères non nuls, il suffit de montrer que :

$$\sup\{|\chi(y)|, \|y\| \leq 1, y \in \tilde{A}\} = \sup\{|\chi(x)|, \|x\| \leq 1, x \in A\}.$$

Soit $y \in \tilde{A}$ tel que $\|y\| \leq 1$. On envisage deux cas :

Premier cas : Si $\|y\| < 1$. Il existe une suite $(x_n)_n$ dans A , qui converge vers y dans $\tilde{A}$. Pour n assez grand, on aura $\|x_n\| < 1$. Or $|\chi(x_n)| \leq \sup\{|\chi(x)|, x \in A, \|x\| \leq 1\}$ et χ est continu sur $\tilde{A}$, donc :

$$|\chi(y)| \leq \sup\{|\chi(x)|, x \in A, \|x\| \leq 1\}.$$

Deuxième cas : Si $\|y\| = 1$. Posons $y_n = (n+1)^{-1} \cdot ny$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $\|y_n\| < 1$, pour tout n . D'après ce qui précède, $|\chi(y_n)| \leq \sup\{|\chi(x)|, x \in A, \|x\| \leq 1\}$, pour tout n . Comme $(y_n)_n$ converge vers y dans $\tilde{A}$ et χ est continu, on aura par passage à la limite,

$$|\chi(y)| \leq \sup\{|\chi(x)|, x \in A, \|x\| \leq 1\}.$$

D'où la proposition. $\square$

En utilisant le résultat précédent, on obtient le résultat plus général suivant.

Proposition 2. *Toute a.l.m.c. uniforme A est saturée.*

Preuve. Soit $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de semi-normes sous-multiplicatives définissant la topologie de A et vérifiant $p_\lambda(x^2) = [p_\lambda(x)]^2$, pour tout x et tout λ . Pour tout $\lambda \in \Lambda$, $p_\lambda(e) = 1$ sinon p_λ serait identiquement nulle. D'autre part, soient $x \in A$ et $\lambda \in \Lambda$ tels que $p_\lambda(x) = 1$. On considère l'algèbre $A_\lambda = A/\text{Ker}(p_\lambda)$ munie de la norme $\|s(y)\|_\lambda = p_\lambda(y)$, $y \in A$, où s désigne la surjection canonique de A sur A_λ . D'après la proposition 1, $(A_\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$ est saturée. Donc il existe $\tilde{\chi}_0$ et $\tilde{\chi}$ deux caractères non nuls de A_λ tels que :

$$|\tilde{\chi}_0(s(x))| = \sup\{|\tilde{\chi}(s(y))|, \|s(y)\|_\lambda \leq 1\}.$$

Considérons $\chi_0 = \tilde{\chi}_0 \circ s$ et $\chi = \tilde{\chi} \circ s$. Ce sont deux caractères non nuls de A vérifiant :

$$|\chi_0(x)| = \sup\{|\chi(y)|, p_\lambda(y) \leq 1\}. \quad \square$$

De la même façon on montre la proposition suivante.

Proposition 3. *Toute a.l.m.c. stellaire commutative est saturée.*

Remarques. (1) Il existe des a.l.c. saturées qui ne sont pas uniformes. En effet. Soit l'algèbre $C_b(\mathbb{R})$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes. On la munit de la topologie stricte β définie par la famille de semi-normes $(p_\Phi)_{\Phi \in \Gamma}$, où

$$p_\Phi(f) = \sup\{|\Phi(x)f(x)|, x \in \mathbb{R}\}, \text{ pour tout } f \in C_b(\mathbb{R})$$

et

$$\Gamma = \{\Phi \in C_b(\mathbb{R}) \mid \Phi > 0, \|\Phi\|_\infty = 1 \text{ et } \Phi \text{ est nulle à l'infini}\}.$$

L'algèbre $(C_b(\mathbb{R}), (p_\Phi)_{\Phi \in \Gamma})$ est une a.l.c. complète qui n'est pas localement m -convexe (voir [4]). Elle est saturée. En effet, (i) de la définition 1 est trivialement vérifiée. Pour (ii), soient $f \in C_b(\mathbb{R})$ et $\Phi \in \Gamma$ tels que $p_\Phi(f) = 1$. Comme Φ s'annule à l'infini, la borne supérieure est atteinte et alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$|f(x)\Phi(x)| = \sup\{|\Phi(x)f(x)|, x \in \mathbb{R}\} = 1.$$

On montre que $|f(x)| = \sup\{|g(x)|, p_\Phi(g) \leq 1\}$, d'où (ii). L'algèbre $C_b(\mathbb{R})$ n'est pas uniforme car sinon, elle serait localement m -convexe (voir [2]).

(2) Il existe des algèbres localement convexes saturées (dont l'ensemble des caractères non nuls est non vide) qui ne sont ni localement uniformément A -convexes ni localement multiplicativement convexes. En effet, considérons l'algèbre $C(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ munie de la topologie de la convergence compacte et l'algèbre $C_b(\mathbb{R})$ munie de la topologie stricte β . On montre que l'algèbre produit $C(\mathbb{R}) \times C_b(\mathbb{R})$ munie de la topologie produit est une a.l.c. saturée. Ce n'est pas une a.l.m.c. car $C_b(\mathbb{R})$ ne l'est pas et elle n'est pas l.u. A -convexe puisque $C(\mathbb{R})$ ne l'est pas ($C(\mathbb{R})$ contient des éléments non réguliers).

Dans ce qui suit, nous donnons des théorèmes de continuité automatique dans le cadre général des a.l.c.

Théorème 4. Soient A une algèbre, $(B, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une a.l.c. saturée et h un morphisme d'algèbres de A dans B . Alors $p_\lambda(h(x)) \leq \rho_A(x)$, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $x \in A$. En particulier, si A est une Q -algèbre topologique, alors h est continu.

Preuve. Soient $\lambda \in \Lambda$ et $y \in B$. Si $p_\lambda(y) \neq 0$, alors $p_\lambda(y/p_\lambda(y)) = 1$. Comme B est saturée, il existe χ_0 et χ deux caractères non nuls de B tels que :

$$\left| \chi_0\left(\frac{y}{p_\lambda(y)}\right) \right| = \sup\{|\chi(z)|, p_\lambda(z) \leq 1\} \geq |\chi(e)| = 1.$$

D'où $|\chi_0(y)| \geq p_\lambda(y)$. Or $|\chi_0(y)| \leq \rho_B(y)$. On en déduit que $p_\lambda(h(x)) \leq \rho_B(h(x))$ pour tout $x \in A$. Mais h est un morphisme d'algèbres, donc $\rho_B(h(x)) \leq \rho_A(x)$. D'où $p_\lambda(h(x)) \leq \rho_A(x)$, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $x \in A$. Si A est une Q -algèbre topologique, alors $\{x \in A, \rho_A(x) \leq 1\}$ est un voisinage de 0. Soit W un voisinage de 0 dans B . Il existe $\lambda \in \Lambda$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\{y \in B, p_\lambda(y) \leq \varepsilon\} \subset W$. Posons $V = \{x \in A, \rho_A(x) \leq \varepsilon\}$. C'est un voisinage de 0 dans A et on a $h(x) \in W$, pour tout $x \in V$. D'où la continuité de h . $\square$

Remarque. Par le théorème précédent nous obtenons comme conséquence, dans le cas unitaire, le théorème 2.1 de [1].

Corollaire 5. Soient une algèbre A , $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies qui font de A une Q -algèbre topologique et une a.l.c. saturée respectivement. Alors

- (i) La topologie $\mathcal{T}_2$ est moins fine que $\mathcal{T}_1$.
- (ii) S'il existe sur A une topologie de Q -a.l.c. saturée, alors cette topologie est unique.

Proposition 6. *La topologie d'une Q -a.l.c. séparée saturée est normable.*

Preuve. Soit $(A, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une Q -a.l.c. séparée et saturée. On a, comme dans la preuve du théorème 4, $\sup\{p_\lambda(x) \mid \lambda \in \Lambda\} \leq \rho(x)$, pour tout x de A . Comme A est une Q -algèbre, $\rho(x) < +\infty$, pour tout x . Posons $\|x\| = \sup\{p_\lambda(x) \mid \lambda \in \Lambda\}$. On montre que la topologie de A est définie par la norme $\|\cdot\|$. $\square$

Remarques. (1) Dans le cas commutatif et unitaire, on obtient comme corollaire de la proposition 6, le théorème 4.3 de [8].

(2) Comme conséquence du corollaire précédent, on obtient le résultat suivant sur l'algèbre classique $C(K)$ des fonctions continues sur un compact K . Il met en relief des propriétés qui caractérisent, en un certain sens, la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

Corollaire 7. *La seule topologie d'algèbre localement convexe qui fait de $C(K)$ une Q -a.l.c. saturée est celle définie par la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$.*

Corollaire 8. *Une a.l.m.c. séparée saturée (en particulier une a.l.m.c. uniforme) qui est une Q -algèbre est en fait une algèbre normée.*

Corollaire 9 [2, Theorem 2]. *Une a.l.m.c. uniforme complète qui est une Q -algèbre est en fait une algèbre de Banach (uniforme).*

En utilisant le théorème 4 et le fait que toute a.l.m.c. stellaire commutative est saturée, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 10. *Soit $(A, (p_\alpha)_{\alpha \in \Gamma})$ une Q -l.c.*-algèbre et $(B, (q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une a.l.m.c. stellaire commutative. Alors tout *-morphisme d'algèbre h de A dans B est continu. En particulier pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que $q_\lambda(h(x)) \leq p_\alpha(x)$, pour tout $x \in A$.*

Remarque. Le corollaire précédent est une amélioration, dans le cas où l'algèbre d'arrivée B est supposée commutative et unitaire, du théorème 3.1 de Maria Fragoulopoulou dans [5].

Remerciements. L'auteur remercie vivement le Professeur M. Akkar de l'Université de Bordeaux I pour les séances de travail qu'il lui a accordées à Bordeaux. Il remercie également le Professeur M. Oudadess de l'École Nationale Supérieure de Rabat pour ses remarques qui ont beaucoup amélioré la présentation de cet article. Il remercie aussi l'un des arbitres, pour ses commentaires et ses suggestions.

English extended abstract. Throughout this paper all considered algebras are complex, associative and unital. In the present paper, we extend the definition of saturatedness given by M. Oudadess in uniformly A -convex algebras (see [7]) to locally convex algebras with non-empty set of non-identically zero multiplicative functionals. We use the notion of saturatedness to give some theorems of automatic continuity in locally convex algebras (we assume no metrizable and no completeness). The main result is Theorem 4, in which we prove that every homomorphism from a topological Q -algebra into a saturated locally convex algebra is automatically continuous.

We show that uniform locally multiplicatively convex algebras are saturated. Then, in the unital case, our theorem improves theorem 2.1 of S. J. Bhatt in [1]. We also

show that commutative stellar locally multiplicatively convex algebras are saturated and consequently we improve in the unital commutative case, Theorem 3.1 due to M. Fragoulopoulou in [5], (in fact, the commutativity is needed only for the range algebra). Using our theorem, we obtain that the topology of a saturated locally convex Q -algebra is unique; in the Hausdorff case this topology is normable. In particular, Hausdorff uniform locally multiplicatively convex Q -algebras are in fact normed algebras. We therefore obtain, as a consequence, the main theorem of S. J. Bhatt and D. J. Karia in [2]. Finally, we obtain, as an application to the known algebra $C(K)$ of continuous functions on a Hausdorff compact set K , that the only topology which makes $C(K)$ a saturated locally convex Q -algebra is the topology of uniform convergence.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. J. Bhatt, *Automatic continuity of homomorphisms in topological algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 135–139.
2. S. J. Bhatt et D. J. Karia, *Uniqueness of the uniform norm with an application to topological algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 499–504.
3. A. C. Cochran, *Representation of A -convex algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 473–479.
4. A. C. Cochran, R. Keown et C. R. Williams, *On a class of topological algebras*, Pacific J. Math. **34** (1970), 17–25.
5. M. Fragoulopoulou, *Automatic continuity of $*$ -morphisms between nonnormed topological $*$ -algebras*, Pacific J. Math. **147** (1991), 57–70.
6. P. D. Morris et D. E. Wulbert, *Functional representation of topological algebras*, Pacific J. Math. **22** (1967), 323–337.
7. M. Oudadess, *v -saturated uniformly A -convex algebras*, Math. Japon. **35** (1990), 615–620.
8. Y. Tsertos, *Representations and extensions of positive functionals on $*$ -algebras*, Boll. Uni. Mat. Ital. B (7) **8** (1994), 541–555.

A. BEDDAA

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

B. P. 5118, TAKADDOUM

RABAT (MAROC)