

RÉSULTATS SUR DES CÔNES SÉQUENTIELLEMENT COMPLÈTEMENT RÉGULIERS

AHMED OULD BAHYA

RÉSUMÉ. Dans ce travail, nous étendons à des cônes séquentiellement complètement réguliers les propositions 13 et 14 de [6]. Nous donnons également une preuve directe d'un résultat similaire à la proposition 12 de [6]. Ce qui nous a permis de retrouver comme corollaire la proposition 5 de [4]. Enfin, nous obtenons une condition suffisante pour qu'un cône séquentiellement complètement régulier soit bien basé et une autre pour qu'il soit normal.

ABSTRACT. In this paper we give a proof of a result similar to Proposition 12 of [6]. In this proof we make use only of the definition of semicomplete cones. This enables us to arrive at Proposition 5 of [4] as a corollary. We also extend to fully regular cones Propositions 13 and 14 of [6]. This gives rise to new properties of fully regular cones.

1. Introduction. Dans [6], G. Mokobodzki introduit la notion de cône semi-complet; il montre que si p est une semi-norme continue sur le cône semi-complet K pour la suite $(f_n)_n$ de formes linéaires continues et positives sur K alors il existe n tel que :

$$\forall x \in K; \quad p(x) \leq \sum_{1 \leq k \leq n} f_k(x).$$

Il utilise pour cela des propriétés d'applications relativement bornées sur le cône K (propositions 13 et 14 de [6]).

G. Isac reprend, dans [4], les résultats de Mokobodzki pour obtenir la nucléarité de tout cône semi-complet.

Dans ce travail, nous montrons en utilisant uniquement la définition, que si p est une semi-norme continue sur le cône semi-complet K , alors il existe n tel que :

$$\forall x \in K; \quad p(x) \leq n^2 \sum_{1 \leq k \leq n} f_k(x).$$

Ceci permet de retrouver un résultat d'Isac sans faire appel à la notion d'application relativement bornée comme c'est le cas des lemmes 1 et 2 en page 164 de [4]. Par

Reçu le 12 juillet 1995 et, sous forme définitive, le 14 mars 1996.

Ce travail a été réalisé lors d'une mission de recherche que l'auteur a effectuée à l'E.N.S. Takaddoum de Rabat. Cette mission était entièrement financée par l'AUELF-UREF.

ailleurs nous étendons au cas des cônes séquentiellement complètement réguliers les propositions 13 et 14 de [6], ce qui nous permet d'une part de retrouver ces mêmes résultats comme corollaires et d'autre part d'obtenir une condition suffisante pour qu'un cône séquentiellement complètement régulier soit bien basé (proposition 4) et une autre pour qu'il soit normal (proposition 8).

2. Nous donnons ici un résultat similaire à la proposition 12 de Mokobodzki. La preuve que nous donnons ne fait pas intervenir des propriétés des applications relativement bornées comme c'est le cas dans [6].

Définition [6]. Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe séparé (e.l.c.s.) et $K \subset E$ un cône convexe. On dit que K est semi-complet pour la suite $(f_n)_n$ de formes linéaires continues sur E et positives sur K si pour toute suite $(x_m)_m$ d'éléments de K telle que $\sum_m f_n(x_m) < \infty$, pour tout n , il résulte qu'il existe $x \in K$ avec $x = \sum_m x_m$.

Proposition 1. Soit $E(\tau)$ un e.l.c.s. et $K \subset E$ un cône convexe semi-complet pour la suite $(f_n)_n$ de formes linéaires continues sur E et positives sur K . Pour toute semi-norme p continue sur E , il existe n tel que :

$$\forall x \in K, \quad p(x) \leq n^2 \sum_{1 \leq k \leq n} f_k(x) \quad (*)$$

de sorte que 0 ait un système fondamental dénombrable de voisinages dans K , pour la topologie τ .

Preuve. Soit p une semi-norme continue sur E . Posons :

$$B = \{x \in E ; p(x) \leq 1\} \quad \text{et} \quad B_n = \left\{ x \in E ; \sum_{1 \leq k \leq n} |f_k(x)| \leq \frac{1}{n^2} \right\}.$$

Pour montrer (*) il suffit de montrer que $(B_n \cap K) \subset (B \cap K)$. En effet, soit $x \in K$ et $\mu > 0$ tels que :

$$n^2 \sum_{1 \leq k \leq n} f_k(x) \leq \mu.$$

Alors $\sum_{1 \leq k \leq n} f_k\left(\frac{x}{\mu}\right) \leq \frac{1}{n^2}$; d'où $\frac{x}{\mu} \in (B_n \cap K)$ et donc par hypothèse $\frac{x}{\mu} \in (B \cap K)$;

ce qui implique que $p\left(\frac{x}{\mu}\right) \leq 1$ et donc $p(x) \leq \mu$. Ainsi $p(x) \leq n^2 \sum_{1 \leq k \leq n} f_k(x)$.

Montrons donc qu'il existe n tel que $(B_n \cap K) \subset (B \cap K)$. Pour cela supposons que $(B_n \cap K) \not\subset (B \cap K)$, quel que soit n . Alors :

$$\forall n, \exists x_n \in K : x_n \in B_n \text{ et } x_n \notin B.$$

On construit ainsi une suite d'éléments de K telle que

$$\forall n, p(x_n) > 1.$$

Vérifions que

$$\forall m, \sum_n f_m(x_n) < \infty.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$.

$$\forall n < m, \sup_{n < m} f_m(x_n) = \alpha_m < \infty,$$

$$\forall n \geq m, f_m(x_n) \leq \sum_{1 \leq k \leq n} f_k(x_n).$$

$$\text{Mais comme } x_n \in B_n, \sum_{1 \leq k \leq n} f_k(x_n) \leq \frac{1}{n^2}.$$

$$\text{Donc } \sum_{n < m} f_m(x_n) \leq m\alpha_m \text{ et } \sum_{n \geq m} f_m(x_n) \leq \sum_{n \geq m} \frac{1}{n^2}.$$

$$\text{Donc } \sum_n f_m(x_n) \leq m\alpha_m + 2 < \infty.$$

Ainsi $\sum_n f_m(x_n) < \infty$, pour tout m ; et comme K est semi-complet pour la suite $(f_n)_n$, la série $\sum_n x_n$ converge vers un élément de K . Donc son terme général x_n tend vers zéro. D'où contradiction avec $p(x_n) > 1$, pour tout n . $\square$

Comme corollaire de ce résultat nous retrouvons, sans utiliser les lemmes 1 et 2, comme c'est le cas dans [4], le résultat de G. Isac. Nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition [5]. Soit $E(\tau)$ un e.l.c.s. et $K \subset E$ un cône convexe. On dit que K est nucléaire s'il existe une base B de semi-normes définissant τ telle que :

$$\forall p \in B, \exists f_p \in E' : \forall x \in K, p(x) \leq f_p(x).$$

Corollaire [4, Proposition 5]. Soit $E(\tau)$ un e.l.c.s. et $K \subset E$ un cône convexe. Si K est semi-complet pour une suite $(f_n)_n$ de formes linéaires continues sur E et positives sur K alors K est nucléaire.

Nous étendons maintenant au cas des cônes complètement réguliers les propositions 13 et 14 de [6] obtenues pour les cônes semi-complets.

Nous aurons pour cela besoin des définitions suivantes.

Définition [6]. On dit que l'application f de K dans $\mathbb{R}$ est relativement bornée si pour tout $x \in K$, il existe $\alpha > 0$ tel que : si $x = u + v$ où $u, v \in K$ alors $f(u) < \alpha$.

Définition. On dit qu'un sous-ensemble B de K est une base du cône convexe K si :

$$\forall x \in K \setminus \{0\}, \exists! \lambda \in \mathbb{R}, \exists! b \in B : x = \lambda b.$$

On dit que K est bien basé dans l'e.l.c.s. E si K possède une base bornée B telle que $0 \notin \overline{B}$, où $\overline{B}$ désigne l'adhérence de B .

Définition. On dit qu'un cône convexe K d'un e.l.c.s. $E(\tau)$ est séquentiellement complètement régulier si toute suite $(x_m)_m$ d'éléments de K qui est monotone croissante et τ -bornée est τ -convergente vers un élément de K .

Proposition 2. Soit $E(\tau)$ un e.l.c.s. et K de E un cône convexe séquentiellement complètement régulier tel que 0 dans K possède un système fondamental dénombrable de voisinages (S.F.D.V.) et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une application relativement bornée. Alors :

$$\exists \mu > 0, \exists \epsilon > 0, \exists r \in \mathbb{N} : (\forall x \in K, p_m(x) \leq \epsilon, \forall m \leq r) \Rightarrow f(x) \leq \mu \quad (**)$$

où les p_m désignent les jauges du S.F.D.V. de 0 dans K .

Preuve. Posons $M(\epsilon, r) = \{x \in K ; p_m(x) \leq \epsilon, \forall m \leq r\}$. Alors $M(\epsilon, r) \neq \emptyset$, car $0 \in M(\epsilon, r)$. Supposons que $(**)$ n'est pas vérifiée. Alors

$$\forall r \in \mathbb{N}, \exists x_r \in K : p_m(x_r) \leq \frac{1}{2^r}, \forall m \leq r \text{ et } f(x_r) > r.$$

Considérons la suite $(y_r)_r$ définie par $y_r = \sum_{n \leq r} x_n$. Alors $(y_r)_r$ est une suite d'éléments de K qui est monotone croissante. Vérifions qu'elle est τ -bornée.

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha_m = \sup_{n \leq m} p_m(x_n)$. On a pour tout $r > m$:

$$\begin{aligned} p_m(y_r) &= p_m \left(\sum_{n \leq r} x_n \right) \\ &\leq \sum_{n \leq m} p_m(x_n) + \sum_{m < n \leq r} p_m(x_n) \\ &\leq \sum_{n \leq m} p_m(x_n) + \sum_{m < n \leq r} \frac{1}{2^n} \\ &\leq \sum_{n \leq m} p_m(x_n) + 2 \\ &\leq m\alpha_m + 2. \end{aligned}$$

Ainsi $(y_r)_r$ est une suite monotone croissante d'éléments de K qui est τ -bornée. Donc $(y_r)_r$ est convergente vers $x \in K$, car K est séquentiellement complètement régulier. Si on pose $z_r = x - x_r$ alors $z_r \in K$ (car $x \geq x_r$). Ainsi on a $x = x_r + z_r$ avec x_r et $z_r \in K$ et $f(x_r) > r$ ce qui contredit le fait que f est relativement bornée sur K . $\square$

Nous obtenons également le résultat suivant qui est une extension de la proposition 13 de [6].

Proposition 3. Soit $E(\tau)$ un e.l.c.s. et $K \subset E$ un cône convexe séquentiellement complètement régulier et tel que 0 dans K possède un système fondamental dénombrable de voisinages et p de E dans $\mathbb{R}^+$ une semi-norme relativement bornée. Alors il existe une constante $\rho_0 > 0$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall x \in K, p(x) \leq \rho_0 \sup_{m \leq r} p_m(x),$$

où les p_m désignent les jauges du S.F.D.V. de 0 dans K .

Preuve. D'après la proposition précédente,

$$\exists \mu < 0, \exists \epsilon > 0, \exists r \in \mathbb{N} : (\forall x \in K, p_m(x) \leq \epsilon, \forall m \leq r) \Rightarrow p(x) \leq \mu.$$

Posons $\Phi_r(x) = \sup_{m \leq r} p_m(x)$ et $\rho_0 = \frac{\mu}{\epsilon}$.

Si $\Phi_r(x) = 0$ alors pour tout $\lambda \geq 0$ on a $\Phi_r(\lambda x) = 0 < \epsilon$ et donc $p(\lambda x) \leq \mu$ d'où $p(x) = 0$ et donc $p(x) \leq \rho_0 \sup_{m \leq r} p_m(x)$.

Si $\Phi_r(x) = \alpha > 0$ alors $\Phi_r\left(\frac{\epsilon}{\alpha}x\right) = \epsilon$; d'où $p\left(\frac{\epsilon}{\alpha}x\right) \leq \mu$ et donc $p(x) \leq \frac{\mu}{\epsilon}\alpha = \rho_0 \sup_{m \leq r} p_m(x)$. Ce qui termine la preuve. $\square$

Comme conséquence du résultat précédent nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 4. Soit $E(\tau)$ un e.l.c.s. et $K \subset E$ un cône convexe séquentiellement complètement régulier et tel que 0 dans K possède un système fondamental dénombrable de voisinages. Si K est bien basé pour une topologie localement convexe τ' sur E telle que tout borné de $E(\tau')$ est borné dans $E(\tau)$ alors K est bien basé dans $E(\tau)$.

Preuve. Soit $(p_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ une famille de semi-normes définissant τ' tel que K est bien basé dans $E(\tau')$. Comme K est bien basé, il existe une forme linéaire f positive sur K et τ' -continue sur E telle que :

$$\forall \alpha \in \Omega, \exists k_\alpha > 0, \forall x \in K, p_\alpha(x) \leq k_\alpha f(x). \quad (1)$$

Ainsi $|f| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une semi-norme relativement bornée sur K . Donc d'après la proposition 3, il existe $\rho_0 > 0$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall x \in K, f(x) \leq \rho_0 \sup_{m \leq r} p_m(x).$$

Considérons l'ensemble $B = \{x \in K, f(x) = 1\}$. Alors B est convexe. Il est borné dans $E(\tau')$ d'après (1).

Donc B est borné dans $E(\tau)$. De plus B est une base de K . Vérifions que $0 \notin \overline{B}^\tau$ où $\overline{B}^\tau$ est l'adhérence de B dans $E(\tau)$. Supposons que $0 \in \overline{B}^\tau$, alors il existe une suite généralisée $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de B qui est τ -convergente vers 0. Mais on a :

$$\forall x \in K, f(x) \leq \rho_0 \sup_{m \leq r} p_m(x).$$

D'où :

$$\forall i \in I, f(x_i) \leq \rho_0 \sup_{m \leq r} p_m(x_i),$$

c'est-à-dire

$$\forall i \in I, 1 \leq \rho_0 \sup_{m \leq r} p_m(x_i).$$

Ce qui donne une contradiction avec le fait que $(x_i)_{i \in I}$ τ -converge vers 0 et donc $0 \notin \overline{B}^\tau$. Donc K est bien basé dans $E(\tau)$. $\square$

Comme corollaire des propositions 1 et 3 nous retrouvons les résultats suivants de [6].

Proposition 5 [6, proposition 13]. *Soit h une application relativement bornée de K dans $\mathbb{R}$, où K est un cône convexe semi-complet pour une suite $(f_n)_n$ de formes linéaires continues sur E et positives sur K . Alors il existe $M > 0$ et un entier r tels que*

$$\forall v \in K, (f_q(v) \leq \epsilon, \forall q \leq r) \Rightarrow h(v) \leq M.$$

Preuve. Il est facile de voir que si K est semi-simple pour une suite $(f_n)_n$ de formes linéaires continues sur E et positives sur K alors K est séquentiellement complètement régulier. Et d'après la proposition 1, 0 dans K possède un système fondamental dénombrable de voisinages et on conclut alors à partir de la proposition 2. $\square$

Proposition 6 [6, Proposition 14]. *Soit K un cône convexe semi-complet pour une suite $(f_n)_n$ de formes linéaires continues sur E et positives sur K et p une semi-norme relativement bornée sur K . Il existe $k > 0$ et un entier r tels que :*

$$\forall v \in K, p(v) \leq k \sup_{m \leq r} f_m(v).$$

Preuve. Puisque K est semi-complet pour la suite $(f_n)_n$, il est séquentiellement complètement régulier et 0, dans K , possède un système fondamental dénombrable de voisinages et on conclut à partir de la proposition 3. $\square$

Nous donnons maintenant une démonstration du résultat suivant énoncé dans [5], et que nous aurons à utiliser. Mais tout d'abord rappelons la définition suivante des cônes normaux.

Définition. Un cône convexe K dans un e.l.c.s. $E(\tau)$ est normal si et seulement si

$$\forall V \in V_\tau(0), \exists W \in V_\tau(0) : 0 \leq x \leq y \in W \Rightarrow x \in V$$

où $V_\tau(0)$ désigne l'ensemble des voisinages de 0 pour τ .

Proposition 7. *Soit $E(\tau)$ un e.l.c.s. et $K \subset E$ un cône convexe séquentiellement complètement régulier. Si K est localement borné alors K est normal.*

Preuve. Puisque K est localement borné alors il existe un voisinage V disqué de 0 tel que $V \cap K$ est borné. Soit p la jauge de V et $(W_n)_n$ un système fondamental de voisinages de 0 dans K tel que $W_{n+1} \subset W_n$. Supposons que K n'est pas normal. Alors :

$$\exists W \in V_\tau(0), \forall n, \exists x_n, y_n \in K : 0 \leq x_n \leq y_n \in \frac{1}{n^3} W_n \text{ et } x_n \notin W.$$

Mais $V \cap K$ étant borné, il existe $\alpha > 0$: $\frac{1}{\alpha}(V \cap K) \subset W$ et donc $\forall n, x_n \notin \frac{1}{\alpha}V$.

D'où : $\forall n \alpha \cdot p(x_n) > 1$.

Posons $x'_n = nx_n$ et $y'_n = ny_n$. Alors

$$0 \leq x'_n \leq y'_n \in \frac{1}{n^2} W_n \quad \text{et} \quad \alpha \cdot p(x'_n) > n \geq 1.$$

$$\text{D'où } 0 \leq \frac{x'_n}{\alpha \cdot p(x'_n)} \leq x'_n \text{ et donc } 0 \leq \frac{x'_n}{\alpha \cdot p(x'_n)} \leq y'_n.$$

Soit

$$z_n = \begin{cases} y'_{\frac{n+1}{2}} - \frac{x'_{\frac{n+1}{2}}}{\alpha \cdot p(x'_{\frac{n+1}{2}})}, & \text{si } n \text{ impair,} \\ \frac{x'_{\frac{n}{2}}}{\alpha \cdot p(x'_{\frac{n}{2}})}, & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

Alors pour tout n , $z_n \in K$.

Considérons maintenant la suite $(t_n)_n$ d'éléments de K définie par $t_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$. Alors

$$t_n = \begin{cases} y'_1 + y'_2 + \dots + y'_{\frac{n+1}{2}} - \frac{x'_{\frac{n+1}{2}}}{\alpha \cdot p(x'_{\frac{n+1}{2}})} & \text{si } n \text{ impair,} \\ y'_1 + y'_2 + \dots + y'_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

et $(t_n)_n$ est une suite monotone croissante d'éléments de K . De plus elle est bornée, car si p_n est la jauge de W_n on a :

– Pour $m > 2n$ avec m pair :

$$\begin{aligned} p_n(t_m) &= p_n \left(y'_1 + \dots + y'_n + y'_{n+1} + \dots + y'_{\frac{m}{2}} \right) \\ &\leq p_n(y'_1 + \dots + y'_n) + \sum_{k=n+1}^{m/2} p_n(y'_k) \\ &\leq p_n(y'_1 + \dots + y'_n) + \sum_{k=n+1}^{m/2} \frac{1}{k^2} \\ &\leq p_n(y'_1 + \dots + y'_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \alpha_n < \infty. \end{aligned}$$

– Pour $m > 2n$ avec m impair :

$$\begin{aligned} p_n(t_m) &= p_n \left(y'_1 + \dots + y'_{\frac{m+1}{2}} - \frac{x'_{\frac{m+1}{2}}}{\alpha \cdot p(x'_{\frac{m+1}{2}})} \right) \\ &\leq p_n(y'_1 + \dots + y'_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + p_n \left(\frac{x'_{\frac{m+1}{2}}}{\alpha \cdot p(x'_{\frac{m+1}{2}})} \right) \\ &\leq p_n(y'_1 + \dots + y'_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall m, \forall n, p_n(t_m) \leq \alpha_n + \frac{1}{\alpha} < +\infty$.

Donc $(t_n)_n$ est bornée.

De plus, on a, par construction : $\forall n$ pair $p(t_n - t_{n-1}) = p \left(\frac{x'_{\frac{n}{2}}}{\alpha \cdot p(x'_{\frac{n}{2}})} \right) = \frac{1}{\alpha}$.

Donc $(t_n)_n$ n'est pas de Cauchy, donc elle est non convergente. D'où contradiction avec le fait que K est séquentiellement complètement régulier. $\square$

Nous donnons enfin le résultat suivant :

Proposition 8. *Soit $E(\tau)$ un e.l.c.s. et $K \subset E$ un cône convexe séquentiellement complètement régulier et tel que 0 dans K possède un S.F.D.V. S'il existe un borné B de E tel que K soit normal dans (E_B, p_B) alors K est normal dans $E(\tau)$.*

Preuve. Si K est normal dans (E_B, p_B) alors on a :

$$\exists \alpha > 0 : \forall x \in K, \forall y \in K, \alpha p_B(x) \leq p_B(x + y).$$

Donc p_B est relativement bornée de K dans $\mathbb{R}^+$. D'où d'après la proposition 3, il existe une constante $\rho_0 > 0$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall x \in K, p_B(x) \leq \rho_0 \sup_{m \leq r} p_m(x).$$

Ce qui montre que le cône K est localement borné dans $E(\tau)$ et on conclut à partir de la proposition 7. $\square$

English extended abstract. Let $E(\tau)$ be a locally convex Hausdorff space and $K \subset E$ a convex cone.

K is fully sequentially regular if each increasing and topologically bounded sequence in K converges to an element of K .

K is semicomplete for a sequence $(f_n)_n$ of continuous linear forms on E and positive on K if for every sequence $(x_m)_m$ in K such that $\sum_m f_n(x_m) < \infty$ for every n , there is an $x \in K$ with $x = \sum_m x_m$.

K is normal if

$$\forall V \in V_\tau(0), \exists W \in V_\tau(0) : 0 \leq x \leq y \in W \Rightarrow x \in V,$$

where $V_\tau(0)$ is the set of neighborhoods of 0 for τ .

A map $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be relatively bounded if

$$\forall x \in K, \exists \alpha > 0 : (x = u + v, \text{ where } u, v \in K) \Rightarrow f(u) < \alpha.$$

We give a result similar to proposition 12 of [6]. For the proof we do not use the properties of relatively bounded applications.

Proposition 1. *Let $E(\tau)$ be a locally convex Hausdorff space and $K \subset E$ a convex cone semicomplete for a sequence $(f_n)_n$ of continuous linear forms on E and positive on K . For every continuous seminorm p on E , there exists n such that*

$$\forall x \in K : p(x) \leq n^2 \sum_{1 \leq k \leq n} f_k(x).$$

Hence 0 has a countable basis of neighborhoods in K , for the topology τ .

To prove this we suppose that $(B_n \cap K) \not\subset (B \cap K)$ for every n where

$$\{x \in E ; p(x) \leq 1\} \text{ and } B_n = \left\{ x \in E ; \sum |f_k(x)| \leq \frac{1}{n^2} \right\}.$$

This allows the construction of a sequence $(x_n)_n \subset K$ such that

$$\forall n, p(x_n) > 1 \text{ and } \forall m, \sum_n f_m(x_n) < \infty.$$

The semicompleteness implies that $(x_n)_n$ converges to $x \in K$. This gives a contradiction with $\forall n, p(x_n) > 1$. And hence $\exists n: (B_n \cap K) \subset (B \cap K)$. This implies

$$\forall x \in K; p(x) \leq n^2 \sum_{1 \leq k \leq n} f_k(x).$$

As a corollary we obtain proposition 5 of [4]. We extend for fully sequentially regular cones propositions 13 and 14 of [6] obtained for a semicomplete cone.

Proposition 2. *Let $E(\tau)$ be a locally convex Hausdorff space and $K \subset E$ a fully sequentially regular cone such that 0 possesses a countable basis of neighborhoods in K and $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ be a relatively bounded map. Then*

$$\exists \mu > 0, \exists \epsilon > 0, \exists r \in \mathbb{N} : (\forall x \in K, p_m(x) \leq \epsilon) \Rightarrow f(x) \leq \mu,$$

where p_m denotes the Minkowski functional of the countable basis of neighborhoods of 0 in K .

Proposition 3. *Let $E(\tau)$ be a locally convex Hausdorff space and $K \subset E$ a fully sequentially regular cone such that 0 possesses a countable basis of neighborhoods in K and $p : K \rightarrow \mathbb{R}$ be a relatively bounded seminorm. Then*

$$\exists \rho_0 > 0, \exists r \in \mathbb{N} : \forall x \in K, p(x) \leq \rho_0 \sup_{m \leq r} p_m(x).$$

We also obtain the following criterion for normality.

Proposition 4. *Let $E(\tau)$ be a locally convex Hausdorff space and $K \subset E$ a fully sequentially regular cone such that 0 possesses a countable basis of neighborhoods in K . If there exists a bounded subset B of E such that K is normal in (E_B, p_B) , then K is normal in $E(\tau)$.*

BIBLIOGRAPHIE

1. A. O. Bahya, *Un critère de nucléarité pour certains espaces de type (M)*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **11** (1989), 133–136.
2. ———, *Étude des cônes nucléaires*, Ann. Sci. Math. Québec **15** (1991), 123–133.
3. ———, *Quelques critères de nucléarité des cônes*, P.M.E.N.S.T. **7** (1990).
4. G. Isac, *Un critère de sommabilité absolue dans les espaces localement convexes ordonnés. Cônes nucléaires*, Matematica (Cluj) **25 (48)** (1983), no. 2, 159–169.
5. ———, *Sur l'existence de l'optimum de Pareto*, Riv. Mat. Univ. Parma **4** (1983), 303–325.
6. G. Mokobodzki, *Cônes normaux et espaces nucléaires. Cônes semi-complets.*, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 7e année (1967–1968), 1–14.
7. H. H. Schaefer, *Topological vector spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

A. O. BAHYA

DÉPARTEMENT DE MATHS-INFORMATIQUE

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

UNIVERSITÉ DE NOUAKCHOTT

B. P. 5026, NOUAKCHOTT

MAURITANIE