

**NOTE SUR UNE MÉTHODE SEMI-VARIATIONNELLE
POUR L'ÉQUATION DU PENDULE AVEC FRICTION ET
FORCING PÉRIODIQUE DE MOYENNE NON NULLE**

ABDERRAHMAN AÏT OUASSARAH, JEAN-MARC BELLEY ET GILLES FOURNIER

RÉSUMÉ. Le but principal de cet article est de formuler une méthode semi-variationnelle pour l'équation du pendule avec friction et forcing non nécessairement de moyenne nulle. Cela consiste premièrement en la donnée d'une fonctionnelle continûment différentiable à paramètres, définie sur un espace fonctionnel (de Hilbert) et dont les points critiques qui satisfont une condition évidente sont exactement les solutions de notre équation. Puis nous démontrerons l'existence de points critiques de cette fonctionnelle pour tous paramètres fixés. Dans un dernier temps, nous prouverons, pour le cas simple où la fonctionnelle est convexe, l'existence de points critiques satisfaisant la condition évidente (et donc l'existence de solutions de notre équation), en utilisant pour cela le théorème de la valeur intermédiaire.

ABSTRACT. The aim of this paper is to give in a simple case a semi-variational method for the pendulum equation with damping and forcing terms. In fact we give a functional with parameters, on a function space (a Hilbert space), whose critical points satisfy an obvious equality and are exactly the solutions of the pendulum equation. We then show the existence of critical points of that functional when the parameters are fixed. Finally, using the intermediate value theorem, in the simple case when the functional is convex, we show the existence of critical points satisfying the obvious equality (that is we show the existence of solutions of our equation.)

1. Introduction. Il est bien connu que l'équation du pendule sans friction et avec forcing de moyenne nulle est variationnelle (voir [1] et [3]). Mais bien que l'équation du pendule avec friction et forcing de moyenne non nécessairement nulle a été bien étudiée (voir [2]), on n'a pas encore montré qu'elle était résoluble par des méthodes variationnelles [sauf pour le cas sans friction et pour l'équation du pendule double (voir [6] et [7])]. Notre méthode est très similaire aux méthodes utilisées pour les problèmes de Dirichlet et utilise plusieurs de leurs techniques (voir [3]). Nous allons montrer que sous certaines hypothèses supplémentaires, les solutions de cette équation peuvent être vues comme des points critiques d'une fonctionnelle avec paramètres, définie sur un espace fonctionnel approprié.

Reçu le 2 décembre 1994 et, sous forme définitive, le 8 janvier 1996.

2. Le problème critique. Considérons le problème périodique suivant,

$$y'' + cy' + A \sin y = f(t) + r$$

avec

$$(2.1)$$

$$y(0) = y(T) \quad \text{et} \quad y'(0) = y'(T)$$

où r est un nombre réel et $f \in L^2$ et est de valeur moyenne nulle, i.e. $\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0$. Nous montrerons que les solutions de (2.1) sont des points critiques d'une fonctionnelle. Mais pour cela nous devons d'abord faire un changement de variable. Posons $y(t) = x(t) + s$ où s est un nombre réel et $x(0) = x(T) = 0$ [notons qu'ici $s = y(0)$]. Nous obtenons le problème périodique équivalent,

$$x'' + cx' + A \sin(x + s) = f(t) + r$$

avec

$$(2.2)$$

$$x(0) = x(T) = 0 \quad \text{et} \quad x'(0) = x'(T)$$

où r est un nombre réel et $f \in L^2$ et est de valeur moyenne nulle, i.e. $\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0$. Notons que si x est la solution de (2.2) alors

$$\frac{A}{T} \int_0^T \sin(x + s) dt = r. \quad (2.3)$$

Soit H_T^1 l'espace de Hilbert habituel des fonctions T -périodiques de L^2 avec dérivée faible dans L^2 . Notons $H_{T0}^1 = H_0^1$ son sous-espace fermé des fonctions T -périodiques x satisfaisant en plus que $x(0) = 0$. Rappelons que si $y \in H_T^1$ alors on peut supposer que y est continue, en fait, il existe une constante k telle que $y(t) = k + \int_0^t y'(t) dt$. Donc si $x \in H_{T0}^1$, alors $x(t) = \int_0^t x'(t) dt$.

Rappelons de plus que la norme de H_T^1 est donnée par $\|y\| = \langle y, y \rangle$ où

$$\langle y, z \rangle = \int_0^T [y(t)z(t) + y'(t)z'(t)] dt.$$

Nous avons les inégalités suivantes :

$$\|x\|_\infty \leq \|x'\|_1 \leq T^{1/2} \|x'\|_2 \leq T^{1/2} \|x\| \quad \text{et} \quad \|x\|_2^2 \leq T^2 \|x'\|_2^2$$

où $\|x\|_p$ est la norme usuelle de L_p . Il est maintenant aisé de voir que H_{T0}^1 est fermé, car la convergence dans H_{T0}^1 implique la convergence dans l'espace des fonctions continues avec la norme du supremum, qui à son tour implique la convergence ponctuelle.

Nous trouverons les solutions de (2.2) parmi les points critiques de la fonctionnelle suivante définie sur H_{T0}^1 ,

$$\varphi(x) = \varphi(x, s, r) = \int_0^T e^{ct} \left[\frac{(x')^2}{2} + A \cos(x + s) + x(f + r) \right] dt. \quad (2.4)$$

Notons ici que les points critiques de φ ne sont pas tous des solutions de (2.2). Pour cela il faut en plus qu'ils satisfassent (2.3).

3. Les points critiques de φ . La dérivée de Fréchet de φ est donnée par

$$\langle \nabla \varphi(x), v \rangle = \int_0^T e^{ct} [x'v' - Av \sin(x+s) + v(f+r)] dt.$$

Définition 3.1. Soient E un espace de Banach et $\mathbb{R}$ l'espace des réels. Une fonctionnelle $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait la condition de Palais-Smale, notée φ satisfait $P-S$, si pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\varphi(x_n)$ est bornée et $\nabla \varphi(x_n) \rightarrow 0$, il existe une sous-suite convergente.

Proposition 3.2. La fonctionnelle φ satisfait $P-S$.

Démonstration. Supposons que $\varphi(x_n)$ soit bornée par B et que $\nabla \varphi(x_n) \rightarrow 0$, alors

$$\begin{aligned} B \geq \varphi(x_n) &= \int_0^T e^{ct} \left[\frac{(x'_n)^2}{2} + A \cos(x_n + s) + x_n(f+r) \right] dt. \\ &\geq \int_0^T \frac{(x'_n)^2}{2} dt - \int_0^T e^{cT} (|A| + |x_n| |f+r|) dt \end{aligned}$$

Ainsi $B \geq \|x'_n\|_2^2/2 - e^{cT}|A|T - e^{cT}T\|f+r\|_2\|x'_n\|_2$. Donc $\|x'_n\|_2$ est borné, ce qui implique que $\|x_n\|_2$ est aussi borné. Ainsi, sans perte de généralité, on peut supposer que x_n converge faiblement vers un x dans H_T^1 (donc dans H_{T0}^1), il s'ensuit que $x_n \rightarrow x$ dans $C([0, T], \mathbb{R})$ avec la norme de la convergence uniforme (par Mawhin-Willem [4] proposition 1.2). On a que,

$$\langle \nabla \varphi(x_n) - \nabla \varphi(x), x_n - x \rangle = \langle \nabla \varphi(x_n), x_n - x \rangle - \langle \nabla \varphi(x), x_n - x \rangle \rightarrow 0 - 0,$$

car d'une part $\nabla \varphi(x_n) \rightarrow 0$ et $x_n - x$ est borné dans H_T^1 et d'autre part $x_n - x$ converge faiblement vers zéro dans H_T^1 . De plus on a que,

$$\begin{aligned} \langle \nabla \varphi(x_n) - \nabla \varphi(x), x_n - x \rangle &= \int_0^T e^{ct} \left[(x'_n - x')^2 - A(x_n - x) \right. \\ &\quad \left. (\sin(x_n + s) - \sin(x + s)) + (x_n - x)((f+r) - (f+r)) \right] dt. \end{aligned}$$

Mais le dernier terme de cette intégrale est égal à zéro et celui du milieu tend vers zéro, car c'est l'intégrale d'une fonction bornée multipliée par $x_n - x$ qui converge uniformément vers zéro. On en déduit que le premier terme de cette intégrale tend vers zéro. D'où,

$$0 \leq \|x_n - x\|_2^2 \leq T^2 \|x'_n - x'\|_2^2 \leq \int_0^T (x'_n - x')^2 dt \leq \int_0^T e^{ct} (x'_n - x')^2 dt \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire que $\|x_n - x\|_{H_T^1} \rightarrow 0$ et ainsi que $x_n \rightarrow x$ dans H_T^1 (donc dans H_{T0}^1). $\square$

Afin d'obtenir l'existence d'un point critique pour φ , nous devons utiliser le théorème suivant (4.4 page 82 de Mawhin-Willem [5]).

Théorème 3.3. *Soit X une espace de Banach, soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle bornée inférieurement et Fréchet différentiable sur X . Si φ satisfait $P - S$ sur X , alors φ possède un point critique sur X de valeur critique égale au minimum de φ sur X .*

Corollaire 3.4. *La fonctionnelle φ possède un point critique sur $H_{T_0}^1$ de valeur critique égale au minimum de φ sur $H_{T_0}^1$.*

Démonstration. Comme $H_{T_0}^1$ est un espace de Hilbert, il suffit de montrer que φ est bornée inférieurement sur $H_{T_0}^1$. En effet, comme nous l'avons déjà montré dans la preuve de la proposition 3.2,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\geq \frac{\|x'\|_2^2}{2} - e^{cT}|A|T - e^{cT}T\|f+r\|_2\|x'\|_2 \\ &\geq \frac{1}{2}[\|x'_n\|_2^2 - 2e^{cT}T\|f+r\|_2\|x'\|_2 + (e^{cT}T\|f+r\|_2)^2] \\ &\quad - e^{cT}|A|T - (e^{cT}T\|f+r\|_2)^2 \\ &\geq -e^{cT}|A|T - (e^{cT}T\|f+r\|_2)^2. \end{aligned}$$

D'où φ est bornée inférieurement. $\square$

4. Les cas d'unicité du point critique de $\varphi(x, s, r)$. Nous avons le résultat suivant (pour un résultat similaire voir [3]).

Proposition 4.1. *La fonctionnelle φ est strictement convexe et possède un unique point critique, le minimum de φ , pourvu que la condition suivante soit satisfaite :*

$$c^2 + |A|e^{cT} > |A| (1 + cTe^{cT}). \quad (4.1)$$

Démonstration. Soient $x, v \in H_{T_0}^1$ avec $v \neq 0$. Montrons que φ est strictement convexe sur la droite passant par x et v . Alors, comme x et v sont arbitraires, nous aurons la conclusion. Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(a) = \varphi(x + av)$. Il suffit de montrer que g est deux fois différentiable et que $g''(a) > 0$. Mais

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{g(a+b) - g(a)}{b} \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{b} \int_0^T e^{ct} \left[\frac{(x' + (a+b)v')^2 - (x' + av')^2}{2} + A(\cos(x + (a+b)v + s) \right. \\ &\quad \left. - \cos(x + av + s)) + (x + (a+b)v)(f+r) - (x + av)(f+r) \right] dt. \\ &= \int_0^T e^{ct} [(x' + av')v' - Av \sin(x + av + s) + v(f+r)] dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
g''(a) &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{g'(a+b) - g'(a)}{b} \\
&= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{b} \int_0^T e^{ct} \left[(x' + (a+b)v')v' - (x' + av')v' - Av(\sin(x + (a+b)v + s) \right. \\
&\quad \left. - \sin(x + av + s)) + v(f+r) - v(f+r) \right] dt. \\
&= \int_0^T e^{ct} \left[(v')^2 - Av^2 \cos(x + av + s) \right] dt \\
&\geq \|v'\|_2^2 - |A| \int_0^T t e^{ct} \left(\int_0^t v'^2 du \right) dt \\
&\geq \|v'\|_2^2 - |A| \|v'\|_2^2 \int_0^T t e^{ct} dt \geq \|v'\|_2^2 \left[1 - \frac{|A|}{c^2} ((cT-1)e^{cT} + 1) \right].
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient que $g''(a) > 0$ pourvu que $c^2 > |A|((cT-1)e^{cT} + 1)$, c'est-à-dire que $c^2 + |A|e^{cT} > |A|(1 + cTe^{cT})$, car $v \neq 0$ implique $v' \neq 0$ et $\|v'\|_2 \neq 0$. $\square$

Rappelons que nous n'avons pas encore obtenu de solution de l'équation du pendule, car (2.3) n'est pas nécessairement satisfaite par l'unique point critique x_{sr} de $\varphi(x, s, k)$. Afin d'obtenir un point critique satisfaisant (2.3), il est nécessaire de choisir s et r judicieusement. Pour cela nous devons utiliser le résultat bien connu suivant (qui résulte immédiatement de l'unicité du point critique).

Proposition 4.2. *La fonction $x(s, r) = x_{sr}$ est continue pourvu que (4.1) soit satisfaite.*

5. Solution de l'équation du pendule. Comme la fonction $x(s, r)$ est continue, nous pouvons maintenant faire varier s et r afin d'obtenir (2.3), sous la condition que (4.1) soit satisfaite. Considérons

$$g(s, r) = \frac{A}{T} \int_0^T \sin(x_{sr} + s) dt - r.$$

Comme $g(s, A+1) < 0$ et que $g(s, -A-1) > 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, par le théorème de la valeur intermédiaire, pour chaque s il existe r_s tel que $g(s, r_s) = 0$; notons $x_s = x_{sr_s}$.

Proposition 5.1. *La fonction $x_s = x(s, r_s)$ est une solution faible de (2.2) pourvu que (4.1) soit satisfaite.*

Démonstration. La fonction x_s est le minimum de $\varphi(x, s, r)$ sur H_{T0}^1 . Donc, pour tout $v \in H_{T0}^1$, on a que

$$0 = \langle \nabla \varphi(x_s, s, r_s), v \rangle = \int_0^T e^{ct} [x'_s v' - Av \sin(x_s + s) + v(f + r_s)] dt.$$

Remarquons que $h = (f + r_s) - A \sin(x_s + s)$ est de moyenne nulle, car f l'est et par notre choix de r_s , on a que $h - f$ l'est aussi. Il existe donc un unique $z \in H_T^1$ de

moyenne nulle, solution de $z' + cz = h$. Alors en intégrant par parties, on obtient que

$$\int_0^T e^{ct} h v dt = \int_0^T (e^{ct}(z' + cz)) v dt = - \int_0^T (e^{ct} z) v' dt,$$

car $(e^{ct} z)' = e^{ct}(z' + cz)$ et $v(0) = 0 = v(T)$. Il s'ensuit que pour tout $v \in H_{T0}^1$, on a que

$$0 = \int_0^T e^{ct} (x'_s - z) v' dt.$$

Ainsi on a cette égalité pour tout $v' \in L_2$. D'où $x'_s = z$ dans L_2 , car le choix $v' = x'_s - z$ donne :

$$0 = \int_0^T e^{ct} (x'_s - z) (x'_s - z) dt \geq \int_0^T (x'_s - z)^2 dt = \|x'_s - z\|_2.$$

Nous avons montré que $x'_s = z$ dans L_2 . Donc x'_s possède une dérivée faible et $x'' + cx'_s = z' + cs = h = -A \sin(x_s + s) + f + r_s$, et cela pour tout $s \in \mathbb{R}$. Ainsi x_s est une solution faible de $x''_s + cx'_s + A \sin(x_s + s) = f + r_s$ avec les conditions T -périodiques. $\square$

6. Solutions multiples de l'équation du pendule lorsque la constante r est fixée.

Nous avons montré que, sous la condition (4.1), pour chaque $s \in \mathbb{R}$ il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que (2.2) possède une solution x_s . Nous voulons maintenant considérer la question inverse : pour quels $r \in \mathbb{R}$ existe-t-il $s \in \mathbb{R}$ tel que (2.2) possède une solution.

Cet ensemble contient l'intervalle $[-A/2, A/2]$ si A est positif, pourvu que l'on fasse l'hypothèse supplémentaire que $e^{cT} T^2 (2|A| + \|f\|_1) < \pi/6$. En effet, comme

$$0 = \langle \nabla \varphi(x_{sr}), x_{sr} \rangle = \int_0^T e^{ct} [x_{sr}^2 - Ax_{sr} \sin(x_{sr} + s) + x_{sr}(f + r)] dt,$$

on obtient que

$$T^{-1} \|x_{sr}\|_\infty^2 \leq \|x'_{sr}\|_\infty^2 \leq \int_0^T e^{ct} |Ax_{sr} \sin(x_{sr} + s) + x_{sr}(f + r)| dt$$

et ainsi, si $2|r| \leq |A|$, que

$$T^{-1} \|x_{sr}\|_\infty^2 \leq e^{cT} \|x_{sr}\|_\infty T (2|A| + \|f\|_1).$$

D'où $\|x_{sr}\|_\infty \leq e^{cT} T (2|A| + \|f\|_1) < \pi/6$. Ce qui nous permet d'écrire que si $|r| \leq |A|$, alors

$$g\left(\frac{\pi}{2}, r\right) \geq \frac{A}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) dt - r > \frac{A}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) dt - \frac{A}{2} = 0$$

et

$$g\left(-\frac{\pi}{2}, r\right) \leq \frac{A}{T} \int_0^T \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \delta\right) dt - r < \frac{A}{T} \int_0^T \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) dt + \frac{A}{2} = 0.$$

D'où par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe $s \in (-\pi/2, \pi/2)$ tel que $g(s, r) = 0$. De même il existe $s' \in (\pi/2, 3\pi/2)$ tel que $g(s, r) = 0$. En fait on a prouvé que si

$$e^{cT}T^2(2|A| + \|f\|_1) < \pi/6 \quad \text{et} \quad 2|r| \leq |A|,$$

alors il existe deux valeurs de s ne différant pas d'un multiple de 2π telles que (2.2) possède une solution.

Remarquons finalement que la meilleure réponse nous est fournie par Fournier et Mawhin [2] (voir aussi [5] et [6]). Nous ne pouvons que redonner la même réponse ici, avec en plus la condition (4.1). En fait, si on suppose en plus que $|A|T^2 < 4\pi^2$ alors par le théorème 4 de ce papier (même si A est négatif), on obtient que x_s est l'unique solution de (2.2) ayant valeur moyenne égale à s . Par le corollaire 2 de ce même papier, on obtient que $g(s) = x_s$ est continue et périodique de période 2π .

Comme par (2.3) nous obtenons que $|r| \leq |A|$, si on suppose (4.1) et $|A|T^2 < 4\pi^2$, alors il s'ensuit que l'ensemble des r pour lesquels il existe une solution de (2.2) est un intervalle $[r_1, r_2]$. De plus si $r \in (r_1, r_2)$ alors il existe deux solutions : en fait, comme g est continue et périodique, (2.3) doit être satisfaite pour au moins deux valeurs différentes de s dont la différence est de moins de 2π .

Finalement, si $\omega^{-1}(\omega^2 + c^2)^{-1/2}|A| \leq d(f)$ où $\omega = 2\pi T^{-1}$ et

$$d(f) = \left[\left(\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 F dt \right)^2 + \left(\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 F dt \right)^2 \right]^{1/2}$$

où F est l'unique fonction de valeur moyenne nulle T -périodique qui est solution de $y'' + cy' = f$, alors $r_1 \leq \omega^{-1}(\omega^2 + c^2)^{-1/2}|A|^2 - |A|d(f) \leq 0 \leq |A|d(f) - \omega^{-1}(\omega^2 + c^2)^{-1/2}|A|^2 \leq r_2$.

Enfin remarquons que nous ne pouvons démontrer l'existence d'une solution de (2.2) par des méthodes variationnelles seulement sous la condition (4.1). Mais c'est la seule condition supplémentaire que nous devons imposer pour obtenir les mêmes résultats que par la méthode des points fixes.

English extended abstract. We shall show in this paper that under some conditions, the solutions of the pendulum equation with damping term and with periodic forcing term of mean value not necessarily zero can be seen as critical points of linear functionals on an appropriate function space. Our method, for periodic solutions only, is very similar to the methods used for Dirichlet problems and uses many of their techniques.

Consider the following periodic problem, which is equivalent to our problem,

$$x'' + cx' + A \sin(x + s) = f(t) + r,$$

with (1)

$$x(0) = x(T) = 0 \quad \text{and} \quad x'(0) = x'(T),$$

where r is a real number and $f \in L^2$ and is of mean value zero, that is $\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0$. Notice that if x is a solution of (1) then

$$\frac{A}{T} \int_0^T \sin(x + s) dt = r. \quad (2)$$

Let H_T^1 denote the usual Hilbert space of T -periodic functions in L^2 with weak derivative in L^2 . Denote by H_0^1 its closed subspace of T -periodic functions x satisfying also $x(0) = 0$. Recall also that the norm in H_T^1 is given by $\|y\| = \langle y, y \rangle$ where

$$\langle y, z \rangle = \int_0^T [y(t)z(t) + y'(t)z'(t)] dt.$$

We get the following inequalities: $\|x\|_\infty \leq \|x'\|_1 \leq T^{1/2}\|x'\|_2 \leq T^{1/2}\|x\|$ and $\|x\|_2^2 \leq T^2\|x'\|_2^2$ where $\|x\|_p$ denotes the usual L_p norm.

We shall find the solution of (1) as critical points of the following functionals on H_0^1 .

$$\varphi(x) = \varphi(x, s, r) = \int_0^T e^{ct} \left[\frac{(x')^2}{2} + A \cos(x + s) + x(f + r) \right] dt. \quad (3)$$

Note that here not all critical points of φ will be solutions of (1), they will also need to verify inequality (4) that follows. The Fréchet derivative of φ is

$$\langle \nabla \varphi(x), v \rangle = \int_0^T e^{ct} [x'v' - Av \sin(x + s) + v(f + r)] dt.$$

We have that φ satisfies the Palais-Smale condition, is bounded from below and so has a critical point. Moreover, φ is strictly convex and has a unique critical point x_{sr} , the minimum of φ , and the mapping $x(s, r) = x_{sr}$ is continuous, provided that

$$c^2 + |A|e^{cT} > |A|(1 + cTe^{cT}). \quad (4)$$

We can now consider the continuous function $x(s, r)$ and change s and r in order to obtain (2) provided (4) is satisfied. Let us consider the function

$$g(s, r) = \frac{A}{T} \int_0^T \sin(x_{sr} + s) dt - r,$$

since $g(s, A + 1) < 0$ and $g(s, -A - 1) > 0$ for all $s \in \mathbb{R}$, by the intermediate value theorem, for every s there exists r_s such that $g(s, r_s) = 0$; for any $s \in \mathbb{R}$ there exists $r \in \mathbb{R}$ such that the function $x_s = x(s, r_s)$ is a weak solution of (1) provided (4) is satisfied.

We now would like to answer the reverse question: for which $r \in \mathbb{R}$ does there exist $s \in \mathbb{R}$ such that (1) has solutions. An answer was provided by Fournier-Mawhin [2] and we can only duplicate a part of it here. If we assume (4), then we obtain that the set of all r for which there is a solution of (1) in an interval $[r_1, r_2]$. And if $r \in (r_1, r_2)$ then there are two solutions: in fact, since g is continuous and periodic, (2) must be satisfied for at least two different values of s the difference of which is less than 2π .

Finally, if $\omega^{-1}(\omega^2 + c^2)^{-1/2}|A| \leq d(f)$ where $\omega = 2\pi T^{-1}$ and

$$d(f) = \left[\left(\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 F dt \right)^2 + \left(\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 F dt \right)^2 \right]^{1/2}$$

and F is the unique zero mean value T -periodic solution of $y'' + cy' = f$, then

$$r_1 \leq \omega^{-1}(\omega^2 + c^2)^{-1/2}|A|^2 - |A|d(f) \leq 0 \leq |A|d(f) - \omega^{-1}(\omega^2 + c^2)^{-1/2}|A|^2 \leq r_2.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Castro, *Periodic solutions of the forced pendulum equation*, Differential Equations (S. Ahmad *et al.*, eds.), Academic Press, New York, 1980, pp. 149–160.
2. G. Fournier et J. Mawhin, *On periodic solutions of forced pendulum-like equations*, J. Differential Equations **60** (1985), 381–395.
3. J. Mawhin, *Problèmes de Dirichlet variationnels non linéaires*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1987.
4. J. Mawhin et M. Willem, *Multiple solutions of the periodic boundary value problem for some forced pendulum-type equations*, J. Differential Equations **52** (1984), 264–287.
5. ———, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
6. G. Tarantello, *Remarks on forced equations of the double pendulum type*, Trans. Amer. Math. Soc. **326** (1991), 441–452.
7. ———, *Multiple forced oscillations for the N-pendulum equation*, Comm. Math. Phys. **132** (1990), 499–517.

A. AÏT OUASSARAH
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES - SEMLALIA
UNIVERSITÉ CADI AYYAD
B.P. S15, MARRAKECH
MAROC

J.-M. BELLEY ET G. FOURNIER
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
SHERBROOKE (QUÉBEC)
J1K 2R1 CANADA