

**CONDITION SUFFISANTE DE RÉSOLUBILITÉ DU PROBLÈME
DE CAUCHY MATRICIEL C^∞ NON CARACTÉRISTIQUE
À CARACTÉRISTIQUES DE MULTIPLICITÉ VARIABLE**

FAUSTIN TOUADERA

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous généralisons aux systèmes un article écrit par T. Nishitani dans le cas scalaire et donnons une condition suffisante d'hyperbolicité faible lorsque chaque couple de racines caractéristiques pouvant avoir des valeurs égales admet un contact d'ordre infini sur l'hyperplan des données.

ABSTRACT. In this paper, we generalize to systems a paper of T. Nishitani in the scalar case and give a sufficient condition of weak hyperbolicity when each couple of characteristic roots which could have equal values admits a contact of infinite order on the hyperplane of data.

1. Notations — Hypothèses — Résultats.

a. Notations — Définitions.

$$D_x = (D_{x_1}, \dots, D_{x_n}); \quad D_{x_j} = -i\partial_{x_j} = -i\frac{\partial}{\partial x_j}; \quad D_t = -i\partial_t = -i\frac{\partial}{\partial t};$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$, nous considérons les espaces de Sobolev H_s de norme $\|u\|_s$.

Posons $H = \bigcap_s H_s$ et pour tout $u \in H$,

$$\|u(t)\|_k^2 = \sum_{|\alpha|=k} \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha u(x, t)|^2 dx;$$

$$\|u(t)\|_p^2 = \|u(t)\|_{m-1+p}^2 + \|D_t u(t)\|_{m-2+p}^2 + \dots + \|D_t^{m-1} u(t)\|_p^2.$$

Les classes d'opérateurs pseudo-différentiels utilisées dans ce travail sont les mêmes que celles dans [1, 7, 8, 10, 14].

Reçu le 17 février 1995 et, sous forme définitive, le 20 novembre 1995.

b. Hypothèses. Soit l'opérateur différentiel matriciel réel h de dimension $q \times q$ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ et d'ordre θ .

$$h = \sum_{j=0}^{\theta} h_{\theta-j}(x, t; D_x, D_t)$$

où $h_{\theta-j} = h_{\theta-j}(x, t; \zeta, \tau)$ est une matrice de dimension $q \times q$ formée de fonctions $(h_{\theta-j})_{\beta}^{\alpha}$ polynomiales homogènes de degré $\theta - j$ en ζ , à coefficients indéfiniment dérivables et bornés ainsi que toutes leurs dérivées et tel que la matrice caractéristique

$$H = h_{\theta}(x, t; \zeta, \tau)$$

vérifie les hypothèses suivantes :

[H1] Le déterminant caractéristique $\det H$ possède la décomposition suivante :

$$\det H(x, t; \zeta, \tau) = \prod_{i=1}^{m-s} (\tau - \lambda_i(x, t; \zeta)) \prod_{i=1}^s (\tau - \mu_i(x, t; \zeta)) \quad (1.1)$$

où $\{\lambda_i(x, t; \zeta)\}_{1 \leq i \leq m-s}$ et $\{\mu_i(x, t; \zeta)\}_{1 \leq i \leq s}$ ($2s \leq m$) sont à valeurs réelles distinctes deux à deux dans chaque ensemble mais $\lambda_i(x, t; \zeta)$ doit être égale à $\mu_i(x, t; \zeta)$ quand $t = 0$ et plus exactement

$$\lambda_i(x, t; \zeta) - \mu_i(x, t; \zeta) = \sigma_i(x, t; \zeta) \nu_i(x, t; \zeta), \quad 1 \leq i \leq s \quad (1.2)$$

où $\sigma_i(t)$ sont des fonctions de classe C^∞ positives et strictement croissantes pour $t > 0$, $\sigma_i(0) = 0$ et $\nu_i(x, t; \zeta) \neq 0 \forall (x, t; \zeta)$.

Nous supposons de plus que

$$\sigma_i(\sigma_i')^{-1} \in C^2([0, T]),$$

$$\lambda_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0^+, \infty[\times \mathbb{R}^n \setminus 0),$$

$$\mu_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0^+, \infty[\times \mathbb{R}^n \setminus 0).$$

[H2] Soit $A(x, t, \zeta, \tau)$ la matrice des cofacteurs de H dans le développement de $\det H$

$$HA = AH = \det H \cdot I_q$$

où I_q est la matrice identité de dimension $q \times q$.

Soit K le polynôme sous-caractéristique du système

$$K(x, t; \zeta, \tau) = K = \sum_{\alpha, \beta=1}^q \left\{ [H_{\beta}^{\Delta \alpha} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 H_{\beta}^{\alpha}}{\partial \zeta_j \partial x_j}] A_{\alpha}^1 A_1^{\beta} - \frac{1}{2} H_{\beta}^{\alpha} \{A_{\alpha}^1, A_1^{\beta}\} \right\}$$

où $\{ , \}$ est le crochet de Poisson et $H^{\Delta} = H_{\theta-1}(x, t; \zeta, \tau)$.

Posons :

$$Z(x, t; \zeta, \tau) = K(x, t; \zeta, \tau) - \frac{1}{2} \{ \tau - \lambda_i, \tau - \mu_i \} A_1^1(x, t; \zeta, \tau) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-s} (\tau - \lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\tau - \mu_j). \quad (1.3)$$

Introduisons la condition suivante :

$$\boxed{\text{A}} \quad Z(x, t; \zeta, \mu_i) = T_i(x, t; \zeta) \{ \tau - \lambda_i, \tau - \mu_i \} + S_i(x, t; \zeta) (\lambda_i - \mu_i) |_{\tau=\mu_i} \\ \text{où } T_i \text{ et } S_i \text{ sont des symboles d'opérateurs pseudo-différentiels.}$$

Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions de classe C^∞ positives et strictement croissantes pour $t > 0$. Nous écrivons $g < f$ s'il existe une constante C positive telle que

$$g'(t)[f'(t)]^{-1} \quad \text{et} \quad g(t)[g'(t)]^{-1} f'(t)[f(t)]^{-1} \quad (f' = \frac{df}{dt}) \quad (1.4)$$

soient deux fonctions de classe C^∞ sur $[0, C]$. Cette relation d'ordre nous permet d'introduire la condition suivante concernant $\{\sigma_i(t)\}_{1 \leq i \leq s}$:

$$\boxed{\text{B}} \quad \text{Pour tous } \sigma_i, \sigma_j \text{ tels que } \sigma'_i(0) = \sigma'_j(0) = 0, \text{ on a } \sigma_i < \sigma_j \text{ ou } \sigma_j < \sigma_i.$$

c. Résultats.

Théorème. *Si l'opérateur h vérifie les hypothèses H1, H2 et si les conditions A et B sont réalisées, le problème de Cauchy associé*

$$\begin{cases} (1) & hu = f, \\ (2) & D_t^j u(x, 0) = u_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = 0, 1, \dots, \theta - 1, \end{cases}$$

$$\text{avec } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_q \end{pmatrix} \text{ et } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_q \end{pmatrix},$$

possède une solution unique $u(x, t) \in [C^\infty(H)]^q$ pour toutes données initiales

$$(u_0(x), \dots, u_{\theta-1}(x)) \in [H]^q$$

et tout second membre $f(x, t) \in [C^\infty(H)]^q$ où $C^\infty(H) = C^\infty([0, +\infty[, H)$. De plus, cette solution vérifie l'inégalité d'énergie suivante :

$$\|u(x, t)\|_l \leq \mathbb{C}(l) \left\{ \|u(x, 0)\|_{N(l)} + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(x, s)\|_{N(l)} \right\}$$

où $N(l)$ est un entier dépendant de h et $l = 1, 2, \dots$

Remarque 1. La condition B ne dépend pas de (1.2).

Remarque 2. Dans le cas où tout σ_i tel que $\sigma'_i(0) = 0$ s'annule à l'ordre fini pour $t = 0$, la condition B est toujours satisfaite.

2. Démonstration de l'existence de la solution.

a. Première réduction du problème. Considérons le problème de Cauchy (1) et (2) associé à h :

$$\begin{cases} (1) & hu = f, \\ (2) & D_t^j u(x, 0) = u_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, j = 0, 1, \dots, \theta - 1, \end{cases}$$

$$\text{avec } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_q \end{pmatrix} \text{ et } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_q \end{pmatrix}.$$

Soit $a(x, t; D_x, D_t)$ un opérateur matriciel de dimension $q \times q$ d'ordre $m - \theta$ et de matrice caractéristique $A(x, t; \zeta, \tau)$. En s'inspirant de l'article [4], nous réduisons l'opérateur h à un opérateur P différentiel en t et pseudo-différentiel en x d'ordre $m \geq \theta$ en faisant un changement de fonctions inconnues $u = av$ et en posant $P = h \cdot a$.

Le problème (1) et (2) se transforme en

$$\begin{cases} Pv = f, \\ D_t^j (av)(x, 0) = u_j(x), \quad j = 0, 1, \dots, \theta - 1. \end{cases}$$

À cause de l'inversibilité de $A(x, t; 0, 1)$ (hypothèse H1), on peut résoudre les équations

$$D_t^j (av)(x, 0) = u_j(x), \quad j = 0, 1, \dots, \theta - 1$$

et calculer $v_j(x) = D_t^j v(x, 0)_{j=0,1,\dots,m-1}$ en fonctions de $u_j(x)_{j=0,\dots,\theta-1}$ (voir [4]) telles que pour toute solution $v \in [C^\infty(H)]^q$

$$\begin{cases} (1') & Pv = f \\ (2') & D_t^j v(x, 0) = v_j(x), \quad j = 0, 1, \dots, m - 1, \end{cases}$$

$u = av$ soit solution de (1) et (2).

Ainsi, nous sommes ramenés à la résolution du problème (1') et (2').

b. Deuxième réduction du problème. Nous supposons que $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_s$. Nous garderons désormais cette relation d'ordre.

Supposons de plus que

$$A_1^1(x, t; \zeta, \mu_i) \neq 0$$

et introduisons les notations suivantes

$$\prod_m = [D_t - \lambda_{m-s}(x, t; D_x)] \cdots [D_t - \lambda_1(x, t; D_x)] \cdot [D_t - \mu_s(x, t; D_x)] \cdots [D_t - \mu_1(x, t; D_x)] \quad (2.1)$$

où $\lambda_i(x, t; D_x)$ est l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $\lambda_i(x, t; \zeta)$ et $\mu_i(x, t; D_x)$, l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $\mu_i(x, t; \zeta)$.

Nous pouvons écrire $P(x, t; D_x, D_t)$ sous la forme

$$P(x, t; D_x, D_t) = \prod_m + \prod_{m-1} + C_{m-1}(x, t; D_x, D_t) + Q_{m-2}(x, t; D_x, D_t) \quad (2.2)$$

où

$$C_{m-1}(x, t; D_x, D_t) = C_{m-1}(x, t; D_x) + C_{m-2}(x, t; D_x)[D_t - \mu_1(x, t; D_x)] + \cdots \\ \cdots + C_{m-s}(x, t; D_x)[D_t - \mu_{s-1}(x, t; D_x)] \cdots [D_t - \mu_1(x, t; D_x)], \quad (2.3)$$

$$\prod_{m-1} = C_{m-s-1}(x, t; D_x) \cdot [D_t - \mu_s(x, t; D_x)] \cdots [D_t - \mu_1(x, t; D_x)] + \cdots \\ \cdots + C_0[D_t - \lambda_{m-s-1}(x, t; D_x)] \cdots [D_t - \lambda_1(x, t; D_x)] \\ \cdot [D_t - \mu_s(x, t; D_x)] \cdots [D_t - \mu_1(x, t; D_x)] \quad (2.4)$$

et $C_{m-i}(x, t; D_x)$ ($i = 1, \dots, m$) est un opérateur pseudo-différentiel matriciel de dimension $q \times q$ de symbole $C_{m-i}(x, t; \zeta)$ dont les composantes sont homogènes de degré $m - i$ en ζ et Q_{m-2} un opérateur matriciel de dimension $q \times q$ d'ordre $m - 2$.

Proposition 2.1. Soit $A = \begin{pmatrix} L_A^1 \\ \vdots \\ L_A^q \end{pmatrix}$ où L_A^i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A , $i = 1, \dots, q$.
Alors

$$L_A^1(x, t; \zeta, \mu_i) C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i) = \frac{Z(x, t; \zeta, \mu_i)}{A_1^1(x, t; \zeta, \mu_i)} \cdot L_A^1(x, t; \zeta, \mu_i)$$

où $C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \tau)$ est le symbole principal de $C_{m-1}(x, t; D_x, D_t)$.

Preuve. D'après l'article [4], nous savons qu'il existe un opérateur pseudo-différentiel matriciel M de dimension $q \times q$ dont le symbole est homogène de degré $m - 2$ en ζ tel que :

$$C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i) = \sigma(P_{m-1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 P_m}{\partial \zeta_j \partial x_j} \\ - \frac{1}{2} \{ \tau - \lambda_i(x, t; \zeta), \tau - \mu_i(x, t; \zeta) \} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-s} (\tau - \lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\tau - \mu_j) \cdot I_q \big|_{\tau=\mu_i} + (\lambda_i - \mu_i) M(x, t; \zeta).$$

Sachant que $\sigma(P_{m-1}) = H^\Delta A + H A^\Delta + \sum_{j=0}^n \frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \frac{\partial A}{\partial x_j}$, avec

$$H^\Delta = H_{\theta-1}(x, t; \zeta, \tau), \quad A^\Delta = A_{m-\theta-1}(x, t; \zeta, \tau),$$

$$\begin{aligned}
C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i) &= H^\Delta A + H A^\Delta + \sum_{j=0}^n \left[\frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_m}{\partial \zeta_j \partial x_j} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \{ \tau - \lambda_i, \tau - \mu_i \} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-s} (\tau - \lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\tau - \mu_j) \cdot I_q|_{\tau=\mu_i} + (\lambda_i - \mu_i) M.
\end{aligned}$$

Puisque nous avons $P_m = H \cdot A$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P_m}{\partial \zeta_j \partial x_j} &= \frac{\partial^2 (H \cdot A)}{\partial \zeta_j \partial x_j} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \left(\frac{\partial H}{\partial x_j} \cdot A + H \frac{\partial A}{\partial x_j} \right) \\
&= \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta_j \partial x_j} \cdot A + \frac{\partial H}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial A}{\partial \zeta_j} + \frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \cdot \frac{\partial A}{\partial x_j} + H \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta_j \partial x_j}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^n \frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \cdot \frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_m}{\partial \zeta_j \partial x_j} &= \sum_{j=0}^n \left\{ \frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \cdot \frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta_j \partial x_j} \cdot A \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{H}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial \zeta_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{1}{2} H \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta_j \partial x_j} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \left[\frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial \zeta_j} \right] - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \left[\frac{\partial^2 H}{\partial \zeta_j \partial x_j} A + H \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta_j \partial x_j} \right].
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_j) &= H A^\Delta + H^\Delta A + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \left[\frac{\partial^2 H}{\partial \zeta_j \partial x_j} A + H \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta_j \partial x_j} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \left[\frac{\partial^2 H}{\partial \zeta_j \partial x_j} \cdot A + H \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta_j \partial x_j} \right] - \frac{1}{2} \{ \tau - \lambda_j, \tau - \mu_j \} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-s} (\tau - \lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\tau - \mu_j) I_q|_{\tau=\mu_j} \\
&\quad + (\lambda_j - \mu_j) M(x, t; \zeta).
\end{aligned}$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par la première ligne de la matrice A prise au point $(x, t; \zeta, \mu_i)$ que nous notons $L_A^1(x, t; \zeta, \mu_i)$

$$\left(A = \begin{pmatrix} L_A^1 \\ \vdots \\ L_A^q \end{pmatrix} \right) \Rightarrow L_A^1(x, t; \zeta, \mu_i) = (A_1^1, \dots, A_j^1, \dots, A_q^1)(x, t; \zeta, \mu_i).$$

Nous obtenons une ligne de q symboles telle que

$$\begin{aligned}
L_A^1(x, t; \zeta, \mu_i) C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i) = & \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1} A_\alpha^1 H_\beta^{\Delta\alpha} A_\gamma^\alpha + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n A_\alpha^1 \left[\frac{\partial H_\beta^\alpha}{\partial \zeta_j} \cdot \frac{\partial A_\gamma^\beta}{\partial x_j} - \frac{\partial H_\beta^\alpha}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial A_\gamma^\beta}{\partial \zeta_j} \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \left[A_\alpha^1 \frac{\partial^2 H_\beta^\alpha}{\partial \zeta_j \partial x_j} \cdot A_\gamma^\beta + H_\beta^\alpha \cdot \frac{\partial^2 A_\gamma^\beta}{\partial \zeta_j \partial x_j} \right]_{\tau=\mu_i} \\
& - \frac{1}{2} (\tau - \lambda_i, \tau - \mu_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-s} (\tau - \mu_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\tau - \mu_j) |_{\tau=\mu_i} L_A^1(x, t; \zeta) \\
& + (\lambda_i - \mu_i) L_A^1(x, t; \zeta, \mu_i) \cdot M(x, t; \zeta).
\end{aligned}$$

Choisissons, par exemple, la première composante de ce vecteur ligne, c'est-à-dire lorsque $\gamma = 1$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha, \beta=1} \left\{ A^1 H_\beta^{\Delta\alpha} A_1^\beta + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n A_\alpha^1 \left[\frac{\partial H_\beta^\alpha}{\partial \zeta_j} \cdot \frac{\partial A_1^\beta}{\partial x_j} - \frac{\partial H_\beta^\alpha}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial A_1^\beta}{\partial \zeta_j} \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n A_\alpha^1 \left[\frac{\partial^2 H_\beta^\alpha}{\partial \zeta_j \partial x_j} \cdot A_1^\beta + H_\beta^\alpha \cdot \frac{\partial^2 A_1^\beta}{\partial \zeta_j \partial x_j} \right] \right\}_{\tau=\mu_i} \\
& - \frac{1}{2} \{ \tau - \lambda_i, \tau - \mu_i \} A_1^1(x, t; \zeta, \mu_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-s} (\tau - \lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\tau - \mu_i) |_{\tau=\mu_i} + (\lambda_i - \mu_i) N'(x, t; \zeta).
\end{aligned}$$

Puisque $AH = \prod_{i=1}^{m-s} (\tau - \lambda_i) \prod_{i=1}^s (\tau - \mu_i) \cdot I_q$,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_j} (A \cdot H) = \frac{\partial A}{\partial \zeta_j} \cdot H + A \cdot \frac{\partial H}{\partial \zeta_j} = \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \prod_{i=1}^{m-s} (\tau - \lambda_i) \cdot \prod_{i=1}^s (\tau - \mu_i) \cdot I_q,$$

il existe par conséquent des f_j^i tels que

$$\left[\frac{\partial}{\partial \zeta_j} (A \cdot H) \right]_{\tau=\mu_i} = (\mu_i - \lambda_i) f_j^i.$$

De même, il existe des g_j^i tels que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j} (A \cdot H) \right]_{\tau=\mu_i} = \left[\frac{\partial A}{\partial x_j} \cdot H + A \cdot \frac{\partial H}{\partial x_j} \right]_{\tau=\mu_i} = (\mu_i - \lambda_i) g_j^i.$$

D'où

$$A_\alpha^1 \frac{\partial}{\partial \zeta_j} H_\beta^\alpha |_{\tau=\mu_i} = -H_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta_j} A_\alpha^1 |_{\tau=\mu_i} + (\mu_i - \lambda_i) f_j^i,$$

$$A_\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x_j} H_\beta^\alpha |_{\tau=\mu_i} = -H_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} A_\alpha^1 |_{\tau=\mu_i} + (\mu_i - \lambda_i) g_j^i.$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha, \beta=1} \left\{ H_\beta^{\Delta\alpha} (A_1^\beta A_\alpha^1) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n H_\beta^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial \zeta_j} A_\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x_j} A_1^\beta - \frac{\partial}{\partial x_j} A_\alpha^1 \cdot \frac{\partial A_1^\beta}{\partial \zeta_j} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 H_\beta^\alpha}{\partial \zeta_j \partial x_j} \cdot A_\alpha^1 A_1^\beta + H_\beta^\alpha A_\alpha^1 \frac{\partial^2 A_1^\beta}{\partial \zeta_j \partial x_j} \right\}_{\tau=\mu_i} \\ & - \frac{1}{2} \{ \tau - \lambda_i, \tau - \mu_i \} A_1^1(x, t; \zeta, \tau) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-s} (\tau - \lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\tau - \mu_j) |_{\tau=\mu_i} + (\lambda_i - \mu_i) N(x, t; \zeta). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha, \beta=1}^q \left[\left[H_\beta^{\Delta\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 H_\beta^\alpha}{\partial \zeta_j \partial x_j} \right] A_\alpha^1 A_1^\beta - \frac{1}{2} H_\beta^\alpha \{ A_\alpha^1, A_1^\beta \} \right]_{\tau=\mu_i} \\ & - \frac{1}{2} \{ \tau - \lambda_i, \tau - \mu_i \} A_1^1(x, t; \zeta, \tau) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-s} (\tau - \lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\tau - \mu_j) |_{\tau=\mu_i} \\ & \quad + (\lambda_i - \mu_i) N(x, t; \zeta) \\ & = K(x, t; \zeta, \mu_i) - \frac{1}{2} \{ \tau - \lambda_i, \tau - \mu_i \} A_1^1(x, t; \zeta, \tau) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-s} (\tau - \lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\tau - \mu_j) |_{\tau=\mu_i} \\ & \quad + (\lambda_i - \mu_i) N. \end{aligned}$$

Par analogie, en choisissant la $\delta^{\text{ième}}$ composante du vecteur ligne

$$L_A^1(x, t; \zeta, \mu_i) C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i)$$

nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} (*) \quad & \sum_{\alpha, \beta=1}^q \left\{ \left[H_\beta^{\Delta\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 H_\beta^\alpha}{\partial \zeta_j \partial x_j} \right] A_\alpha^1 A_\delta^\beta - \frac{1}{2} H_\beta^\alpha \{ A_\alpha^1, A_\delta^\beta \} \right\}_{\tau=\mu_i} \\ & - \frac{1}{2} \{ \tau - \lambda_i, \tau - \mu_i \} A_\delta^1(x, t; \zeta, \tau) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-s} (\tau - \lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\tau - \mu_j) |_{\tau=\mu_i} + (\lambda_i - \mu_i) N(x, t; \zeta). \end{aligned}$$

En sachant (voir [4]) qu'il existe M'' tel que

$$\begin{aligned} & \left[A_\delta^\beta A_1^1 - A_\delta^1 A_1^\beta \right]_{\tau=\mu_i} = (\mu_i - \lambda_i) M'' \\ & \implies A_\delta^\beta(x, t; \zeta, \mu_i) - \frac{(\mu_i - \lambda_i) M'' + A_\delta^1 A_1^\beta}{A_1^1} |_{\tau=\mu_i}. \end{aligned}$$

En remplaçant $A_\gamma^\beta(x, t; \zeta, \mu_i)$ ainsi obtenu dans l'expression (*), nous pouvons ressortir le polynôme K et regrouper les autres termes issus du développement sous la forme $(\mu_i - \lambda_i)N(x, t, \zeta)$. L'expression (*) s'écrit :

$$\frac{K(x, t; \zeta, \mu_i) A_\delta^1(x, t; \zeta, \mu_i)}{A_1^1(x, t; \zeta, \mu_i)} - \frac{1}{2} \{ \tau - \lambda_i, \tau - \mu_i \} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-s} (\tau - \lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\tau - \mu_j) A_\delta^1|_{\tau=\mu_i}.$$

De ce fait, nous avons

$$L_A^1(x, t; \zeta, \mu_i) C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i) = \left\{ \frac{K(x, t; \zeta, \mu_i)}{A_1^1(x, t; \zeta, \mu_i)} - \frac{1}{2} \{ \tau - \lambda_i, \tau - \mu_i \} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-s} (\tau - \lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\tau - \mu_j) \right\}_{\tau=\mu_i} L_A^1(x, t; \zeta, \mu_i)$$

$$L_A^1(x, t; \zeta, \mu_i) C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i) = \frac{K(x, t; \zeta, \mu_i) - \frac{1}{2} \{ \tau - \lambda_i, \tau - \mu_i \} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-s} (\tau - \lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\tau - \mu_j) A_1^1}{A_1^1(x, t; \zeta, \mu_i)} \Big|_{\tau=\mu_i} L_A^1(x, t; \zeta, \mu_i).$$

Ainsi nous obtenons

$$L_A^1(x, t; \zeta, \mu_i) C_{m-1}(x, t; \zeta, \mu_i) = \frac{Z(x, t; \zeta, \mu_i)}{A_1^1(x, t; \zeta, \mu_i)} \cdot L_A^1(x, t; \zeta, \mu_i)$$

d'où la proposition. $\square$

Proposition 2.2. *Il existe $A^\Delta(x, t; \zeta, \mu_i)$ tel que $C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i)$ soit une matrice scalaire de la forme*

$$C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i) = \frac{Z(x, t; \zeta, \mu_i)}{A_1^1(x, t; \zeta, \mu_i)} \cdot I_q.$$

Preuve. En effet nous avons

$$\begin{aligned} C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i) &= H A^\Delta + H^\Delta A + \sum_{j=0}^n \left(\frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \cdot \frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta_j \partial x_j} \right) (H \cdot A) \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ \tau - \lambda_i, \tau - \mu_i \} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-s} (\tau - \lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\tau - \mu_j) \Big|_{\tau=\mu_i} \cdot I_q + (\lambda_i - \mu_i) \cdot M(x, t; \zeta) \\ &= \frac{Z(x, t; \zeta, \mu_i)}{A_1^1(x, t; \zeta, \mu_i)} \cdot I_q. \end{aligned}$$

Considérons cette égalité comme une équation matricielle par rapport à

$$A^\Delta(x, t; \zeta, \mu_i) = (A_k^{\Delta l})(x, t; \zeta, \mu_i) \quad (l, k = 1, \dots, q).$$

Fixons k ; nous obtenons alors un système de q équations à q inconnues. Ce système est de rang $q - 1$ et la condition de compatibilité est satisfaite grâce à la condition A. Donc il est résoluble par rapport aux inconnues :

$$[A^\Delta(x, t; \zeta, \mu_i)]_k^l \quad (l = 1, \dots, q). \quad \square$$

Proposition 2.3. *La condition A est équivalente à la condition*

A' *Il existe $A^\Delta(x, t; \zeta, \mu_i)$ tel que $C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i)$ s'écrive sous la forme :*

$$C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i) = T_i\{\tau - \lambda_i, \tau - \mu_i\} + S_i(\lambda_i - \mu_i) \mid_{\tau=\mu_i}.$$

Preuve. $A \implies A'$. En effet nous avons, d'après la condition A que

$$Z(x, t; \zeta, \mu_i) = T_i\{\tau - \lambda_i, \tau - \mu_i\} + S_i(\lambda_i - \mu_i) \mid_{\tau=\mu_i}.$$

D'après la proposition 2.2, il existe $A^\Delta(x, t; \zeta, \mu_i)$ tel que

$$C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i) = \frac{Z(x, t; \zeta, \mu_i)}{A_1^1(x, t; \zeta, \mu_i)} \cdot I_q.$$

Donc il existe $A^\Delta(x, t; \zeta, \mu_i)$ tel que

$$C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i) = T'_i\{\tau - \lambda_i, \tau - \mu_i\} + S'_i(\lambda_i - \mu_i) \mid_{\tau=\mu_i}$$

où $T'_i = (T_i/A_1^1(\mu_i)) \cdot I_q$ et $S'_i = (S_i/A_1^1(\mu_i)) \cdot I_q$.

$A' \implies A$. En effet, il existe $A^\Delta(x, t; \zeta, \mu_i)$ tel que

$$C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i) = T'_i\{\tau - \lambda_i, \tau - \mu_i\} + S'_i(\lambda_i - \mu_i) \mid_{\tau=\mu_i}.$$

D'après la proposition 2.1

$$L_A^1(x, t; \zeta, \mu_i) C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i) = \frac{Z(x, t; \zeta, \mu_i)}{A_1^1(x, t; \zeta, \mu_i)} \cdot L_A^1(x, t; \zeta, \mu_i).$$

Soit un vecteur colonne C_1^A tel que $L_A^1 C_1^A = 1$. Alors

$$\frac{Z(x, t; \zeta, \mu_i)}{A_1^1(x, t; \zeta, \mu_i)} = L_A^1 \cdot T'_i C_1^A \{\tau - \lambda_i, \tau - \mu_i\} + L_A^1 \cdot S'_i C_1^A (\lambda_i - \mu_i).$$

Ce qui entraîne

$$\begin{aligned} Z(x, t; \zeta, \mu_i) &= A_1^1 \cdot L_A^1 \cdot T'_i C_1^A \{\tau - \lambda_i, \tau - \mu_i\} + A_1^1 \cdot L_A^1 \cdot S'_i C_1^A (\lambda_i - \mu_i) \mid_{\tau=\mu_i} \\ &= T_i\{\tau - \lambda_i, \tau - \mu_i\} + S_i(\lambda_i - \mu_i) \mid_{\tau=\mu_i}. \end{aligned}$$

D'où la proposition. $\square$

c. Reformulation des conditions.

Proposition 3.1. *Supposons que les conditions A et B soient satisfaites. Alors il existe $A^\Delta(x, t; \zeta, \mu_i)$ tel que*

$$\sigma_i(t)[\sigma'_i(t)]^{-1}C_{m-j}(x, t; \zeta) = U_{ji}(x, t; \zeta)[\lambda_i(x, t; \zeta) - \mu_i(x, t; \zeta)] \quad (3.1)$$

pour $1 \leq j \leq i \leq s$ où U_{ji} est le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel matriciel de dimension $q \times q$.

Preuve. D'après la proposition 2.3, il existe $A^*(x, t; \zeta, \mu_i)$ tel que $C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \tau)$ symbole principal de $C_{m-1}(x, t; D_x, D_t)$ vérifie l'équation suivante :

$$C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i) = T_i(x, t; \zeta) \cdot (\tau - \lambda_i, \tau - \mu_i) + S_i(x, t; \zeta)(\lambda_i - \mu_i) |_{\tau=\mu_i} \quad (3.2)$$

où T_i et S_i sont des symboles d'opérateurs pseudo-différentiels matriciels de dimension $q \times q$. Montrons la proposition par récurrence sur j .

Supposons qu'elle soit vraie pour $1 \leq j \leq k-1$ et montrons qu'il en est de même pour $j = k$. Nous savons d'après (2.3) que

$$\begin{aligned} C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \tau) &= C_{m-1}(x, t; \zeta) + C_{m-2}(x, t; \zeta)[\tau - \mu_1(x, t; \zeta)] + \cdots \\ &\quad + C_{m-s}(x, t; \zeta)[\tau - \mu_{s-1}(x, t; \zeta)] \cdots [\tau - \mu_1(x, t; \zeta)]. \end{aligned}$$

Si nous remplaçons dans cette expression τ par μ_j nous obtenons l'identité suivante (puisque $j = k$) :

$$\begin{aligned} C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_k) &= C_{m-1}(x, t; \zeta) + C_{m-2}(x, t; \zeta)(\mu_k - \mu_1) + \cdots \\ &\quad + C_{m-k}(x, t; \zeta)(\mu_k - \mu_{k-1}) \cdots (\mu_k - \mu_1). \end{aligned}$$

Les autres s'annulent.

D'après l'hypothèse de récurrence nous savons que, pour $1 \leq j \leq k-1$, (3.1) est vraie. En multipliant les deux membres de cette égalité par $\sigma_i(\sigma'_i)^{-1}$ nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_k) &= \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C_{m-1}(x, t; \zeta) + \cdots \\ &\quad + \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C_{m-k}(x, t; \zeta)(\mu_k - \mu_{k-1}) \cdots (\mu_k - \mu_1). \end{aligned}$$

Ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_k) &= \left[\sum_{j=1}^{k-1} U_{ji}(\mu_j - \mu_{j-1}) \cdots (\mu_j - \mu_1) \right] (\lambda_i - \mu_i) \\ &\quad + \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C_{m-k}(x, t; \zeta)(\mu_k - \mu_{k-1}) \cdots (\mu_k - \mu_1) \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C_{m-k}(x, t; \zeta)(\mu_k - \mu_{k-1}) \cdots (\mu_k - \mu_1) &= \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_k) \\ &\quad - \left[\sum_{j=1}^{k-1} U_{ji}(x, t; \zeta)(\mu_j - \mu_{j-1}) \cdots (\mu_j - \mu_1) \right] (\lambda_i - \mu_i), \quad (3.3) \end{aligned}$$

pour $k \leq i \leq s$. Pour achever notre récurrence, il nous suffira de montrer que $\sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_i)$ peut être factorisé et que l'un des facteurs est justement $(\lambda_i - \mu_i)$.

Pour prouver cela, notons que, avec δ_k un certain symbole, nous pouvons écrire

$$T_k[\tau - \lambda_k, \tau - \mu_k] + S_k(\lambda_k - \mu_k) = \sigma'_k \nu_k T_k + \sigma_k \delta_k.$$

Ainsi d'après la proposition 2.3,

$$\begin{aligned} C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_k) &= T_k(\tau - \lambda_k, \tau - \mu_k) + S_k(\lambda_k - \mu_k) \\ &= \sigma'_k \nu_k T_k + \sigma_k \delta_k. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_k) &= \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}\sigma'_k \nu_k T_k + \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}\sigma_k \delta_k \\ &= \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}\sigma'_k \nu_k T_k \nu_i [\nu_i]^{-1} + \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}\sigma_k \delta_k \sigma'_k (\sigma'_k)^{-1} \nu_i [\nu_i]^{-1} \\ &= T_k[\sigma'_k (\sigma'_i)^{-1} \nu_k (\nu_i)^{-1}] \sigma_i \nu_i + [\sigma'_k (\sigma'_i)^{-1} \sigma_k (\sigma'_k)^{-1} \delta_k (\nu_i)^{-1}] \sigma_i \nu_i, \end{aligned}$$

puisque $\lambda_i - \mu_i = \sigma_i \nu_i$, d'après (1.2). Cela montre que $\sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C_{m-1}^0(x, t; \zeta, \mu_k)$ peut être factorisé et que l'un des facteurs est bien $(\lambda_i - \mu_i)$.

D'après la condition B et du fait que ν_i ne s'annule jamais, les coefficients de $\sigma_i \nu_i$ sont bien définis et réguliers. De (3.3), en divisant les deux membres de cette égalité par $(\mu_k - \mu_{k-1}) \cdots (\mu_k - \mu_1)$, nous avons :

$$\sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C_{m-k}(x, t; \zeta) = U_{k,i}(x, t; \zeta)(\lambda_i - \mu_i),$$

où $U_{k,i}$ matrice de dimension $q \times q$. D'où la proposition. $\square$

Corollaire 3.1. *Sous les conditions A et B, nous avons :*

$$C_{m-j}(x, t; D_x) = \sigma'_j(t) \tilde{C}_{m-j}(x, t; D_x),$$

où $\tilde{C}_{m-j}(x, t; D_x)$ est un opérateur pseudo-différentiel de dimension $q \times q$ d'ordre $m - j$ ($1 \leq j \leq s$).

Preuve. D'après la proposition 3.1 et (1.2), nous avons

$$\sigma_i(t)[\sigma'_i(t)]^{-1}C_{m-j}(x, t; \zeta) = U_{ji}(x, t; \zeta)(\lambda_i - \mu_i)$$

et donc

$$\begin{aligned} C_{m-j}(x, t; \zeta) &= \sigma'_i(t)[\sigma_i(t)]^{-1}U_{ji}(x, t; \zeta)(\lambda_i - \mu_i) \\ &= \sigma'_i(t)[\sigma_i(t)]^{-1}U_{ji}(x, t; \zeta)\sigma_i \nu_i = \sigma'_i(t)\nu_i U_{ji}(x, t; \zeta) \\ &= \sigma'_j(t)[\sigma'_j(t)]^{-1}\sigma'_i(t)\nu_i U_{ji}(x, t; \zeta) = \sigma'_j(t) \cdot \tilde{C}_{m-j}(x, t; \zeta) \end{aligned}$$

avec $\tilde{C}_{m-j}(x, t; \zeta) = \sigma'_i(t)[\sigma'_j(t)]^{-1}\nu_i U_{ji}(x, t; \zeta)$. $\square$

Corollaire 3.2. *Sous les conditions A et B, pour $1 \leq k \leq j \leq i \leq s$, nous pouvons écrire*

$$\sigma_k(t)[\sigma'_k(t)]^{-1}C_{m-j}(x, t; \zeta) = U_{k,ji}(x, t; \zeta)(\lambda_i - \mu_i)$$

où $U_{k,ji}$ est le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel matriciel $q \times q$.

Preuve. Grâce à la condition B, nous pouvons affirmer que $\sigma_k(\sigma'_k)^{-1}\sigma'_1(\sigma_i)^{-1}$ est C^∞ dans un certain intervalle ($i > k$). D'après la proposition 3.1,

$$\sigma_i(t)[\sigma'_i(t)]^{-1}C_{m-j}(x, t; \zeta) = U_{ji}(x, t; \zeta)(\lambda_i - \mu_i).$$

Multiplions les deux membres par $\sigma_k(\sigma'_k)^{-1}\sigma'_i(\sigma_i)^{-1}$:

$$\begin{aligned} \sigma_k(\sigma'_k)^{-1}\sigma'_i(\sigma_i)^{-1}\sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C_{m-j} &= \sigma_k(\sigma'_k)^{-1}\sigma'_i(\sigma_i)^{-1}U_{ji}(\lambda_i - \mu_i), \\ \sigma_k(t)[\sigma'_k(t)]^{-1}C_{m-j} &= U_{k,ji}(x, t; \zeta)(\lambda_i - \mu_i), \end{aligned}$$

où $U_{k,ji}(x, t; \zeta) = \sigma_k(\sigma'_k)^{-1}\sigma'_i(\sigma_i)^{-1}U_{ji}(x, t; \zeta)$ est bien défini. $\square$

d. Décomposition de la solution. Considérons le problème de Cauchy et l'inégalité d'énergie associée pour les opérateurs suivants :

$$L_m^{(j)} = \prod_m + \prod_{m-1} + C_{m-1}\delta_{s-1} \cdots \delta_1 + \cdots + C_{m-j}\delta_{j-1} \cdots \delta_1, \quad 1 \leq j \leq s+1, \quad (4.1)$$

$$(P)_k \begin{cases} (L_m^{(j)} + Q_{m-2})u = f, & f \in [C^\infty(H)]^q, \\ D_t^j u(x, 0) = u_j(x), & u_i \in H^q, i = 0, \dots, m-1, \end{cases}$$

$$(E)_k \quad |||u(t)|||_l \leq C(k, l) \left[|||u(0)|||_{N(k, l)} + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s)\|_{N(k, l)} \right],$$

où $\delta_i = [D_t - \mu_i(x, t; D_x)]_{1 \leq i \leq s}$, $\delta_0 = I_q$, $L_m^{(s+1)} = \prod_m + \prod_{m-1}$ et $N(k, l)$ entier dépendant de p, k, l . Si le problème de Cauchy $(P)_k$ est bien posé et que l'inégalité $(E)_k$ est vraie, nous obtenons une décomposition de la solution de $(P)_{k-1}$ qui conduit à l'inégalité $(E)_{k-1}$ en utilisant le lemme suivant :

Lemme 4.1. *Supposons que le problème de Cauchy $(P)_k$ soit bien posé et que l'inégalité $(E)_k$ soit vraie. Sous les conditions A et B nous avons ce qui suit :*

Pour tout entier n , la solution $u(t) \in [C^\infty(H)]^q$ de $(P)_{k-1}$ se décompose de la manière suivante :

$$u = v_n + w_n \quad (4.2)$$

où v_n et w_n vérifient

$$|||v_n|||_l \leq B_1(k, n, l)[t\sigma'_{k-1}(t)]^n \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\|_{\phi(k, n, l)}, \quad (4.3)$$

$$|||w_n|||_l \leq B_2(k, n, l) \left[|||u(0)|||_{\phi(k, n, l)} + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s)\|_{\phi(k, n, l)} \right]. \quad (4.4)$$

De plus, si nous posons $(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})v_n = g_n$, alors g_n vérifie

$$\|g_n\|_l \leq B_3(k, n, l) [t\sigma'_{k-1}(t)]^n \left[\|u(0)\|_{\phi(k, n, l)} + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s)\|_{\phi(k, n, l)} \right], \quad (4.5)$$

où $\phi(k, n, l)$ est un entier qui dépend de P, k, l, n .

Preuve. Soit $(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})u = f$, $u \in [C^\infty(H)]^q$. Remarquons que

$$(*) \quad L_m^{(k-1)} + Q_{m-2} = L_m^{(k)} + Q_{m-2} + C_{m-k+1}\Delta_{k-2} \cdots \Delta_1.$$

En effet de (4.1), nous avons

$$\begin{aligned} L_m^{(j)} &= \prod_m + \prod_{m-1} + C_{m-s}\Delta_{s-1} \cdots \Delta_1 + \cdots + C_{m-j}\Delta_{j-1} \cdots \Delta_1 \quad (1 \leq j \leq s+1), \\ L_m^{(k-1)} &= \prod_m + \prod_{m-1} + C_{m-s}\Delta_{s-1} \cdots \Delta_1 + \cdots + C_{m-k}\Delta_{k-1} \cdots \Delta_1 + C_{m-k+1}\Delta_{k-2} \cdots \Delta_1, \\ L_m^{(k)} &= \prod_m + \prod_{m-1} + C_{m-s}\Delta_{s-1} \cdots \Delta_1 + \cdots + C_{m-k}\Delta_{k-1} \cdots \Delta_1. \end{aligned}$$

D'où, $L_m^{(k-1)} = L_m^{(k)} + C_{m-k+1}\Delta_{k-2} \cdots \Delta_1$.

Réolvons successivement le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} (L_m^{(k)} + Q_{m-2})u_{n+1} = f - C_{m-k+1}\Delta_{k-2} \cdots \Delta_1 u_n \\ D_t^j u_{n+1}(x, 0) = D_t^j u(x, 0) \quad 0 \leq j \leq m-1 \end{cases} \quad (4.6)$$

avec $u_0(x, t) = 0$.

Par hypothèse $(P)_k$ est bien posé et ce problème a une solution unique $u_n \in [C^\infty(H)]^q$ ($n = 1, 2, \dots$). Nous allons montrer que $v_n = u - u_n$ et $w_n = u_n$ vérifient les inégalités (4.3) et (4.4).

En effet, par définition de u_n , $u - u_n$ vérifient l'équation

$$(L_m^{(k)} + Q_{m-2})(u - u_n) = -C_{m-k+1}\Delta_{k-2} \cdots \Delta_1(u - u_{n-1}),$$

avec les données initiales nulles, car nous savons que $(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})u = f$ par hypothèse et d'après (*). Ainsi $(L_m^{(k)} + Q_{m-2})u + C_{m-k+1}\Delta_{k-2} \cdots \Delta_1 u = f$, et on obtient

$$\begin{aligned} (L_m^{(k)} + Q_{m-2})u &= f - C_{m-k+1}\Delta_{k-2} \cdots \Delta_1 u, \\ (L_m^{(k)} + Q_{m-2})u_n &= f - C_{m-k+1}\Delta_{k-2} \cdots \Delta_1 u_{n-1}, \\ (L_m^{(k)} + Q_{m-2})(u - u_n) &= -C_{m-k+1}\Delta_{k-2} \cdots \Delta_1(u - u_{n-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité $(E)_k$ nous permet d'avoir

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_l &\leq C(k, l) \left[\|u(x, 0) - u_n(x, 0)\|_{N(k, l)} \right. \\ &\quad \left. + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|C_{m-k+1}\Delta_{k-2} \cdots \Delta_1(u - u_{n-1})\|_{N(k, l)} \right], \end{aligned}$$

d'après les données initiales de (4.6), $u(x, 0) = u_n(x, 0)$,

$$|||u - u_n|||_l \leq C(k, l)t \sup_{0 \leq s \leq t} \|C_{m-k+1} \Delta_{k-2} \cdots \Delta_1(u - u_{n-1})\|_{N(k, l)}.$$

D'autre part, le corollaire 3.1 nous montre que

$$C_{m-j}(x, t; D_x) = \sigma'_j(t) \tilde{C}_{m-j}(x, t; D_x).$$

Ce qui entraîne que

$$\|C_{m-k+1} \Delta_{k-2} \cdots \Delta_1(u - u_{n-1})\|_{N(k, l)} \leq \sigma'_{k-1}(t) C'(k, l) |||u - u_{n-1}|||_{N(k, l)+m-1}$$

et

$$|||u - u_n|||_l \leq C(k, l) C'(k, l) t \sigma'_{k-1}(t) |||u - u_{n-1}|||_{N(k, l)+m-1}.$$

En réitérant n fois le même raisonnement et en tenant compte du fait que $u_0(x, t) = 0$ et $v_n = u - u_n$, nous obtenons

$$|||v_n|||_l \leq \begin{cases} B_1(k, l, n) [t \sigma'_{k-1}(t)]^n \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\|_{\phi(k, l, n)} & (\text{si } t > T/2) \\ B_1(k, l, n) t^{n-m+1} [\sigma'_{k-1}(t)]^n \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\|_{\phi(k, n, l)} & (\text{si } 0 \leq t \leq T/2). \end{cases}$$

Pour prouver (4.4), considérons les données initiales, c'est-à-dire,

$$D_t^j u_{n+1}(x, 0) = D_t^j u(x, 0), \quad u_0(x, t) = 0, \quad D_t^j u_n(x, 0) = D_t^j u(x, 0).$$

Or, $(L_m^{(k)} + Q_{m-2})u_n = f - C_{m-k+1} \Delta_{k-2} \cdots \Delta_1 u_{n-1}$ d'après $(P)_k$,

$$\begin{aligned} |||u_n|||_l &\leq C(k, l) \left[|||u_n(x, 0)|||_{N(k, l)} + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|f - C_{m-k+1} \Delta_{k-2} \cdots \Delta_1 u_{n-1}\|_{N(k, l)} \right] \\ &\leq C(k, l) \left\{ |||u_n(x, 0)|||_{N(k, l)} + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s)\|_{N(k, l)} + C_1(k, l) |||u_{n-1}|||_{N(k, l)+m-1} \right\}, \end{aligned}$$

$$|||u_n|||_l \leq C'(k, l) \left\{ |||u_n(x, 0)|||_{N(k, l)} + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s)\|_{N(k, l)} + |||u_{n-1}|||_{N(k, l)+m-1} \right\}.$$

En réitérant n fois le raisonnement et en sachant que $u_0 = 0$, $u_n(x, 0) = u(x, 0)$, nous obtenons

$$|||u_n|||_l \leq B_2(k, l, n) \left\{ |||u_n(x, 0)|||_{\phi(k, n, l)} + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s)\|_{\phi(k, n, l)} \right\}.$$

D'où, puisque $w_n = u_n$,

$$|||w_n|||_l \leq B_2(k, l, n) \left\{ |||u_n(x, 0)|||_{\phi(k, n, l)} + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s)\|_{\phi(k, n, l)} \right\}.$$

$$g_n = C_{m-k+1} \Delta_{k-2} \cdots \Delta_1 (u_{n-1} - u_n) \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.7)$$
$$\begin{aligned}(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})v_n = g_n &\Rightarrow (L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})(u - u_n) = g_n \\ &\Rightarrow (L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})u - (L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})u_n = g_n,\end{aligned}$$
$$f - [(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})u_n + C_{m-k+1}\Delta_{k-2} \cdots \Delta_1 u_n] = g_n.$$
$$f - [f - C_{m-k+1}\Delta_{k-2} \cdots \Delta_1 u_{n-1} + C_{m-k+1}\Delta_{k-2} \cdots \Delta_1 u_n] = g_n,$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} \mu_1(x)I_q & I_q & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & I_q & & & & & \\ & & & \mu_s(x)I_q & & & & & \\ \hdashline & & & & & \lambda_i(x)I_q & I_q & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & I_q \\ d_{m-1}(x) & \cdot & \cdot & \cdot & d_{m-1}(x) & & & & \lambda_r(x)I_q \end{array} \right] = L(x),$$

une matrice de dimension $(s+r) \times (s+r)$ [$m-s \geq s$] où les composantes sont des matrices de dimension $q \times q$ de fonctions C^∞ dans un certain domaine Ω ; $L(x)$ est donc une matrice de dimension $q \cdot (s+r) \times q \cdot (s+r)$ dont les éléments sont des fonctions.

Supposons que $\lambda_j(x) - \lambda_i(x)$, $\mu_j(x) - \mu_i(x)$ et $\lambda_j(x) - \mu_i(x)$ ne s'annulent jamais sur Ω si $i \neq j$ et introduisons les matrices

$$l_i(x) = d_{m-1}(x) + d_{m-2}(x)(\lambda_i(x) - \mu_1(x)) + \cdots \\ \cdots + d_{m-i}(x)(\lambda_i(x) - \mu_{i-1}(x)) \cdots (\lambda_i(x) - \mu_1(x)), \quad 1 \leq i \leq s. \quad (5.1)$$

Lemme 5.1. *Supposons que les matrices $l_i(x)$ soient divisibles par $\lambda_i(x) - \mu_i(x)$ dans C^∞ . Alors il existe une matrice $N(x)$, avec $\det N = 1$, qui diagonalise $L(x)$.*

Preuve. On généralise pour cela les démonstrations de [3, Lemme 5.1] et [15]. Pour une telle matrice,

$$L(x) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ M & A_2 \end{bmatrix},$$

on peut construire une matrice N qui diagonalise L :

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ B & N_2 \end{bmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{bmatrix} N_1^{-1} & 0 \\ R & N_2^{-1} \end{bmatrix},$$

avec N_1 et N_2 diagonalisant A_1 et A_2 respectivement et $\det N_1 = \det N_2 = 1$ si et seulement si $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq s \\ 1 \leq i \leq r}}$ est telle que les b_{ij} , matrices de dimension $q \times q$, vérifient

$$(\lambda_i - \mu_i)b_{i,1} = \frac{d_{m-1}(x)}{(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_r)} \quad i = 1, 2, \dots, m-s=r, \\ (\lambda_i - \mu_j)b_{ij} = \frac{d_{m-j}(x)}{(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_r)} + b_{i,j-1} \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 2, 3, \dots, s. \quad (5.2)$$

ou, en d'autres termes,

$$d_{m-1}(x) = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_r)(\lambda_i - \mu_1)b_{i,1} \quad i = 1, \dots, r, \\ d_{m-j}(x) = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_r)[(\lambda_i - \mu_j)b_{ij} - b_{i,j-1}] \quad j = 2, 3, \dots, s. \quad (5.3)$$

En faisant $i = j$ dans l'expression de d_{m-j} ($j = 1, \dots, s$), on constate que cela est réalisable si et seulement si $l_i(x) = d_{m-1}(x) + d_{m-2}(x)(\lambda_i - \mu_1) + \cdots + d_{m-i}(x)(\lambda_i - \mu_{i-1}) \cdots (\lambda_i - \mu_1)$ est divisible par $(\lambda_i - \mu_i)$ dans C^∞ pour tout $i = 1, \dots, s$. $\square$

Lemme 5.2 [16]. *Soit $\sigma(t)$ une fonction C^∞ positive et strictement croissante pour $t > 0$. Si $\sigma(t)(\sigma'(t))^{-1} \in C^2([0, T])$ dans un certain intervalle $[0, T]$, alors $t\sigma'(t)$ est croissante pour $t > 0$ et il existe une constante C telle que*

$$t[\sigma'(t)]^2 \leq C\sigma(t)\sigma'(t) + t\sigma(t)\sigma''(t)$$

soit réalisée dans un certain intervalle $[0, T]$.

Montrons l'inégalité $(E)_{k-1}$.

Lemme 5.3. *Sous les hypothèses du lemme 4.1, la solution $u \in [C^\infty(H)]^q$ de $(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})u = f$ vérifie l'inégalité suivante :*

$$\|u(t)\|_l \leq C(k-1, l) \left\{ \|u(0)\|_{N(k-1, l)} + t \sup \|f(s)\|_{N(k-1, l)} \right\}, \quad (5.4)$$

où $N(k-1, l)$ est un entier dépendant de $p, k-1$ et l .

Preuve. D'après le lemme 4.1, nous décomposons u en une somme $u = v_n + w_n$, où v_n vérifie

$$(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})v_n = g_n. \quad (5.5)$$

En effet,

$$\begin{aligned} (L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})(v_n + w_n) &= f, \\ (L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})v_n + (L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})w_n &= f, \\ (L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})v_n &= f - (L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})w_n, \end{aligned}$$

en posant $g_n = f - (L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})w_n$;

Puisque w_n est déterminé par (4.6), il suffit de déterminer v_n . D'après (4.4), il suffit d'avoir une estimation analogue à (4.4) pour v_n pour obtenir $(E)_{k-1}$.

Pour simplifier, oublions l'indice n et écrivons

$$(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})v = g \quad \text{où } v = v_n \text{ et } g = g_n. \quad (5.6)$$

D'après [12] et [3], nous pouvons écrire Q_{m-2} comme combinaison linéaire des opérateurs

$$\begin{aligned} [I_q, (D_t - \mu_1(x, t; D_x)), \dots, (D_t - \lambda_{m-s-2}(x, t; D_x)) \cdots (D_t - \lambda_1(x, t; D_x)) \\ \cdot (D_t - \mu_s(x, t; D_x)) \cdots (D_t - \mu_1(x, t; D_x))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{m-2}(x, t; D_x) &= a_0(x, t; D_x)[D_t - \lambda_{m-s-2}(x, t; D_x)] \cdots [D_t - \lambda_1(x, t; D_x)] \\ &\cdot [D_t - \mu_s(x, t; D_x)] \cdots [D_t - \mu_1(x, t; D_x)] + \cdots + a_{m-2}(x, t; D_x), \end{aligned} \quad (5.7)$$

où les $a_j(x, t; D_x)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels matriciels de dimension $q \times q$ et d'ordre j ($0 \leq j \leq m-2$).

Comme dans [3, 12], posons $\rho(t) = \sigma_{k-1}(t)[\sigma'_{k-1}(t)]^{-1}$ et soit $V = {}^t(V_0, \dots, V_{m-1})$ le vecteur donné par

$$\begin{aligned} {}^tV &= (\Lambda^{m-2}v, \Lambda^{m-3}[D_t - \mu_1(x, t; D_x)]v, \dots \\ &\dots, \Lambda^{m-s-1}[D_t - \mu_{s-1}(x, t; D_x)] \cdots [D_t - \mu_1(x, t; D_x)]v, \\ &\rho(t)\Lambda^{m-s-1}[D_t - \mu_s(x, t; D_x)] \cdots [D_t - \mu_1(x, t; D_x)]v, \dots \\ &\dots, \rho(t)[D_t - \lambda_{m-s-1}(x, t; D_x)] \cdots [D_t - \lambda_1(x, t; D_x)] \\ &\cdot [D_t - \mu_s(x, t; D_x)] \cdots [D_t - \mu_1(x, t; D_x)]v), \end{aligned} \quad (5.8)$$

où Λ est l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $(1 + |\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}$ et $v = {}^t(v_1, \dots, v_q)$. Alors l'équation (5.6) peut être exprimée sous la forme matricielle suivante :

$$D_t V = L_1 V + BV + \rho^{-1}(t)C_1 V + \rho'(t)\rho^{-1}(t)C_2 V + \rho(t)G, \quad (5.9)$$

où

$$L_1 = \begin{bmatrix} \mu_1 I_q & I_q & & & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & I_q & & \vdots \\ & & & & \mu_s I_q & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ & & & & & \lambda_i I_q & I_q \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \rho(t)C_{m-k+1} & \dots & \rho(t)C_{m-s} & \vdots \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix},$$

B est un opérateur continu sur $(L^2(\mathbb{R}^n))^{m \times q}$ et les C_i ($i = 1, 2$) sont des matrices constantes.

D'après le corollaire 3.2, $\rho(t)C_{m-j} = U_{jik}(x, t; D_x)(\lambda_i - \mu_i)$, pour tout $k \leq j \leq i$. Donc les fonctions $l_i(x)$ sont bien divisibles par $(\lambda_i - \mu_i)$ pour tout i et d'après le lemme 5.1, L_1 est diagonalisable,

$$\rho(t) = \sigma_{k-1}(t)[\sigma'_{k-1}(t)]^{-1}, \quad \left| \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \right| \leq C \frac{1}{\rho(t)}$$

car $\rho' \in C^1([0, T])$. Or, d'après le lemme 5.2,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(t)} &= \frac{\sigma'_{k-1}(t)}{\sigma_{k-1}(t)} = \frac{t(\sigma'_{k-1}(t))^2}{t(\sigma_{k-1}(t)\sigma'_{k-1}(t))} \leq \frac{C\sigma_{k-1}(t) \{ \sigma'_{k-1}(t) + t\sigma''_{k-1}(t) \}}{t\sigma_{k-1}(t)\sigma'_{k-1}(t)} \\ &\leq C \frac{\sigma'_{k-1}(t) + t\sigma''_{k-1}(t)}{t\sigma'_{k-1}(t)} = C \frac{(t\sigma'_{k-1}(t))'}{t\sigma'_{k-1}(t)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\left| \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \right| \leq C \frac{1}{\rho(t)} = C \frac{\sigma'_{k-1}(t)}{\sigma_{k-1}(t)} \leq \tilde{C} \frac{(t\sigma'_{k-1}(t))'}{(t\sigma'_{k-1}(t))}. \quad (5.10)$$

Puisque L_1^1 est diagonalisable, il est bien connu (voir [3, 12]) que la solution $v(x, t)$ de (5.9) vérifie l'inégalité d'énergie suivante :

$$\|v(t)\|_l \leq M(k, l) \left\{ \int_0^t \frac{(s\sigma'_{k-1}(s))'}{s\sigma'_{k-1}(s)} \|v(s)\|_l ds + \int_0^t \|g(s)\|_l ds \right\}. \quad (5.11)$$

Posons $w(t) = \int_0^t \frac{(s\sigma'_{k-1}(s))'}{(s\sigma'_{k-1}(s))} \|v(s)\|_l ds$ et prenons l'entier $n = n(k, l)$ tel que $n(k, l) \geq M(k, l)$. Alors de (5.11), nous avons successivement,

$$\begin{aligned} \partial_t [(t\sigma'_{k-1}(t))^{-n} w(t)] &= [t\sigma'_{k-1}(t)]^{-n} \partial_t w(t) - n(t\sigma'_{k-1}(t))^{-n-1} (t\sigma'_{k-1}(t))' w(t) \\ &= (t\sigma'_{k-1}(t))^{-n-1} (t\sigma'_{k-1}(t))' \|v(t)\|_l - n(t\sigma'_{k-1}(t))^{-n-1} (t\sigma'_{k-1}(t))' w(t) \\ &= (t\sigma'_{k-1}(t))^{-n-1} (t\sigma'_{k-1}(t))' (\|v(t)\|_l - nw(t)) \\ &\leq (t\sigma'_{k-1}(t))^{-n-1} (t\sigma'_{k-1}(t))' (\|v(t)\|_l - M(k, l)w(t)) \\ &\leq (t\sigma'_{k-1}(t))^{-n-1} (t\sigma'_{k-1}(t))' \left\{ M(k, l) \int_0^t \frac{(s\sigma'_{k-1}(s))'}{s\sigma'_{k-1}(s)} \|v(s)\|_l ds \right. \\ &\quad \left. + M(k, l) \int_0^t \|g(s)\|_l ds - M(k, l) \int_0^t \frac{(s\sigma'_{k-1}(s))'}{s\sigma'_{k-1}(s)} \|v(s)\|_l ds \right\} \\ &\leq M(k, l) (t\sigma'_{k-1}(t))^{-n(k, l)} \int_0^t \|g(s)\|_l ds \quad (\text{car } t\sigma'_{k-1}(t) \text{ est monotone croissante}). \end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité de 0 à t , nous obtenons

$$\begin{aligned} (t\sigma'_{k-1}(t))^{-n} w(t) &\leq M(k, l) \int_0^t (s\sigma'_{k-1}(s))^{-n} \int_0^s \|g(\tau)\|_l d\tau ds \\ &\leq M(k, l) \int_0^t s (s\sigma'_{k-1}(s))^{-n} \sup_{0 \leq \tau \leq s} \|g(\tau)\|_l ds. \end{aligned}$$

ou encore

$$w(t) \leq M(k, l) (t\sigma'_{k-1}(t))^n \int_0^t s (s\sigma'_{k-1}(s))^{-n} \sup_{0 \leq \tau \leq s} \|g(\tau)\|_l ds.$$

D'après le lemme 4.1 nous avons l'inégalité suivante pour $g = g_{n(k, l)}$:

$$\|g(\tau)\|_l \leq B_3(k, n, l) (\tau\sigma'_{k-1}(\tau))^{n(k, l)} \left\{ \|u(0)\|_{\phi(k, n, l)} + \tau \sup_{0 \leq \theta \leq \tau} \|f(\theta)\|_{\phi(k, n, l)} \right\}$$

Puisque $t\sigma'_{k-1}(t)$ est monotone croissante, $\tau \leq s \Rightarrow \tau\sigma'_{k-1}(\tau) \leq s\sigma'_{k-1}(s)$, et donc

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \tau \leq s} \|g(\tau)\|_l &\leq B_3(k, n, l) (s\sigma'_{k-1}(s))^{n(k, l)} \left\{ \|u(0)\|_{\phi(k, n, l)} + \right. \\ &\quad \left. s \sup_{0 \leq \tau \leq s} \|f(\tau)\|_{\phi(k, n, l)} \right\} \quad (5.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(t) &\leq M(k, l)(t\sigma'_{k-1}(t))^{m(k, l)} \\
&\quad \times \int_0^t B_3(k, l, n) \left\{ \|u(0)\|_{\phi(k, n, l)} + s \sup_{0 \leq \tau \leq s} \|f(\tau)\|_{\phi(k, n, l)} \right\} ds \\
&\leq M(k, l)t(t\sigma'_{k-1}(t))^{n(k, l)} B_3(k, n, l) \left\{ \|u(0)\|_{\phi(k, n, l)} + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s)\|_{\phi(k, n, l)} \right\}
\end{aligned}$$

et

$$\|v(t)\|_l \leq M'(k, l) B_3(k, n, l) t(t\sigma'_{k-1}(t))^{n(k, l)} \left\{ \|u(0)\|_{\phi(k, n, l)} + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s)\|_{\phi(k, n, l)} \right\}. \quad (5.14)$$

En sachant que

$$\rho(t) \|v(t)\|_{l-1} \leq C \|V\|_{l'} \frac{1}{\rho(t)} \leq \frac{(t\sigma'_{k-1}(t))}{t\sigma'_{k-1}(t)} \Rightarrow v(t)_l \leq \frac{C}{\rho(t)} \|V\|_{l+1},$$

on en tire

$$\begin{aligned}
\|v(t)\|_l &\leq N(k, l) B_3(k, n(k, l+1)) t(t\sigma'_{k-1}(t))^{n(k, l+1)-1} \\
&\quad \times \left\{ \|u(0)\|_{\phi(k, n(k, l+1), l+1)} + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(s)\|_{\phi(k, n(k, l+1), l+1)} \right\}. \quad (5.15)
\end{aligned}$$

De (4.4) et (5.15) et du fait que $u = v_n + w_n$ nous avons le lemme 5.3. $\square$

f. Fin de la démonstration de l'existence de la solution. Nous définissons la ε -translation $P_\varepsilon(x, t; D_x, D_t)$ de P par

$$P_\varepsilon(x, t; D_x, D_t) = P(x, t + \varepsilon; D_x, D_t) \quad (0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0) \quad (6.1)$$

et pour P_ε nous avons les mêmes considérations que celles des paragraphes précédents en prenant ε comme un paramètre. Puisque $L_{m, \varepsilon}^{(k-1)}$ est strictement hyperbolique pour $\varepsilon > 0$, la résolubilité de $(P)_{k-1, \varepsilon}$ est assurée.

Si nous supposons que l'inégalité d'énergie $(E)_{k, \varepsilon}$ est vérifiée uniformément pour ε , alors on peut conclure que le problème de Cauchy pour $L_m^{(k-1)} = L_{m, 0}^{(k-1)}$ est bien posé et que $(E)_{k-1, \varepsilon}$ est vérifiée uniformément par rapport à ε d'après le lemme 5.3. Par conséquent, le théorème est prouvé par induction sur k .

3. Démonstration de l'unicité de la solution. L'unicité de la solution du problème (1) et (2) est garantie par l'existence d'une solution pour l'opérateur adjoint de h . L'opérateur adjoint de $h = (h_{ij})$ $i, j = 1, \dots, q$ est égal à la matrice transposée des opérateurs adjoints des $h_{ij}(x, t; D_x, D_t)$. De ce fait, la matrice caractéristique de l'opérateur h^* sera

$$H^* = H^*(x, t; \zeta, \tau) = {}^t[H(x, t; \zeta, \tau)].$$

D'où

$${}^tAH^* = {}^tA^tH = {}^t(H \cdot A) = {}^t(A \cdot H) = {}^tH \cdot {}^tA = H^{*t}A = \det H \cdot I_q.$$

Soit un opérateur $b(x, t; D_x, D_t)$ de matrice caractéristique

$$B(x, t; \zeta, \tau) = {}^tA(x, t; \zeta, \tau).$$

On pose $P^*(x, t; D_x, D_t) = h^* \cdot b$.

Par conséquent pour résoudre le problème de Cauchy associé à h^* , on procédera comme pour l'opérateur h en remarquant que h^* vérifie les hypothèses H1 et H2 et les conditions A et B lorsque h les vérifie.

English extended abstract.

a. Notation — Definitions.

$$D_x = (D_{x_1}, \dots, D_{x_n}); D_{x_j} = -i\partial_{x_j} = -i\frac{\partial}{\partial x_j}; D_t = -i\partial_t = -i\frac{\partial}{\partial t};$$

for every $s \in \mathbb{R}$, we consider the Sobolev spaces H_s with norm $\|u\|_s$.

Let $H = \bigcap_s H_s$ and for every $u \in H$,

$$\|u(t)\|_k^2 = \sum_{|\alpha|=k} \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha u(x, t)|^2 dx;$$

$$\| \|u(t)\| \|_p^2 = \|u(t)\|_{m-1+p}^2 + \|D_t u(t)\|_{m-2+p}^2 + \dots + \|D_t^{m-1} u(t)\|_p^2.$$

The classes of pseudo-differential operators used above are the same as those in [1, 7, 8, 10, 14].

b. Hypotheses. Let h be the real differential matrix operator of dimension $q \times q$ of classe $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ and of order θ ,

$$h = \sum_{j=0}^{\theta} h_{\theta-j}(x, t; D_x, D_t),$$

where $h_{\theta-j} = h_{\theta-j}(x, t; \zeta, \tau)$ is the matrix of dimension $q \times q$ formed by homogenous polynomial functions $(h_{\theta-j})_\beta^\alpha$ of degree $\theta - j$ in ζ , the coefficients of which are indefinitely derivable and bounded as well as all their derivatives. Suppose that the characteristic matrix

$$H = h_\theta(x, t; \zeta, \tau)$$

satisfies the following hypotheses:

[H1] The characteristic determinant $\det H$ has the following decomposition:

$$\det H(x, t; \zeta, \tau) = \prod_{i=1}^{m-s} (\tau - \lambda_i(x, t; \zeta)) \prod_{i=1}^s (\tau - \mu_i(x, t; \zeta)) \quad (1.1)$$

where $(\lambda_i(x, t; \zeta))_{1 \leq i \leq m-s}$ and $(\mu_i(x, t; \zeta))_{1 \leq i \leq s}$ ($2s \leq m$) have real distinct values two by two in each set but $\lambda_i(x, t; \zeta)$ must be equal to $\mu_i(x, t; \zeta)$ when $t = 0$ and more exactly,

$$\lambda_i(x, t; \zeta) - \mu_i(x, t; \zeta) = \sigma_i(x, t; \zeta) \nu_i(x, t; \zeta), \quad 1 \leq i \leq s \quad (1.2)$$

where $\sigma_i(t)$ are the positive and strictly increasing functions of class C^∞ for $t > 0$, $\sigma_i(0) = 0$ and $\nu_i(x, t; \zeta) \neq 0 \forall (x, t; \zeta)$. In addition we suppose that

$$\sigma_i(\sigma'_i)^{-1} \in C^2([0, T]),$$

$$\lambda_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0^+, \infty \times \mathbb{R}^n \setminus 0),$$

$$\mu_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0^+, \infty \times \mathbb{R}^n \setminus 0).$$

[H2] Let $A(x, t; \zeta, \tau)$ the matrix of cofactors of H in the development of $\det H$

$$HA = AH = \det H \cdot I_q$$

where I_q is the identity matrix of dimension $q \times q$.

Let K be the sub-characteristic polynomial of the system

$$K(x, t; \zeta, \tau) = K = \sum_{\alpha, \beta=1}^q \left\{ [H_\beta^{\Delta\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 H_\beta^\alpha}{\partial \zeta_j \partial x_j}] A_\alpha^1 A_1^\beta - \frac{1}{2} H_\beta^\alpha \{A_\alpha^1, A_1^\beta\} \right\}$$

where $\{ , \}$ is the Poisson bracket.

Let us define

$$Z(x, t; \zeta, \tau) = K(x, t; \zeta, \tau) - \frac{1}{2} \{ \tau - \lambda_i, \tau - \mu_i \} A_1^1(x, t; \zeta, \tau) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-s} (\tau - \lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s (\tau - \mu_j). \quad (1.3)$$

and introduce the following condition:

[A] $Z(x, t; \zeta, \mu_i) = T_i(x, t; \zeta) \{ \tau - \lambda_i, \tau - \mu_i \} + S_i(x, t; \zeta) (\lambda_i - \mu_i)|_{\tau=\mu_i}$
where T_i and S_i are pseudo-differential operator symbols.

Given two functions $f(t)$ and $g(t)$ of class C^∞ positive and strictly increasing for $t > 0$, we write $g < f$ if there exists a positive constant C such that

$$g'(t)[f'(t)]^{-1} \quad \text{and} \quad g(t)[g'(t)]^{-1} f'(t)[f(t)]^{-1}, \quad (f' = \frac{df}{dt}) \quad (1.4)$$

are two functions of class C^∞ over $[0, C]$. This order relation permits us to introduce the following condition concerning $\sigma_i(t)_{1 \leq i \leq s}$:

[B] For every σ_i, σ_j such that $\sigma'_i(0) = \sigma'_j(0) = 0$ we have that $\sigma_i < \sigma_j$ or $\sigma_j < \sigma_i$ is satisfied.

c. Results.

Theorem. *If the operator h satisfies the hypotheses H1 and H2, and if the conditions A and B are realized, the associated Cauchy problem*

$$\begin{cases} (1) & hu = f, \\ (2) & D_t^j u(x, 0) = u_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = 0, 1, \dots, \theta - 1, \end{cases}$$

$$\text{with } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_q \end{pmatrix} \text{ and } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_q \end{pmatrix},$$

has a unique solution $u(x, t) \in [C^\infty(H)]^q$ for all initial data

$$(u_0(x), \dots, u_{\theta-1}(x)) \in [(H)]^q$$

and second member $f(x, t) \in [C^\infty(H)]^q$ where $C^\infty(H) = C^\infty([0, +\infty[, H)$. This solution satisfies the following inequality of energy:

$$\|u(x, t)\|_l \leq \mathbb{C}(l) \left\{ \|u(x, 0)\|_{N(l)} + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|f(x, s)\|_{N(l)} \right\}$$

where $N(l)$ is an integer depending on h and $l = 1, 2, \dots$

Remark 1. The condition B does not depend on (1.2).

Remark 2. In the case where all σ_i such that $\sigma'_i(0) = 0$ cancel each other to finite order for $t = 0$ the condition B is always satisfied.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Chazarain et A. Piriou, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1981.
2. D. Gourdin, *Systèmes faiblement hyperboliques à caractéristiques multiples*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **278** (1974), 269–272.
3. ———, *Thèse d'Etat* (1978).
4. ———, *Problème de Cauchy non caractéristique pour les systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable. Domaine de dépendance*, Comm. Partial Differential Equations **4** (1979), 447–507.
5. V. Ja. Ivriï, *Sufficient conditions of regular and completely regular hyperbolicity*, Trudy Moskov. Mat. Obšč. **33** (1975), 3–65.
6. H. Kadri, *Résultats d'unicité de la solution du problème de Cauchy non caractéristique C^∞ pour une classe d'opérateurs différentiels matriciels à caractéristiques multiples*, Thèse de 3e cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille I, 1985.
7. J. J. Kohn et L. Nirenberg, *An algebra of pseudo-differential operators*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 269–305.
8. H. Kumano-Go, *Remarks on pseudo-differential operators*, J. Math. Soc. Japan **21** (1969), 413–439.
9. S. MacLane et G. Birkoff, *Algèbre*, Gauthier-Villars, Paris, 1971.
10. M. Mechab, *Problème de Cauchy C^∞ à caractéristiques de multiplicité variable*, Thèse de 3e cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille I, 1983.

11. A. Menikoff, *The Cauchy problem of weakly hyperbolic equations*, Amer. J. Math. **97** (1975), 548–558.
12. S. Mizohata et Y. Ohya, *Sur la condition de E. E. Levi concernant des équations hyperboliques*, Publ. Res. Inst. Mat. Sci. Ser. A **4** (1968/69), 511–526.
13. ———, *Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples. II*, Jap. J. Math. **40** (1971), 63–104.
14. L. Nirenberg, *Pseudo-differential operators in global analysis*, Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVI, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, pp. 149–167.
15. T. Nishitani, *Some remarks on the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations*, J. Math. Kyoto Univ. **17** (1977), 245–258.
16. ———, *On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations*, Comm. Partial Differential Equations **3** (1978), 319–333.
17. O. A. Oleinik, *On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 569–586.
18. F. Touadera, *Problèmes de Cauchy matriciels C^∞ et dans les espaces de Sobolev à caractéristiques multiples*, Thèse de 3e cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille I, 1986.

F. TOUADERA

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

UNIVERSITÉ DE BANGUI

B.P. 908 BANGUI

RÉPUBLIQUE CENTRAFRICAINE