

INVARIANTS DES COMPLEXES CUBIQUES

GÁBOR HETYEI

RÉSUMÉ. Soit I un invariant des complexes cubiques qui peut être exprimé comme une combinaison linéaire des nombres de faces des différentes dimensions. Nous démontrons que si I ne diminue pas quand on ajoute une nouvelle facette à un effeuillage, alors I est une combinaison linéaire positive des éléments du h -vecteur de Ron Adin. Il est bien connu que les éléments du h -vecteur torique possèdent cette propriété, et nous montrons qu'elle est aussi vraie pour le « h -vecteur de triangulation» qui provient de la série de Hilbert–Poincaré de l'anneau de Stanley d'un complexe cubique. Ainsi, la positivité du h -vecteur de Ron Adin implique la positivité de tous les autres h -vecteurs cubiques connus. Nous démontrons cette positivité pour tout complexe cubique obtenu comme subdivision barycentrique d'une sphère simpliciale.

ABSTRACT. Let I be an invariant of cubical complexes which may be expressed as a linear combination of the number of faces of different dimensions. We prove that I is a nonnegative linear combination of the entries of the Ron Adin h -vector, if it does not decrease when we add a new facet in a shelling. It is known that the entries of the toric h -vector have this property, and we show that the same holds for the “triangulation h -vector” which arises from the Hilbert series of the Stanley ring of a cubical complex. Thus the nonnegativity of the Ron Adin h -vector implies the nonnegativity of all other cubical h -vectors. We prove this nonnegativity for all cubical complexes obtained as a barycentric subdivision of a simplicial sphere.

Introduction. Ces dernières années de plus en plus d'efforts ont été faits pour trouver les analogues cubiques des théorèmes sur les bornes inférieures et supérieures des f -vecteurs de forme $(f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$ des sphères simpliciales de dimension $d - 1$. (Ici f_i désigne le nombre de faces de dimension i .) Dans le cas simplicial, la formulation la plus compacte de ces résultats est donnée en utilisant le h -vecteur de forme $(h_0, \dots, h_d)$ du complexe simplicial, qui est un vecteur de combinaisons linéaires des f_i . En termes du h -vecteur, le théorème sur la borne supérieure (Upper Bound Theorem) affirme que l'on a

$$h_i \leq \binom{f_0 - d + i - 1}{i} \quad \text{pour } 0 \leq i < \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$$

Reçu le 27 avril 1995 et, sous forme définitive, le 19 mars 1996.

Soutenu par la Fondation de l'UQAM/Supported by the UQAM Foundation

pour toute sphère simpliciale de dimension $d - 1$, et le théorème sur la borne inférieure généralisé équivaut à dire que les h_i forment une suite unimodale. En outre, le h -vecteur est positif pour toute sphère simpliciale, et les équations de Dehn–Sommerville, engendrant toutes les relations linéaires satisfaites par le f -vecteur des sphères simpliciales, sont équivalentes aux relations

$$h_i = h_{d-i} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, d.$$

Une référence à tous ces résultats se trouve dans [12]. Dans la démonstration du théorème sur la borne supérieure, le h -vecteur apparaît dans le numérateur de la série de Hilbert–Poincaré de l’anneau de Stanley–Reisner d’un complexe simplicial (voir [11]). L’index cd d’un ensemble partiellement ordonné simplicial eulérien a été décrit par Stanley dans [15, Theorem 3.1] en termes de son h -vecteur, de manière que la positivité de l’index cd d’un ensemble partiellement ordonné simplicial du type Gorenstein* devienne une conséquence de la positivité de son h -vecteur.

Au centre de l’étude des complexes cubiques se trouvait la recherche du « bon » analogue cubique du h -vecteur simplicial. Trois h -vecteurs ont été introduits, chacun préservant quelques propriétés du cas simplicial original. Le premier fut le h -vecteur torique, défini par Stanley dans [14] en une généralité plus grande pour les ensembles partiellement ordonnés eulériens, qui est positif et unimodal pour les polytopes rationnels cubiques. Malheureusement cette unimodalité ne semble pas impliquer les bornes inférieures les plus strictes possibles pour le f -vecteur d’une sphère cubique. Clara Chan a prouvé dans [4] que le h -vecteur torique des complexes cubiques possédant un effeuillage (« shellable cubical complexes ») est positif.

Le deuxième h -vecteur, que nous appelons ici h -vecteur de triangulation, a été étudié par l’auteur du présent article dans [7]. Ce h -vecteur apparaît dans le numérateur de la série de Hilbert–Poincaré de l’anneau de Stanley d’un complexe cubique. Cet anneau est un analogue cubique de l’anneau de Stanley–Reisner d’un complexe simplicial. Le h -vecteur de triangulation est également positif pour les complexes cubiques possédant un effeuillage, et dans le cas des polytopes cubiques il s’agit du h -vecteur (simplicial) de la triangulation obtenue « en tirant les sommets ». Bien que pour une grande classe de polytopes convexes cubiques le h -vecteur de triangulation possède la propriété remarquable d’être le f -vecteur d’un complexe simplicial, et que ce fait nous offre beaucoup d’exemples à une conjecture d’algèbre commutative d’Eisenbud, de Green, et de Harris, ce h -vecteur, semble lui aussi être trop grand pour aider à exprimer les bornes inférieures et supérieures les plus strictes pour le f -vecteur d’une sphère cubique.

Le troisième h -vecteur, que nous appellerons h -vecteur de Ron Adin, a été défini par Ron Adin dans [1]. À partir du début, ce h -vecteur semblait être gagnant sur les deux autres. De même manière que les h -vecteurs toriques et de triangulation, ce h -vecteur aussi est positif pour les complexes cubiques possédant un effeuillage, et les équations de Dehn–Sommerville cubiques sont équivalentes dans tous les trois cas aux relations $h_i = h_{d-i}$ pour $i = 0, 1, \dots, d$. Toutefois, ce h -vecteur a aussi d’autres propriétés qui rappellent celles du h -vecteur simplicial. *Primo*, le h -vecteur de Ron Adin (normalisé) d’un cube est $(1, \dots, 1)$, qui est en bonne harmonie avec le cas simplicial. *Secundo*, la conjecture sur l’unimodalité du h -vecteur de Ron Adin inclut

pour $h_0 \leq h_1$ la première inégalité nontriviale qui a été démontré par Blind and Blind dans [2], et pour $h_1 \leq h_2$ la conjecture sur la borne inférieure faite par Jockusch dans [8]. *Tertio*, comme Ehrenborg et Hetyei l'ont montré dans [6], le h -vecteur de Ron Adin apparaît dans un analogue cubique du résultat de Stanley [15, Theorem 3.1] sur l'indice cd des ensembles partiellement ordonnés simpliciaux eulériens.

Dans cet article nous ajoutons un autre résultat indiquant que le h -vecteur de Ron Adin est l'analogue cubique adéquat pour démontrer des inégalités strictes sur le f -vecteur des sphères cubiques. Notre théorème 1 (section 2) implique que toute combinaison linéaire des f_i qui ne se diminue pas quand nous ajoutons une facette nouvelle dans l'effeuillage d'un complexe cubique, est une combinaison linéaire positive des h_i de Ron Adin. Par conséquent, à cause de la démonstration de Clara Chan de la positivité du h -vecteur torique des complexes cubiques qui ont un effeuillage, le h -vecteur torique est toujours positif lorsque c'est le cas pour le h -vecteur de Ron Adin. Dans la section 3 nous prouvons que le h -vecteur de triangulation, possède lui aussi la propriété de non-diminution demandée pour les effeuillages. (Dans [7] on ne trouve que la démonstration de la positivité du h -vecteur d'un complexe cubique tout entier qui a un effeuillage.) C'est pourquoi les h -vecteurs toriques et de triangulation doivent être positifs pour les sphères cubiques, lorsque c'est le cas pour le h -vecteur de Ron Adin.

Enfin, dans la section 4, nous prouvons la positivité du h -vecteur de Ron Adin pour une classe spéciale des sphères cubiques: pour les complexes cubiques obtenus des sphères simpliciales par subdivision barycentrique. Les sphères cubiques appartenant à cette classe ne possèdent pas nécessairement un effeuillage.

1. Préliminaires.

Définition 1. Un *complexe cubique* est une famille $\mathcal{C}$ de parties finies (appelés faces) d'un ensemble de sommets V tel que $\mathcal{C}$ est fermé sous l'intersection, $\{v\} \in \mathcal{C}$ pour tout $v \in V$, et pour chaque face $\sigma \in \mathcal{C}$ l'ensemble des faces contenues dans σ et ordonnées par inclusion est isomorphe au treillis des faces d'un cube.

On appelle une face maximale une *facette*, et le nombre $\dim(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \text{rang}([\emptyset, \sigma]) - 1$, la *dimension* de la face σ . La dimension d'un complexe cubique $\mathcal{C}$ est le maximum des dimensions de ses faces. Étant donné un complexe cubique $\mathcal{C}$ de dimension $d-1$, on note f_k le nombre de ses faces de dimension k , et on appelle le vecteur $(f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$ le *f-vecteur* de $\mathcal{C}$.

L'exemple le plus simple d'un complexe cubique est la collection $\mathcal{C}^d$ des faces d'un cube standard de dimension d . Ce complexe peut être représenté géométriquement, comme la famille des ensembles de sommets des faces du polytope $[0, 1]^d \subset \mathbb{R}^d$. Nous appelons une bijection $\phi : V(\mathcal{C}^d) \rightarrow \{0, 1\}^d$, qui envoie les faces en les ensembles des sommets des faces de $[0, 1]^d$, une *représentation géométrique standard* de $\mathcal{C}^d$. En utilisant une telle représentation nous pouvons définir les boules et les sphères comme suit.

Définition 2. Une collection $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ de facettes du bord d'un cube de dimension d est appelée une *boule* ou une *sphère* de dimension $d-1$, respectivement, si

l'ensemble $\bigcup_{i=1}^k \text{conv}(\phi(F_i))$ est homéomorphe à une boule ou une sphère de dimension $d - 1$, respectivement.

Cette définition est combinatoire à cause de l'observation suivante, due à Ron Adin et Clara Chan. Étant donnée une collection $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ de facettes du complexe ∂C^d , notons r le nombre des facettes F_i pour lesquelles la facette opposée n'appartient pas à $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$, et notons s le nombre des paires de facettes opposées $\{F_i, F_j\} \subseteq \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$. (Évidemment, nous avons $r + 2s = k$.) Le couple (r, s) sera appelé le *type* de la collection. En utilisant la notion de type, on peut caractériser les boules et les sphères comme suit.

Lemme 1. *Une collection $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ de facettes du bord d'un cube de dimension d est une sphère de dimension $d - 1$ si et seulement si elle est du type $(0, d - 1)$; et elle est une boule de dimension $d - 1$ si et seulement si son type (r, s) satisfait à $r > 0$.*

Étant donnée une face $\sigma \in \mathcal{C}$, nous appelons le complexe cubique $\{\tau \in \mathcal{C} : \tau \subseteq \sigma\}$ la *restriction de $\mathcal{C}$ à σ* , et nous le notons $\mathcal{C}|_\sigma$.

Définition 3. Un complexe cubique est *pur* si toutes ses facettes ont la même dimension. Nous définissons les complexes cubiques possédant un *effeuillage* comme suit.

- (1) L'ensemble vide est un complexe cubique possédant un effeuillage (de dimension (-1)).
- (2) Un point est un complexe possédant un effeuillage (de dimension zéro).
- (3) Un complexe pur $\mathcal{C}$ possède un effeuillage si ses facettes peuvent être énumérées dans un ordre linéaire $F_1, \dots, F_n$ (appelé effeuillage) tel que, pour chaque $k \in \{2, \dots, n\}$, le sous-complexe $\mathcal{C}|_{F_k} \cap (\mathcal{C}|_{F_1} \cup \dots \cup \mathcal{C}|_{F_{k-1}})$ est un complexe pur de dimension $d - 1$ et ses facettes forment une boule ou une sphère de dimension $d - 1$.

Par abus de notation nous dirons que l'attachement de $\mathcal{C}|_{F_k}$ à $\mathcal{C}|_{F_1} \cup \dots \cup \mathcal{C}|_{F_{k-1}}$ dans un effeuillage $F_0, F_1, \dots, F_k$ est de type (r, s) si l'ensemble des facettes de $\mathcal{C}|_{F_k} \cap (\mathcal{C}|_{F_1} \cup \dots \cup \mathcal{C}|_{F_{k-1}})$ considéré comme collection de facettes de $\mathcal{C}|_{F_k}$ est de type (r, s) .

Le lemme suivant est une conséquence immédiate des définitions.

Lemme 2. *Quand nous ajoutons une facette de type d'attachement (r, s) à l'effeuillage d'un complexe cubique de dimension $d - 1$, le nombre des faces de dimension j augmente de*

$$\sum_{\substack{u+v=j-s \\ u, v \geq 0}} \binom{r}{u} \binom{d-1-s}{v} \cdot 2^{d-1-s-v}$$

pour $s \leq j \leq d - 1$, et ne change pas pour les autres valeurs de j .

Définition 4. Un *complexe simplicial* Δ est une famille de sous-ensembles d'un ensemble fini V tel que $\{v\} \in \Delta$ pour tout $v \in V$ et Δ est fermé sous l'inclusion. Les éléments de Δ sont appelés les *faces*.

Notons que cette définition peut être reformulé d'une manière analogue à la définition 1.

Nous définissons les faces, la dimension, le f -vecteur, et un effeuillage d'une manière analogue au cas cubique. Le h -vecteur d'un complexe simplicial de dimension $d - 1$ est donné par

$$\sum_{i=0}^d h_i \cdot t^i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=-1}^{d-1} f_j \cdot t^{j+1} \cdot (1-t)^{d-j-1}. \quad (1)$$

2. Les invariants en termes du h -vecteur de Ron Adin.

Définition 5. Soit $\mathcal{C}$ un complexe cubique de dimension $d - 1$ dont le f -vecteur est $(f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$. Le h -vecteur de Ron Adin (normalisé) de $\mathcal{C}$ est défini par

$$h^{RA}(x) = \sum_{i=0}^d h_i^{RA} \cdot x^i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^d f_{j-1} \cdot c_j(x),$$

où les polynômes $c_j(x)$ sont donnés par

$$c_j(x) = \begin{cases} \frac{1 - (-x)^{d+1}}{1+x} & \text{si } j = 0, \\ \frac{2^{j-d} \cdot x^j \cdot (1-x)^{d-j} + (-1)^{d-j} \cdot x^{d+1}}{1+x} & \text{si } 1 \leq j \leq d. \end{cases}$$

Notons que nous avons divisé le h -vecteur que R. Adin a défini dans [1] par 2^{d-1} , pour obtenir $h_0 = 1$. À cause de cette normalisation, l'équation (19) de [1] prend la forme suivante :

$$f_{j-1} = 2^{d-j} \cdot \sum_{i=1}^j \binom{d-i}{d-j} \cdot (h_i^{RA} + h_{i-1}^{RA}) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq d.$$

D'une manière équivalente, après avoir remplacé j par $j + 1$, nous avons

$$f_j = \begin{cases} 2^{d-j-1} \cdot \left(\binom{d-1}{d-j-1} + \sum_{i=1}^j h_i^{RA} \cdot \left(\binom{d-i}{d-j-1} + \binom{d-i-1}{d-j-1} \right) + h_{j+1}^{RA} \right), & 1 \leq j \leq d-1, \\ 2^{d-1} \cdot (1 + h_1^{RA}), & j = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Théorème 1. Soit I un invariant de complexes cubiques de dimension $d - 1$ qui peut être exprimé comme une combinaison linéaire des f_i . Alors I est une combinaison linéaire positive des éléments du h -vecteur de Ron Adin si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) $I(\mathcal{C}^{d-1}) \geq 0$, c'est-à-dire que la valeur de I sur le complexe des faces d'un cube de dimension $d - 1$ est positive.
- (ii) Si dans un effeuillage d'un complexe cubique de dimension $d - 1$ on ajoute une facette dont le type d'attachement est $(1, i)$ (pour $i = 0, 1, \dots, d - 2$) ou $(0, d - 1)$, alors I ne se diminue pas.

Preuve. Supposons d'abord que les conditions (i)–(ii) sont satisfaites, et que nous avons $I = \sum_{j=-1}^{d-1} \alpha_j \cdot f_j$. Alors, en utilisant l'équation (2), pour tout complexe cubique $\mathcal{C}$ de dimension $d - 1$ nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} I(\mathcal{C}) &= \sum_{j=-1}^{d-1} \alpha_j \cdot f_j \\ &= \alpha_{-1} + \alpha_0 \cdot 2^{d-1} \cdot (1 + h_1^{RA}) + \sum_{j=1}^{d-1} \alpha_j \cdot 2^{d-j-1} \cdot \left[\binom{d-1}{d-j-1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^j h_i^{RA} \cdot \left(\binom{d-i}{d-j-1} + \binom{d-i-1}{d-j-1} \right) + h_{j+1}^{RA} \right]. \end{aligned}$$

Observons que $\alpha_{-1} + \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j \cdot 2^{d-j-1} \cdot \binom{d-1}{d-j-1}$ est la valeur de I sur le complexe des faces d'un cube de dimension $d - 1$. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} I(\mathcal{C}) &= I(\mathcal{C}^{d-1}) + \alpha_0 \cdot 2^{d-1} \cdot h_1^{RA} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{d-1} \alpha_j \cdot 2^{d-j-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^j h_i^{RA} \cdot \left(\binom{d-i}{d-j-1} + \binom{d-i-1}{d-j-1} \right) + h_{j+1}^{RA} \right) \\ &= h_0^{RA} \cdot I(\mathcal{C}^{d-1}) + h_1^{RA} \cdot \left[\alpha_0 \cdot 2^{d-1} + \sum_{j=1}^{d-1} \alpha_j \cdot 2^{d-j-1} \cdot \left(\binom{d-1}{d-j-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{d-2}{d-j-1} \right) \right] + \sum_{i=2}^{d-1} h_i^{RA} \cdot \left[\sum_{j=i}^{d-1} \alpha_j \cdot 2^{d-j-1} \cdot \left(\binom{d-i}{d-j-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{d-i-1}{d-j-1} \right) + \alpha_{i-1} \cdot 2^{d-i} \right] + h_d^{RA} \cdot \alpha_{d-1}. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que pour $1 \leq i \leq d - 1$, le coefficient de h_i^{RA} dans la dernière somme est le double de l'accroissement de I lorsqu'on on ajoute une facette de type d'attachement $(1, i - 1)$ dans l'effeuillage d'un complexe cubique de dimension $d - 1$. En effet, par le lemme 2, pour $j = i, i + 1, \dots, d - 2$ le nombre des faces de dimension j ajoutées est

$$\binom{d-i-1}{d-j-2} \cdot 2^{d-j-2} + \binom{d-i-1}{d-1-j} \cdot 2^{d-1-j},$$

c'est-à-dire,

$$2^{d-j-2} \cdot \left(\binom{d-i-1}{d-j-2} + 2 \cdot \binom{d-i-1}{d-1-j} \right),$$

et, en utilisant l'identité $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, nous pouvons écrire cette expression comme

$$2^{d-j-2} \cdot \left(\binom{d-i}{d-1-j} + \binom{d-i-1}{d-1-j} \right).$$

Le nombre des faces de dimension $i - 1$ ajoutées est 2^{d-i-1} , et le nombre des faces de dimension $d - 1$ ajoutées est 1.

Enfin, le coefficient de h_d^{RA} est égal à l'accroissement de I lorsqu'on ajoute une facette de type d'attachement $(0, d - 1)$ dans l'effeuillage d'un complexe cubique de dimension $d - 1$. Donc, à cause de nos suppositions, le coefficient de tous les h_i est positif.

La réciproque est un corollaire de la preuve du théorème [1, Theorem 5]. $\square$

Exemple. *Le h -vecteur torique.* Dans [4] Clara Chan montre que le h -vecteur torique d'un complexe cubique possédant un effeuillage est positif. Dans sa démonstration elle montre que chaque fois que l'on ajoute une nouvelle facette dans l'effeuillage, les h_i toriques s'accroissent d'un nombre positif. Par le théorème 1 les h_i peuvent être exprimés comme des combinaisons linéaires positives de $h_0^{RA}, \dots, h_d^{RA}$. Donc le h -vecteur torique d'une sphère cubique est positif s'il en est de même pour le h -vecteur de Ron Adin.

3. Le h -vecteur de l'anneau de Stanley. Nous étudions dans cette section le h -vecteur introduit dans [7], et montrons que le théorème 1 lui est applicable.

Étant donné un complexe cubique $\mathcal{C}$ sur l'ensemble de sommets V , l'anneau de Stanley $K[\mathcal{C}]$ de ce complexe $\mathcal{C}$ sur un corps K est défini comme le quotient de l'anneau $K[x_v : v \in V]$ par l'idéal $I(\mathcal{C})$ engendré par tous les monômes $x_{v_1} \cdot x_{v_2} \cdot \dots \cdot x_{v_k}$ tels que $\{v_1, \dots, v_k\}$ n'est contenu dans aucune face de $\mathcal{C}$, et par tous les binômes de la forme $x_u \cdot x_v - x_{u'} \cdot x_{v'}$ tels que $\{u, v\}$ et $\{u', v'\}$ sont les diagonales d'une même face.

Nous avons démontré dans [7, Theorem 3] que la série de Hilbert–Poincaré de l'anneau de Stanley $K[\mathcal{C}]$ d'un complexe cubique $\mathcal{C}$ de dimension $d - 1$ est donné par

$$\mathcal{H}(K[\mathcal{C}], t) = 1 + \sum_{i=0}^{d-1} f_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^i \cdot t^k. \quad (3)$$

Nous avons introduit

$$f_j^\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sum_{i=j}^{d-1} f_i \cdot S(i, j) \cdot j! & \text{si } 0 \leq j \leq d-1 \\ 1 & \text{si } j = -1 \end{cases}, \quad (4)$$

où les nombres $S(i, j)$ désignent les nombres de Stirling de deuxième espèce, et nous avons transformé l'équation (3) en la forme équivalente suivante :

$$\mathcal{H}(K[\mathcal{C}], t) = \frac{\sum_{i=-1}^{d-1} f_i^\Delta \cdot t^{i+1} \cdot (1-t)^{d-i-1}}{(1-t)^d}. \quad (5)$$

Le vecteur $(f_{-1}^\Delta, \dots, f_{d-1}^\Delta)$ est le f -vecteur d'un complexe simplicial associé à $\mathcal{C}$. Dans le cas où $\mathcal{C}$ est le complexe des faces du bord d'un polytope cubique, le vecteur $(f_{-1}^\Delta, \dots, f_{d-1}^\Delta)$ est le f -vecteur d'une triangulation du bord. Nous appelons le h -vecteur simplicial de cette triangulation le *h -vecteur de triangulation* du complexe $\mathcal{C}$.

Ainsi, le h -vecteur de triangulation est donné par

$$\sum_{i=0}^d h_i^\Delta \cdot t^i = \sum_{i=-1}^{d-1} f_i^\Delta \cdot t^{i+1} \cdot (1-t)^{d-i-1}.$$

Dans la démonstration du résultat de la présente section nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 3. Notons $\Phi_{a,b,c}(t)$ la série formelle $\sum_{k \geq 0} k^a \cdot (k+1)^b \cdot (k+2)^c \cdot t^k$, où a, b et c sont des entiers positifs. Alors on a les énoncés suivants.

- (i) On a $\Phi_{a,b,c}(t) = A_{a,b,c}(t)/(1-t)^{a+b+c+1}$, où $A_{a,b,c}(t)$ est un polynôme à coefficients entiers, de degré inférieur ou égal à $a+b+c$.
- (ii) Si $b > 0$ alors le degré de $A_{a,b,c}(t)$ est au plus $a+b+c-1$.
- (iii) Si $b > 0$ ou $c = 0$ alors $A_{a,b,c}(t)$ n'a que des coefficients positifs.

Preuve.

- (i) En introduisant la notation $D = d/dt$, il est facile de vérifier que l'on a

$$\Phi_{a,b,c}(t) = (tD)^a \cdot (tD+1)^b \cdot (tD+2)^c \cdot \Phi_{0,0,0}(t)$$

où $\Phi_{0,0,0}(t) = 1/(1-t)$.

La relation de commutation $Dt = tD + 1$ nous permet d'écrire

$$\Phi_{a,b,c}(t) = \sum_{k=0}^{a+b+c} \alpha_k \cdot t^k \cdot D^k \cdot \Phi_{0,0,0}(t).$$

Donc nous avons

$$\Phi_{a,b,c}(t) = \sum_{k=0}^{a+b+c} \alpha_k \cdot t^k \cdot \frac{k!}{(1-t)^{k+1}} = \frac{\sum_{k=0}^{a+b+c} \alpha_k \cdot t^k \cdot k! \cdot (1-t)^{a+b+c-k}}{(1-t)^{a+b+c+1}},$$

qui implique (i).

- (ii) Dans le cas où $b > 0$, nous pouvons aussi écrire

$$\Phi_{a,b,c}(t) = (tD)^a \cdot (tD+1)^{b-1} \cdot (tD+2)^c \cdot \Phi_{0,1,0}(t),$$

où $\Phi_{0,1,0}(t) = 1/(1-t)^2$. L'énoncé (ii) s'en déduit par une argumentation analogue à la précédente.

- (iii) Nous montrons le troisième énoncé par récurrence sur $a+b+c$. À cause de (i) nous pouvons supposer que $\Phi_{a,b,c}(t)$ est de la forme

$$\Phi_{a,b,c}(t) = \frac{A_{a,b,c}(t)}{(1-t)^{a+b+c+1}},$$

où $A_{a,b,c}(t) = \sum_{i=0}^{a+b+c} A_{a,b,c}^i \cdot t^i$, et tous les $A_{a,b,c}^i$ sont entiers. Étendons la définition de $A_{a,b,c}^i$ à tous les entiers i en posant $A_{a,b,c}^i = 0$ pour $i < 0$ et pour $i > a+b+c$. À cause de (ii) nous savons que $A_{a,b,c}^{a+b+c} = 0$ si $b > 0$.

Notre récurrence repose sur trois formules récursives sur les entiers $A_{a,b,c}^i$.

L'égalité $t \cdot D\Phi_{a,b,c}(t) = \sum_{k \geq 0} k^{a+1} \cdot (k+1)^b \cdot (k+2)^c \cdot t^k = \Phi_{a+1,b,c}(t)$ implique

$$\begin{aligned} \Phi_{a+1,b,c}(t) &= t \cdot D \left(\frac{A_{a,b,c}(t)}{(1-t)^{a+b+c+1}} \right) \\ &= t \cdot \frac{DA_{a,b,c}(t) \cdot (1-t)^{a+b+c+1} + A_{a,b,c}(t) \cdot (a+b+c+1) \cdot (1-t)^{a+b+c}}{(1-t)^{2 \cdot a+2 \cdot b+2 \cdot c+2}} \\ &= \frac{t \cdot DA_{a,b,c}(t) \cdot (1-t) + t \cdot (a+b+c+1) \cdot A_{a,b,c}(t)}{(1-t)^{a+b+c+2}} \\ &= \frac{A_{a+1,b,c}(t)}{(1-t)^{a+b+c+2}}. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$A_{a+1,b,c}^i = i \cdot A_{a,b,c}^i + (a+b+c+2-i) \cdot A_{a,b,c}^{i-1} \quad \text{pour tout } i. \quad (6)$$

D'une manière analogue,

$$D(t \cdot \Phi_{a,b,c}(t)) = \sum_{k \geq 0} k^a \cdot (k+1)^{b+1} \cdot (k+2)^c \cdot t^k = \Phi_{a,b+1,c}(t)$$

implique

$$\Phi_{a,b+1,c} = D(t \cdot \Phi_{a,b,c}(t)) = \Phi_{a,b,c}(t) + t \cdot D\Phi_{a,b,c}(t).$$

En utilisant aussi le calcul précédant nous arrivons à

$$\begin{aligned} \Phi_{a,b+1,c} &= \frac{A_{a,b,c}(t)}{(1-t)^{a+b+c}} + \frac{A_{a+1,b,c}(t)}{(1-t)^{a+b+c+1}} \\ &= \frac{A_{a,b,c}(t) \cdot (1-t) + A_{a+1,b,c}(t)}{(1-t)^{a+b+c+1}} \\ &= \frac{A_{a,b+1,c}(t)}{(1-t)^{a+b+c+1}}, \end{aligned}$$

et obtenons

$$A_{a,b+1,c}^i = A_{a,b,c}^i + A_{a+1,b,c}^i - A_{a,b,c}^{i-1} \quad \text{pour tout } i,$$

ce qui entraîne

$$A_{a,b+1,c}^i = (i+1) \cdot A_{a,b,c}^i + (a+b+c+1-i) \cdot A_{a,b,c}^{i-1} \quad \text{pour tout } i, \quad (7)$$

à cause de l'équation (6).

Enfin,

$$\frac{1}{t} \cdot D(t^2 \cdot \Phi_{a,b,c}(t)) = \sum_{k \geq 0} k^a \cdot (k+1)^b \cdot (k+2)^{c+1} \cdot t^k = \Phi_{a,b,c+1}(t)$$

implique

$$\begin{aligned}\Phi_{a,b,c+1}(t) &= \frac{1}{t} \cdot D(t^2 \cdot \Phi_{a,b,c}(t)) = 2 \cdot \Phi_{a,b,c}(t) + t \cdot D\Phi_{a,b,c}(t) \\ &= \frac{2 \cdot A_{a,b,c}(t) \cdot (1-t) + A_{a+1,b,c}(t)}{(1-t)^{a+b+c+1}} = \frac{A_{a,b,c+1}(t)}{(1-t)^{a+b+c+1}},\end{aligned}$$

et nous obtenons, d'une manière analogue au cas de l'équation (7),

$$A_{a,b,c+1}^i = (i+2) \cdot A_{a,b,c}^i + (a+b+c-i) \cdot A_{a,b,c}^{i-1} \quad \text{pour tout } i. \quad (8)$$

Supposons d'abord $c = 0$. Alors notre base de récurrence est $A_{0,0,0}(t) = 1$, et nous observons que l'application des formules de récurrence (6) et (7) résultent en des $A_{a+1,b,c}^i$ et $A_{a,b+1,c}^i$ positifs pour $i = 0, 1, \dots, a+b+c+1$, pourvu que les $A_{a,b,c}^i$ étaient positifs.

Le cas $b > 0$ est traité d'une façon semblable. Ici nous commençons avec $A_{0,1,0}(t) = 1$, et nous utilisons le fait que toutes les trois formules de récurrence (6), (7), et (8) préservent la positivité des $A_{a,b,c}^i$ pour $i = 1, 2, \dots, a+b+c$. Nous savons de l'énoncé (ii) que dans ce cas-là le degré du polynôme $A_{a,b,c}(t)$ est au plus $a+b+c-1$, et ainsi les formules (6), (7), et (8) nous donnent des coefficients positifs même pour $i = a+b+c+1$. $\square$

Remarque 1. Les polynômes $A_{a,b,c}(t)$ sont les généralisations des *polynômes eulériens*. Il est bien connu que pour $b = c = 0$ le coefficient $A_{a,0,0}^i$ (où $i = 1, \dots, a$) est le nombre de permutations σ de l'ensemble $\{1, \dots, a\}$, qui ont $i-1$ montées, c'est-à-dire, qu'elles satisfont à $|\{j \in \{1, 2, \dots, a\} : \sigma(j) < \sigma(j+1)\}| = i-1$. Voir, par exemple [5, Section 6.5].

Remarque 2. Dans le cas où $a \geq b \geq c$, le polynôme $A_{a,b,c}(t)$ apparaît comme un cas spécial d'une généralisation des polynômes eulériens, cf. [13, Chapter 4, Exercise 26].

Théorème 2. Les invariants $h_0^\Delta, h_1^\Delta, \dots$, et h_d^Δ sont des combinaisons linéaires à coefficients positifs du h -vecteur de Ron Adin.

Preuve. Il suffit de montrer que les conditions du théorème 1 sont satisfaites. Calculons l'accroissement de $\mathcal{H}(K[\mathcal{C}], t)$ sous l'effet de l'ajout d'une facette de type d'attachement (r, s) dans l'effeuillage d'un complexe cubique de dimension $d-1$, où $r > 0$ ou $s = d-1$. En utilisant le lemme 2 nous obtenons que la valeur de cet accroissement est

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{H}(K[\mathcal{C}], t) &= \sum_{j=s}^{d-1} \sum_{\substack{u+v=j-s \\ u,v \geq 0}} \binom{r}{u} \binom{d-1-s}{v} \cdot 2^{d-1-s-v} \cdot \sum_{k \geq 0} k^j \cdot t^{k+1} \\ &= \sum_{k \geq 0} k^s \cdot (k+1)^r \cdot (k+2)^{d-1-r-s} \cdot t^{k+1} = \frac{t \cdot A_{s,r,d-1-r-s}(t)}{(1-t)^d}.\end{aligned}$$

Donc l'accroissement de la somme $\sum_{j=0}^d h_j^\Delta \cdot t^j$ est égal à $t \cdot A_{s,r,d-1-r-s}(t)$, qui est un polynôme à coefficients positifs par la partie (iii) du lemme 3.

Observons enfin que la valeur de $\mathcal{H}(K[\mathcal{C}^{d-1}], t)$, c'est-à-dire, la série de Hilbert–Poincaré de l'anneau de Stanley du cube standard de dimension $d - 1$, est égal à

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(K[\mathcal{C}^{d-1}], t) &= 1 + \sum_{j=0}^{d-1} 2^{d-1-j} \cdot \binom{d-1}{j} \cdot \sum_{k \geq 0} k^j \cdot t^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k \geq 0} t^{k+1} \cdot \left(\sum_{j=0}^{d-1} k^j \cdot 2^{d-1-j} \cdot \binom{d-1}{j} \right) \\ &= 1 + \sum_{k \geq 0} t^{k+1} \cdot (k+2)^{d-1} \\ &= \sum_{k \geq 0} (k+1)^{d-1} \cdot t^k = \frac{A_{0,d-1,0}(t)}{(1-t)^d}. \end{aligned}$$

Donc le h -vecteur de triangulation d'un cube standard de dimension $d - 1$ satisfait à

$$\sum_{j=0}^d h_j^\Delta \cdot t^j = A_{0,d-1,0}(t),$$

qui est aussi positif par la partie (iii) du lemme 3. $\square$

Remarque 3. Les démonstrations des théorèmes 1 et 2 nous permettent d'exprimer le h -vecteur de triangulation d'un complexe cubique de dimension $d - 1$ en termes de son h -vecteur de Ron Adin. Notamment, nous avons la formule suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d h_i^\Delta \cdot t^i &= h_0^{RA} \cdot A_{0,d-1,0}(t) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{d-1} h_i^{RA} \cdot t \cdot A_{i-1,1,d-i-1}(t) \\ &\quad + h_d^{RA} \cdot t \cdot A_{d-1,0,0}(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Remarque 4. Les polynômes $A_{a,b,c}(t)$ utilisés dans l'équation (9) ne sont pas tous couverts par les remarques 1 et 2. Une question intéressant est de trouver une interprétation combinatoire de tous les $A_{a,b,c}^i$ positifs.

4. La subdivision barycentrique cubique d'une sphère simpliciale. Nous prouvons dans cette section que le h -vecteur de Ron Adin d'un complexe cubique, obtenu par subdivision barycentrique d'une sphère simpliciale, est positif.

Définition 6. La première subdivision barycentrique cubique d'un complexe simplicial Δ est le complexe cubique $\mathcal{C}(\Delta)$ défini comme suit.

- (i) L'ensemble des sommets de $\mathcal{C}(\Delta)$ est l'ensemble des faces non-vides de Δ .
- (ii) Les faces de $\mathcal{C}(\Delta)$ sont les intervalles de l'ensemble partiellement ordonné des faces de Δ , c'est-à-dire tous les ensembles de la forme

$$[\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{ \lambda \in \Delta : \sigma \subseteq \lambda \subseteq \tau \}.$$

Remarque 5. L'ensemble partiellement ordonné $\text{Int}(P)$ des intervalles d'un ensemble partiellement ordonné P est étudié dans [13, Chapter 3, Exercices 7, 58]. Notre définition est proche de ce cas spécial lorsque P est l'ensemble des faces d'un complexe simplicial, ordonné par l'inclusion. La seule différence est que nous ne considérons pas les intervalles contenant l'élément minimum de P .

Il est facile de vérifier que $\mathcal{C}(\triangle)$ est un complexe cubique, et que la représentation géométrique de $\triangle$ peut être étendue à une représentation géométrique de $\mathcal{C}(\triangle)$ en utilisant l'opération de la subdivision barycentrique. En effet, dans [3] Babson, Billera, et Chan observent que la même construction de subdivision barycentrique donne lieu à un complexe cubique si, au départ, on avait un complexe de polytopes simples ou un ensemble partiellement ordonné dont les intervalles sont des algèbres booléennes.

Nous pouvons exprimer le vecteur $(f_{-1}^\square, \dots, f_{d-1}^\square)$, le f -vecteur du complexe $\mathcal{C}(\triangle)$, en termes du vecteur $(f_{-1}, \dots, f_{d-1})$, le f -vecteur du complexe $\triangle$, comme suit :

$$f_k^\square = \sum_{j=k}^{d-1} \binom{j+1}{k} \cdot f_j \quad \text{si } k = 0, 1, \dots, d-1. \quad (10)$$

Théorème 3. *Les éléments du h -vecteur de Ron Adin de la subdivision barycentrique cubique $\mathcal{C}(\triangle)$ d'un complexe simplicial $\triangle$ peuvent être exprimés comme des combinaisons linéaires positives des éléments du h -vecteur (simplicial) du complexe $\triangle$.*

Preuve. Par la définition 5 et l'équation (10), le h -vecteur de Ron Adin $(h_0^{RA}, \dots, h_d^{RA})$ de $\mathcal{C}(\triangle)$ satisfait à l'égalité suivante.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^d h_i^{RA} \cdot t^i &= \sum_{k=0}^d f_{k-1}^\square \cdot c_k(t) = c_0(t) + \sum_{k=1}^d \sum_{j=k-1}^{d-1} \binom{j+1}{k-1} \cdot f_j \cdot c_k(t) \\ &= c_0(t) + \sum_{k=1}^d \sum_{j=k-1}^{d-1} \binom{j+1}{k-1} \cdot f_j \cdot c_k(t) = c_0(t) + \sum_{j=0}^{d-1} f_j \cdot \sum_{k=1}^{j+1} \binom{j+1}{k-1} \cdot c_k(t). \end{aligned}$$

En utilisant la définition 5 nous pouvons exprimer la somme $\sum_{k=1}^{j+1} \binom{j+1}{k-1} \cdot c_k(t)$ sous forme close :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{j+1} \binom{j+1}{k-1} \cdot c_k(t) &= \sum_{k=1}^{j+1} \binom{j+1}{k-1} \cdot \frac{2^{k-d} \cdot t^k \cdot (1-t)^{d-k} + (-1)^{d-k} \cdot t^{d+1}}{1+t} \\ &= \frac{2^{-d} \cdot (1-t)^d \cdot \sum_{k=1}^{j+1} \binom{j+1}{k-1} \cdot 2^k \cdot \left(\frac{t}{1-t}\right)^k + (-1)^{d+1} \cdot t^{d+1} \cdot \sum_{k=1}^{j+1} \binom{j+1}{k-1} \cdot (-1)^{k-1}}{1+t} \\ &= \frac{2^{-d} \cdot (1-t)^d \cdot \frac{2 \cdot t}{1-t} \cdot \left(\left(1 + 2 \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{j+1} - \left(\frac{2 \cdot t}{1-t}\right)^{j+1} \right) + (-1)^{d+1} \cdot t^{d+1} \cdot (-1)^j}{1+t} \\ &= \frac{2^{1-d} \cdot (1-t)^{d-j-2} \cdot t \cdot \left((1+t)^{j+1} - (2 \cdot t)^{j+1} \right) + (-1)^{d-j+1} \cdot t^{d+1}}{1+t}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^d h_i^{RA} \cdot t^i &= c_0(t) + \\
&\sum_{j=0}^{d-1} f_j \cdot \frac{2^{1-d} \cdot (1-t)^{d-j-2} \cdot t \cdot ((1+t)^{j+1} - (2 \cdot t)^{j+1}) + (-1)^{d-j+1} \cdot t^{d+1}}{1+t} \\
&= c_0(t) + \frac{2^{1-d} \cdot (1-t)^{d-1} \cdot t}{1+t} \cdot \sum_{j=0}^{d-1} f_j \cdot \left(\left(\frac{1+t}{1-t} \right)^{j+1} - \left(\frac{2 \cdot t}{1-t} \right)^{j+1} \right) \\
&\quad + \frac{(-1)^d \cdot t^{d+1}}{1+t} \cdot \sum_{j=0}^{d-1} f_j \cdot (-1)^{j+1}.
\end{aligned}$$

Observons que l'équation (1) peut être réécrite comme

$$\sum_{j=-1}^{d-1} f_j \cdot t^{j+1} = \sum_{i=0}^d h_i \cdot t^i \cdot (1+t)^{d-i}.$$

Cette égalité nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^d h_i^{RA} \cdot t^i &= c_0(t) + \frac{2^{1-d} \cdot (1-t)^{d-1} \cdot t}{1+t} \cdot \sum_{i=0}^d h_i \cdot \left[\left(\frac{1+t}{1-t} \right)^i \cdot \left(\frac{2}{1-t} \right)^{d-i} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{2 \cdot t}{1-t} \right)^i \cdot \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^{d-i} \right] + \frac{(-1)^d \cdot t^{d+1}}{1+t} \cdot \left(\sum_{i=0}^d h_i \cdot (-1)^i \cdot 0^{d-i} - 1 \right) \\
&= c_0(t) + \frac{t}{1-t} \cdot \sum_{i=0}^d h_i \cdot \left(\left(\frac{1+t}{2} \right)^{i-1} - t^i \cdot \left(\frac{1+t}{2} \right)^{d-i-1} \right) \\
&\quad + \frac{(-1)^d \cdot t^{d+1}}{1+t} \cdot (h_d \cdot (-1)^d - 1).
\end{aligned}$$

Après la substitution de la valeur de $c_0(t)$ et des simplifications évidentes nous obtenons

$$\sum_{i=0}^d h_i^{RA} \cdot t^i = \frac{1 + h_d \cdot t^{d+1}}{1+t} + \frac{t}{1-t} \cdot \sum_{i=0}^d h_i \cdot \left(\left(\frac{1+t}{2} \right)^{i-1} - t^i \cdot \left(\frac{1+t}{2} \right)^{d-i-1} \right).$$

En utilisant $h_0 = 1$ nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^d h_i^{RA} \cdot t^i &= h_0 \cdot \left(\frac{1}{1+t} + \frac{t}{1-t} \cdot \left(\frac{2}{1+t} - \frac{(1+t)^{d-1}}{2^{d-1}} \right) \right) \\
&\quad + h_d \cdot \left(\frac{t^{d+1}}{1+t} + \frac{t}{1-t} \cdot \left(\frac{(1+t)^{d-1}}{2^{d-1}} - \frac{2 \cdot t^d}{1+t} \right) \right) \\
&\quad + \frac{t}{1-t} \cdot \sum_{i=1}^{d-1} h_i \cdot \left(\left(\frac{1+t}{2} \right)^{i-1} - t^i \cdot \left(\frac{1+t}{2} \right)^{d-i-1} \right).
\end{aligned}$$

Ici h_0 est multiplié par

$$\begin{aligned}\phi_0(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{2^{d-1} \cdot (1-t) + 2^d \cdot t - t \cdot (1+t)^d}{2^{d-1} \cdot (1+t) \cdot (1-t)} \\ &= \frac{2^{d-1} \cdot (1+t) - t \cdot (1+t)^d}{2^{d-1} \cdot (1+t) \cdot (1-t)} = \frac{2^{d-1} - t \cdot (1+t)^{d-1}}{2^{d-1} \cdot (1-t)}\end{aligned}$$

et h_d est multiplié par

$$\phi_d(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2^{d-1} \cdot (1-t) \cdot t^{d+1} + t \cdot (1+t)^d - 2^d \cdot t^{d+1}}{2^{d-1} \cdot (1+t) \cdot (1-t)} = \frac{t \cdot (1+t)^{d-1} - 2^{d-1} \cdot t^{d+1}}{2^{d-1} \cdot (1-t)}.$$

Posons

$$\phi_i(t) = \frac{t}{1-t} \cdot \left(\left(\frac{1+t}{2} \right)^{i-1} - t^i \cdot \left(\frac{1+t}{2} \right)^{d-i-1} \right), \quad i = 1, 2, \dots, d-1.$$

Il est évident que

$$t^d \cdot \phi_i \left(\frac{1}{t} \right) = \phi_{d-i}(t) \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, d.$$

Ainsi, il suffit de montrer que $\phi_i(t)$ est un polynôme à coefficients positifs si $i \leq \frac{d}{2}$. Pour $i = 0$ nous avons

$$\phi_0(t) = \frac{2^{d-1} - t \cdot (1+t)^{d-1}}{2^{d-1} \cdot (1-t)} = \frac{2^{d-1} - \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} \cdot t^{j+1}}{2^{d-1} \cdot (1-t)} = \sum_{j=0}^{d-1} \frac{\binom{d-1}{j}}{2^{d-1}} \cdot \frac{1 - t^{j+1}}{1-t},$$

qui est évidemment un polynôme aux coefficients positifs. D'une manière analogue, pour $0 < i \leq \frac{d}{2}$ nous avons

$$\begin{aligned}\phi_i(t) &= \frac{t}{1-t} \cdot \left(\left(\frac{1+t}{2} \right)^{i-1} - t^i \cdot \left(\frac{1+t}{2} \right)^{d-i-1} \right) \\ &= \left(\frac{1+t}{2} \right)^{i-1} \cdot \frac{t}{1-t} \cdot \left(1 - t^i \cdot \left(\frac{1+t}{2} \right)^{d-2 \cdot i} \right) \\ &= \left(\frac{1+t}{2} \right)^{i-1} \cdot t \cdot \left(\sum_{j=0}^{d-2 \cdot i} \frac{\binom{d-2 \cdot i}{j}}{2^{d-2 \cdot i}} \cdot \frac{1 - t^{i+j}}{1-t} \right),\end{aligned}$$

qui, lui aussi est un polynôme à coefficients positifs. $\square$

Corollaire 1. *Si $\triangle$ est un complexe simplicial de Cohen-Macaulay, alors le h -vecteur de Ron Adin de sa subdivision barycentrique cubique est positif.*

En effet, par [11, 2.2 Theorem et 2.5 Corollary], le h -vecteur (simplicial) d'un complexe simplicial de Cohen-Macaulay est positif, et ainsi le théorème 3 implique la positivité du h -vecteur de Ron Adin de $\mathcal{C}(\triangle)$.

Déjà en 1958, M. E. Rudin avait donné dans [10] une triangulation d'un tétraèdre qui n'a pas d'effeuillage, et récemment Lickorish a construit des exemples de triangulations sans effeuillage des sphères de dimension $d - 1$ dans [9]. Il n'est pas connu s'il existe une sphère simpliciale, dont la subdivision barycentrique ne possède pas d'effeuillage.

Conjecture 1. *Pour $d \geq 4$, il existe un complexe simplicial $\triangle$ tel que sa représentation géométrique est homéomorphe à une sphère de dimension $d - 1$ et le complexe cubique $C(\triangle)$ n'a pas d'effeuillage.*

Remerciements. Je remercie vivement François Bergeron et Richard Stanley pour des discussions fructueuses et des conseils utiles. Je suis particulièrement reconnaissant à mon premier rapporteur dont les suggestions m'ont permis de simplifier les démonstrations dans la section 3. Enfin, je suis impressionné par les yeux perçants de Gilbert Labelle, qui n'ont laissé échapper la moindre erreur dans l'avant-dernière version de cet article.

English extended abstract.

Definition 1. A cubical complex $\mathcal{C}$ is a family of finite sets (called faces) on a vertex set V , such that $\mathcal{C}$ is closed under intersection, $\{v\} \in \mathcal{C}$ holds for all $v \in V$, and for every face $\sigma \in \mathcal{C}$ the set of faces contained in σ and ordered by inclusion is isomorphic to the lattice of faces of a cube.

A maximal face of a cubical complex is called a *facet*, and the number $\dim(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \text{rank}([\emptyset, \sigma]) - 1$ is called the *dimension* of the face σ . The dimension of a cubical complex $\mathcal{C}$ is the maximum of the dimensions of its faces. Given a $(d - 1)$ -dimensional cubical complex $\mathcal{C}$, we denote the number of its faces of dimension k by f_k , and we call the vector $(f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$ the *f-vector* of $\mathcal{C}$.

A *standard geometric representation* of the face complex $\mathcal{C}^d$ of a d -cube is a bijection $\phi : V(\mathcal{C}^d) \rightarrow \{0, 1\}^d$ sending the faces of $\mathcal{C}^d$ onto the vertex sets of faces of $[0, 1]^d$.

Definition 2. A collection $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ of facets of the boundary of a d -cube is called a $(d - 1)$ -dimensional *ball* or a $(d - 1)$ -dimensional *sphere*, respectively, if the set $\bigcup_{i=1}^k \text{conv}(\phi(F_i))$ is homeomorphic to a $(d - 1)$ -dimensional ball or sphere, respectively.

Ron Adin and Clara Chan gave the following combinatorial characterization of balls and spheres. Given a collection of facets of $\partial\mathcal{C}^d$, let r be the number of facets F_i such that the facet opposite to F_i does not belong to $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$, and let s be the number of pairs of opposite facets $\{F_i, F_j\} \subseteq \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$. (Obviously we have $r + 2s = k$.) We call (r, s) the *type* of the collection $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$. Then we have the following.

Lemma 1. *The collection of facets $\{F_1, \dots, F_k\}$ of the boundary of a d -cube is a $(d - 1)$ -sphere if and only if it has type $(0, d)$ and it is a $(d - 1)$ -ball if and only if its type (r, s) satisfies $r > 0$.*

Given a face σ of a cubical complex $\mathcal{C}$ we denote it by $\mathcal{C}|_\sigma$ the complex $\{\tau \in \mathcal{C} : \tau \subseteq \sigma\}$.

Definition 3. A cubical complex $\mathcal{C}$ is *pure* if all facets of $\mathcal{C}$ have the same dimension. We define *shellable cubical complexes* as follows.

- (1) The empty set is a $((-1)$ -dimensional) shellable cubical complex.
- (2) A point is a (zero-dimensional) shellable complex.
- (3) A d -dimensional pure complex $\mathcal{C}$ is shellable if its facets can be listed in a linear order $F_1, \dots, F_n$ (called a *shelling*), such that for each $k \in \{2, \dots, n\}$ the subcomplex $\mathcal{C}|_{F_k} \cap (\mathcal{C}|_{F_1} \cup \dots \cup \mathcal{C}|_{F_{k-1}})$ is a pure complex of dimension $(d-1)$ and its maximal dimensional faces form a $(d-1)$ -dimensional ball or sphere.

We say that the attachment of $\mathcal{C}|_{F_k}$ to $\mathcal{C}|_{F_1} \cup \dots \cup \mathcal{C}|_{F_{k-1}}$ in a shelling $F_0, F_1, \dots, F_k$ has type (r, s) if the set of facets of $\mathcal{C}|_{F_k} \cap (\mathcal{C}|_{F_1} \cup \dots \cup \mathcal{C}|_{F_{k-1}})$ considered as a collection of facets of $\mathcal{C}|_{F_k}$ has type (r, s) .

Lemma 2. When we add a facet of attachment type (r, s) to the shelling of a $(d-1)$ -dimensional cubical complex, the number of j -faces increases by

$$\sum_{\substack{u+v=j-s \\ u, v \geq 0}} \binom{r}{u} \binom{d-1-s}{v} \cdot 2^{d-1-s-v}$$

for $s \leq j \leq d-1$, and remains unchanged for all other j 's.

Definition 4. A *simplicial complex* Δ is a family of subsets of a finite set V such that $\{v\} \in \Delta$ for all $v \in V$ and Δ is closed under taking subsets. The elements of Δ are called *faces*.

We introduce the notion of face, dimension, f -vector and shellability similarly to the cubical case, and we define the h -vector $(h_0, \dots, h_d)$ of a $(d-1)$ -dimensional simplicial complex by the formula

$$\sum_{i=0}^d h_i \cdot t^i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=-1}^{d-1} f_j \cdot t^{j+1} \cdot (1-t)^{d-j-1}. \quad (11)$$

In this paper we study the cubical analogues of this h -vector. The first analogue, the *Ron Adin h -vector* is given in Definition 5. Our main result is the following theorem.

Theorem 1. Let I be an invariant of $(d-1)$ -dimensional cubical complexes which may be expressed as a linear combination of the f_i 's. Then I is a nonnegative linear combination of the h_i^{RA} 's if and only if the following hold:

- (i) $I(\mathcal{C}^{d-1}) \geq 0$, i.e., the value of I on the face complex of a $(d-1)$ -cube is nonnegative.
- (ii) in any shelling of any $(d-1)$ -dimensional shellable complex, adding a facet of attachment type $(1, i)$ (where $i = 0, 1, \dots, d-2$) or of attachment type $(0, d-1)$ does not decrease I .

As a consequence, the toric h -vector is nonnegative every times when the same holds for the Ron Adin h -vector. In fact, in [4] Clara Chan shows that the entries of the toric h -vector increase every time we add a new facet to a shelling.

In the third section we show that the entries of the h -vector associated to the Stanley ring of a $(d - 1)$ -dimensional cubical complex $\mathcal{C}$ are also nonnegative linear combinations of the Ron Adin h_i 's. (This is Théorème 2). The *Stanley ring* $K[\mathcal{C}]$ of a cubical complex $\mathcal{C}$ over a field K is the factor of the polynomial ring $K[x_v : v \in V]$ by the ideal $I(\mathcal{C})$ generated by all monomials $x_{v_1} \cdot x_{v_2} \cdots x_{v_k}$ such that $\{v_1, \dots, v_k\}$ is not contained in any face of $\mathcal{C}$, and by all binomials $x_u \cdot x_v - x_{u'} \cdot x_{v'}$ such that $\{u, v\}$ and $\{u', v'\}$ are diagonals of the same face. The Hilbert-series of the Stanley ring $K[\mathcal{C}]$ of a $(d - 1)$ -dimensional cubical complex $\mathcal{C}$ is given by

$$\mathcal{H}(K[\mathcal{C}], t) = \frac{\sum_{i=0}^d h_i^\Delta \cdot t^i}{(1 - t)^d},$$

and we call the vector $(h_0^\Delta, \dots, h_d^\Delta)$ the *triangulation h -vector* of $\mathcal{C}$. (This name is justified by the fact that in the case when we are dealing with the boundary complex of a convex cubical polytope, the vector $(h_0^\Delta, \dots, h_d^\Delta)$ becomes the h -vector of an actual triangulation, cf. [7].) The proof of Théorème 2 is a consequence of the following lemma.

Lemma 3. *Let $\Phi_{a,b,c}(t)$ denote the formal power series $\sum_{k \geq 0} k^a \cdot (k + 1)^b \cdot (k + 2)^c \cdot t^k$, where a, b and c be natural numbers. Then the following hold.*

- (i) *We have $\Phi_{a,b,c}(t) = \frac{A_{a,b,c}(t)}{(1 - t)^{a+b+c+1}}$, where $A_{a,b,c}(t)$ is a polynomial with integer coefficients, of degree at most $a + b + c$.*
- (ii) *If $b > 0$ then the degree of $A_{a,b,c}(t)$ is at most $a + b + c - 1$.*
- (iii) *If $b > 0$ or $c = 0$ then $A_{a,b,c}(t)$ has only nonnegative coefficients.*

It would be interesting to find a combinatorial description of all nonnegative coefficients of the polynomials $A_{a,b,c}(t)$.

Our results indicate that the Ron Adin h -vector is the best candidate to play an analogous role to the simplicial one in proving upper and lower bounds about the f -vector of a cubical sphere. It is already shown in [1], that the Ron Adin h -vector of a shellable cubical complex is nonnegative. In the fourth section, we show the positivity for a class of cubical spheres, which might contain unshellable cubical complexes.

Definition 6. The *first cubical barycentric subdivision* of a simplicial complex Δ , is the cubical complex $\mathcal{C}(\Delta)$ defined as follows.

- (i) The vertex set of $\mathcal{C}(\Delta)$ is the set of nonempty faces of Δ .
- (ii) The faces of $\mathcal{C}(\Delta)$ are the intervals of the face poset of Δ , i.e., all sets of the form

$$[\sigma, \tau] \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \Delta : \sigma \subseteq \lambda \subseteq \tau\}.$$

Theorem 3. *The entries of the Ron Adin h -vector of the cubical barycentric subdivision $\mathcal{C}(\Delta)$ of a simplicial complex Δ may be expressed as nonnegative linear combinations of the entries of the (simplicial) h -vector of Δ .*

Corollary 1. *If Δ is a Cohen–Macaulay simplicial complex (e.g. a simplicial sphere), then the Ron Adin h -vector of its cubical barycentric subdivision $\mathcal{C}(\Delta)$ is nonnegative.*

Already in 1958 M. E. Rudin has shown a unshellable triangulation of a 3-dimensional tetrahedron in [10], and recently Lickorish has constructed unshellable triangulations of the $(d - 1)$ -sphere for $d \geq 4$ in [9]. It is not known, however, whether any cubical barycentric subdivision of a simplicial sphere is unshellable.

Conjecture 1. *For $d \geq 4$ there exists a simplicial complex Δ such that its geometric realization is homeomorphic to a $(d - 1)$ -sphere, and $C(\Delta)$ is not a shellable cubical complex.*

BIBLIOGRAPHIE

1. R. M. Adin, *A new cubical h-vector*, Conference Proceedings at the 6th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, DIMACS/Rutgers 1994.
2. G. Blind and R. Blind, *Convex polytopes without triangular faces*, Israel J. Math. **71** (1990), 129–134.
3. E. K. Babson, L. J. Billera, and C. S. Chan, *Neighborly Cubics and a Cubical Lower Bound Conjecture*, à paraître dans Israel Journal of Mathematics.
4. C. Chan, *Plane trees and h-vectors of shellable cubical complexes*, SIAM J. Disc. Math. **4** (1991), 568–574.
5. L. Comtet, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland, 1974.
6. R. Ehrenborg and G. Hetyei, *The cd-index of cubical posets*, Actes du 7e colloque international “Séries Formelles et Combinatoire Algébrique” (Paris, 29 mai-2 juin 1995) 161–172.
7. G. Hetyei, *On the Stanley ring of a cubical complex*, Discrete Comput. Geom. **14** (1995), 305–330.
8. W. Jockusch, *The lower and upper bound problems for cubical polytopes*, Discrete Comput. Geom. **9** (1993), 159–163.
9. W. B. R. Lickorish, *Unshellable triangulations of spheres*, Europ. J. Comb. **12** (1991), 527–530.
10. M. E. Rudin, *An unshellable triangulation of a tetrahedron*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 90–91.
11. R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Birkhäuser, Boston, 1983.
12. R. P. Stanley, *The number of faces of simplicial polytopes and spheres*, Discrete Geometry and Convexity (J. E. Goodman et al., eds.) Ann. NY Acad. Sci. vol. 440, New York, Academy of Sciences of New York, 1985, pp. 212–223.
13. R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, California, 1986.
14. R. P. Stanley, *Generalized h-vectors, intersection cohomology of toric varieties, and related results*, Commutative Algebra and Combinatorics (M. Nagata and H. Matsumura, eds.), Advanced Studies in Pure Math. vol. 11, Kinokuniya, Tokyo, and North-Holland, Amsterdam/New York, 1987, pp. 187–213.
15. R. Stanley, *Flag f-vectors and the cd-index*, Math. Z. **216** (1994), 483–499.

*L'auteur est membre de l'Institut des Recherches Mathématiques
de l'Académie Hongroise des Sciences*

G. HETYEI

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LABORATOIRE DE COMBINATOIRE ET D'INFORMATIQUE MATHÉMATIQUE

CASE POSTALE 8888, SUCCURSALE CENTRE-VILLE

MONTRÉAL H3C 3P8 CANADA