

LA MINIMISATION DE LA FONCTION DE WEIERSTRASS

AMAR BAOUCHE ET SERGE DUBUC

RÉSUMÉ. Nous entreprenons la minimisation de la fonction de Weierstrass. Nous présentons deux méthodes pour déterminer numériquement la position du minimum d'une fonction dérivable ou non dont on connaît néanmoins le module de continuité. À l'aide de la fonction de Weierstrass, nous comparons l'efficacité de ces deux algorithmes en dégageant un diagramme de bifurcation. Ce diagramme révèle diverses propriétés des points de minimum de la fonction de Weierstrass, certaines de ces propriétés seront rigoureusement démontrées. Nous entreprenons une démarche semblable pour une fonction analogue, la fonction dite de Cellérier. En appendice, nous discutons aussi des erreurs dans le calcul en virgule flottante de la fonction de Weierstrass.

ABSTRACT. The minimisation of the Weierstrass function is considered. We describe two minimum seeking methods of a possibly nondifferentiable, objective function whose modulus of continuity is known. With the use of the Weierstrass function, the efficiency of these algorithms is compared and a bifurcation diagram is derived. Various properties of minimum points of Weierstrass function are revealed by this diagram, some of these are rigorously demonstrated. A similar process is done with a related function going back to Cellérier. In appendix, there is also an error analysis for floating point computations related to Weierstrass function.

1. Introduction. Notre objectif est d'entreprendre l'optimisation de la fonction de Weierstrass et d'une fonction apparentée, la fonction de Cellérier. La fonction de Weierstrass [10] est donnée par une série trigonométrique qui dépend de deux paramètres a et b :

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2\pi b^n x)$$

où $0 < a < 1$, b est un réel supérieur à 1. Dans un travail remarquable, Hardy [5] a montré que sous la condition $ab \geq 1$, la fonction de Weierstrass est nulle part dérivable. Il est très facile de voir que pour des valeurs données de a et de b , la valeur maximale de la fonction de Weierstrass est atteinte à l'origine. C'est la question de la minimisation de la fonction de Weierstrass qui n'est pas immédiate et qui attirera principalement notre attention. Pour éviter une trop grande complexité de la question, nous allons restreindre la valeur de b aux entiers, $b = 2, 3, 4, \dots$. Avec cette restriction, la fonction de Weierstrass est périodique, de période un; et pour chaque valeur de a et une telle

Reçu le 3 octobre 1994 et, sous forme définitive, le 15 septembre 1995.

valeur de b , le minimum de la fonction de Weierstrass est atteint. On désignera par $\text{Min}(a, b)$ la ou les positions de $[0, 1]$ où la fonction de Weierstrass de paramètres (a, b) prend sa valeur minimale. On peut distinguer deux cas selon la parité de b . Lorsque b est impair, un cas très simple se présente : pour tout a compris entre 0 et 1, la fonction de Weierstrass atteint son minimum en $x = 1/2$. Le seul cas qui mérite un intérêt est celui où b est un entier pair. Pour cette introduction, nous nous limitons au cas $b = 2$.

Notre objectif général est de calculer le lieu des points de minimum, $\text{Min}(a, 2)$, de dégager les propriétés de ce lieu et de déterminer comment les positions des points de minimum varient en fonction de a . De façon plus précise, nous abordons deux séries de questions :

- Comment peut-on évaluer numériquement et efficacement le lieu des points de minimum, $\text{Min}(a, 2)$, ceci non seulement pour la fonction de Weierstrass, mais aussi pour n'importe quelle fonction continue ?

- Partant du graphe de l'application multivoque $a \rightarrow \text{Min}(a, 2)$ associée à la fonction de Weierstrass, quelles sont les propriétés les plus apparentes ?

Pour répondre à la première question, nous proposerons deux algorithmes qui permettent le calcul des points de minimum avec comme seule hypothèse une connaissance partielle du module de continuité de la fonction à optimiser. Une telle connaissance est assurée pour une fonction qui satisfait une condition de Lipschitz (ou de Hölder) et c'est ce qui se passe en particulier pour la fonction de Weierstrass. Quant à la seconde question, le graphe laisse soupçonner plusieurs propriétés, par exemple, que si a est compris entre 0 et $1/8$, alors $\text{Min}(a, 2) = \{1/2\}$ et que si a est compris entre $1/2$ et 1, alors $\text{Min}(a, 2) = \{1/3, 2/3\}$. Nous ferons la démonstration de ces propriétés et de quelques autres semblables.

La fonction apparentée à la fonction de Weierstrass et dont nous donnons le nom de fonction de Cellérier est la série trigonométrique :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(2\pi b^n x)$$

où $0 < a < 1$, b est un réel supérieur à 1. Cellérier [2] réclamait que b soit un entier assez grand et que $ab = 1$, mais nous ne retiendrons pas ces deux exigences. Pour cette famille de fonctions, nous entreprendrons une démarche semblable : nous étudierons le lieu des points de maximum des fonctions S lorsque a varie de 0 à 1 à la différence près que les valeurs de b seront des nombres entiers impairs.

En appendice, nous majorons les erreurs qui s'accumulent lors du calcul de la fonction de Weierstrass ou de Cellérier.

2. Algorithmes de minimisation. Un problème fréquent est de trouver à δ près la position du minimum d'une fonction continue f définie sur l'intervalle $[0, 1]$. Plusieurs algorithmes de recherche du minimum ont été proposés dans le passé, mais le plus souvent sous l'hypothèse de la dérivabilité de f . Kiefer [6] a affaibli cette hypothèse ; la méthode de Kiefer (connue aussi sous le nom de recherche de Fibonacci) ne présuppose que la quasi-convexité. Cependant nous voulons considérer des fonctions f encore plus irrégulières, il pourrait même arriver que la fonction à minimiser ne soit nulle part dérivable. Nous présenterons deux méthodes pour déterminer numériquement la

position du minimum d'une fonction dérivable ou non dont on connaît néanmoins partiellement le module de continuité. Cette connaissance partielle consiste en une majoration du module de continuité. La première méthode est un algorithme récursif par bisection et la seconde est un procédé de minimisation à deux niveaux. À l'aide de la fonction de Weierstrass, nous comparerons l'efficacité de ces deux algorithmes vis-à-vis d'un algorithme-témoin qui est une recherche simple du minimum.

L'algorithme-témoin (Recherche simple uniforme)

Soit la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $\delta = 1/N$. On veut trouver à δ près la position du minimum de f . Pour cela on évalue f aux points $0, 1/N, 2/N, \dots, (N-1)/N$ et 1. On propose comme point de minimum global pour f sur $[0, 1]$ un point i/N tel que : $f(i/N) = \min\{f(j/N) : j = 0, 1, \dots, N\}$. Si f est convexe, le point de minimum de f est trouvé à δ près; ou si le point de minimum de f n'est pas unique, le point i/N est voisin à δ près d'un de ces points de minimum. Néanmoins il y a lieu de faire les trois observations suivantes :

- Si f n'est pas convexe et surtout si f n'est pas dérivable, tout peut arriver en principe ...
- Mais en pratique, il sera difficile de rejeter le point i/N comme candidat à un point de minimum.
- L'inefficacité de cet algorithme se manifeste lorsque N est très grand (lorsque δ est trop petit).

Recherche contrôlée du minimum à l'aide du module de continuité

Définition. Si f est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, son *module de continuité* est définie par :

$$\omega(\delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : |x_1 - x_2| \leq \delta\}.$$

Le principe d'une recherche contrôlée du minimum de f procède comme suit : soit $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, si x_i est le point-milieu d'un intervalle $[a_i, b_i]$ et si $f(x_i) > m + \omega(\frac{b_i - a_i}{2})$ alors pour tout x de $[a_i, b_i]$, $f(x) > m$, le point de minimum de f ne peut pas être dans $[a_i, b_i]$. En pratique, on se sert d'une majoration $\beta(\delta)$ du module de continuité et l'on remplace l'inégalité $f(x_i) > m + \omega(\frac{b_i - a_i}{2})$ par le critère $f(x_i) > m_i + \beta(\frac{b_i - a_i}{2})$ où m_i est la plus petite des valeurs de la fonction f que l'on ait rencontré jusque-là. On ne recherche le minimum de f à l'intérieur de $[a_i, b_i]$ que si $f(x_i) \leq m_i + \beta(\frac{b_i - a_i}{2})$. On propose les deux algorithmes suivants :

Recherche du minimum par bisection

Pour localiser le point de minimum nous procédons par bisections successives d'intervalles emboîtés; les sous-intervalles où le minimum de la fonction ne peut pas être atteint sont rejetés, les autres sous-intervalles où il n'est pas exclu que le minimum soit atteint sont subdivisés tant que la longueur du sous-intervalle dépasse la quantité δ . On se sert des évaluations successives de la fonction f pour approcher la valeur du minimum de la fonction f ; puis, on se sert d'une borne du module de continuité pour rejeter les sous-intervalles où le minimum ne peut pas avoir lieu.

Dans ce qui suit, nous présentons en pseudo-PASCAL l'algorithme de recherche du minimum par bisection.

programme MinimisationParBisection;

variable

{xmin est la position et ymin est la valeur du minimum de la fonction f}

xmin, ymin: réel;

profondeur : entier;

{ $\beta[k]$ est une majoration du module de continuité $\omega(2^{-k})$ }

β : tableau[0..19] de réel;

procédure bisection (x0, y0, x1, y1: réel; k: entier);

variable

x, y: réel;

début

si k différent de profondeur, alors

début

$x \leftarrow (x0 + x1) / 2$;

$y \leftarrow f(x)$;

si $y < ymin$ alors

début

$ymin \leftarrow y$;

$xmin \leftarrow x$;

fin de si

si $(y0 \leq \beta[k + 1] + ymin)$, alors

bisection(x0, y0, x, y, k + 1);

si $(y1 \leq \beta[k + 1] + ymin)$, alors

bisection(x, y, x1, y1, k + 1);

fin de si

fin de procédure

début

Calcul des β ;

$xmin \leftarrow 0$;

$ymin \leftarrow f(0)$;

pour profondeur de 0 à 16 faire

bisection(0, f(0), 1, f(1), 0);

fin de programme

Recherche du minimum à deux niveaux

Soit la fonction $f : [0, 1] \rightarrow R$ et soit $\delta = 1/(MN)$. Pour localiser le point de minimum, nous procédons en deux étapes.

- La première étape est une d'apprentissage : on évalue f aux points $0, 1/M, 2/M, \dots, (M-1)/M$ et 1 , et l'on pose $m_0 = \min\{f(i/M) : i = 0, 1, 2, \dots, M\}$.

- La seconde étape est une recherche contrôlée du minimum : pour chacun des intervalles $[i/M - 1/(2M), i/M + 1/(2M)]$, on se demande s'il y a lieu d'y rechercher

le minimum. Si $f(i/M) \leq m_i + \beta(1/(2M))$, alors on partage l'intervalle en N sous-intervalles et m_{i+1} est le minimum entre m_i et la plus petite valeur de f rencontrée lors des évaluations aux extrémités de ces intervalles.

La principale procédure de l'algorithme de recherche du minimum à deux niveaux prend la forme suivante en pseudo-PASCAL.

```

procédure DeuxNiveaux;
début
  pour i de 0 à m faire
    si f(i / m) <= ymin + β alors
      pour j de -n / 2 à n / 2 faire
        début
          x ← (i + j / n) / m;
          y ← f(x);
          si y < ymin alors
            début
              ymin ← y;
              xmin ← x;
            fin de si
          fin de pour
        fin de pour
      fin de si
    fin de pour
  fin de procédure

```

3. Majoration du module de continuité de la fonction de Weierstrass. Si l'on désire appliquer les algorithmes précédents pour rechercher le point du minimum de la fonction de Weierstrass pour diverses valeurs des paramètres a et b , il nous faut d'abord discuter du module de continuité de la fonction de Weierstrass.

Théorème 1. *On a les majorations suivantes pour le module de continuité de la fonction de Weierstrass (et de Cellérier) :*

$$\omega\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{2}{1-a}$$

et pour $N \geq 1$,

$$\omega\left(\frac{1}{2b^N}\right) \leq \frac{\pi(1 + ab + \dots + a^{N-1}b^{N-1})}{b^N} + \frac{2a^N}{1-a}$$

Démonstration. Pour tout couple de nombres x et y , on a l'inégalité $|C(x) - C(y)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a^n \min\{2, 2\pi b^n |x - y|\}$. D'où si $|x - y| \leq b^{-N}/2$, on obtient :

$$\omega\left(\frac{1}{2b^N}\right) \leq \pi \sum_{n=0}^{N-1} a^n b^{n-N} + 2a^N/(1-a).$$

Le même argument tient pour la fonction de Cellérier. $\square$

4. Application et comparaison de l'efficacité des algorithmes. Nous avons expérimenté chacun des trois algorithmes de minimisation : la recherche simple, la recherche par bisection et la recherche à deux niveaux. La fonction à minimiser a été la fonction de Weierstrass pour les valeurs suivantes des paramètres : b était toujours égal à 2 et l'on a donné trois choix pour a , $a = 0,4$, $a = 0,5$ et $a = 0,6$. Pour chacune de ces trois fonctions, on a entrepris la recherche de la position du minimum selon une précision δ . Les valeurs δ retenues ont été $1/2^n$, pour n allant de 9 à 16. Le tableau 1 donne les résultats des calculs lorsque l'on procède par une recherche à deux niveaux. La position calculée du minimum est notée x .

δ	x	$C(x, 2/5)$	x	$C(x, 1/2)$	x	$C(x, 3/5)$
2^{-10}	0,34961	-0,84169	0,33301	-0,99581	0,33301	-1,22574
2^{-11}	0,34912	-0,84191	0,33350	-0,99879	0,33350	-1,23633
2^{-12}	0,34912	-0,84191	0,33325	-0,99895	0,33325	-1,24136
2^{-13}	0,34924	-0,84196	0,33337	-0,99970	0,33337	-1,24504
2^{-14}	0,34924	-0,84196	0,33331	-0,99974	0,33331	-1,24691
2^{-15}	0,34927	-0,84197	0,33334	-0,99992	0,33334	-1,24820
2^{-16}	0,34927	-0,84197	0,33333	-0,99994	0,33333	-1,24889

TABLEAU 1. Position et valeur des minimums de 3 fonctions de Weierstrass (paramètres des fonctions : $b = 2$ et $a = 2/5$, $1/2$ et $3/5$).

Le second tableau donne le nombre d'évaluations de la fonction à minimiser lorsque l'on fait la recherche du minimum de la fonction de Weierstrass selon chaque méthode pour une précision δ . La lecture du nombre d'évaluations montre bien que la méthode de bisection et la recherche à deux niveaux sont nettement préférables à la recherche simple surtout si la précision voulue est plus grande.

δ	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
2^{-10}	1026	1026	1026	243	243	371	250	318	404
2^{-11}	2050	2050	2050	435	435	627	328	464	572
2^{-12}	4098	4098	4098	675	675	739	434	634	800
2^{-13}	8194	8194	8194	1251	1251	1379	598	894	1136
2^{-14}	16386	16386	16386	1987	1603	2115	818	1246	1618
2^{-15}	32770	32770	32770	3779	3011	4035	1108	1748	2280
2^{-16}	65538	65538	65538	5507	2691	2947	1432	2456	3172

TABLEAU 2. Nombre d'évaluations de la fonction à minimiser. La fonction est la fonction de Weierstrass avec $a = 2/5$ (1), $a = 1/2$ (2) et $a = 3/5$ (3). Les résultats dans les trois colonnes à droite de la colonne des δ ont été obtenus par une recherche simple, les résultats dans les trois colonnes suivantes proviennent d'une recherche à deux niveaux et les résultats dans les trois dernières colonnes viennent d'une recherche par bisection.

La recherche du minimum à deux niveaux ou par bisection se fait si rapidement que l'une ou l'autre permettent de considérer successivement une quantité de problèmes de minimum. Par exemple, on peut trouver tous les points de minimum de la fonction de Weierstrass de paramètre $b = 2$ et de paramètre a variable, aux multiples entiers de $1/1000$: $a = 0, 1/1000, 2/1000, \dots, 999/1000$. Le graphique produit sera appelé le diagramme de bifurcation de la fonction de Weierstrass, il s'agit du graphe de l'application multivoque $a \rightarrow \text{Min}(a, 2)$. Nous rappelons que $\text{Min}(a, b)$ désigne l'ensemble des points de minimum de la fonction de Weierstrass de paramètres (a, b) restreinte à l'intervalle $[0, 1]$. La Figure 1 reproduit ce diagramme. Plusieurs propriétés de la fonction de Weierstrass se manifestent dans cette figure. C'est la section suivante qui justifiera ces évidences graphiques.

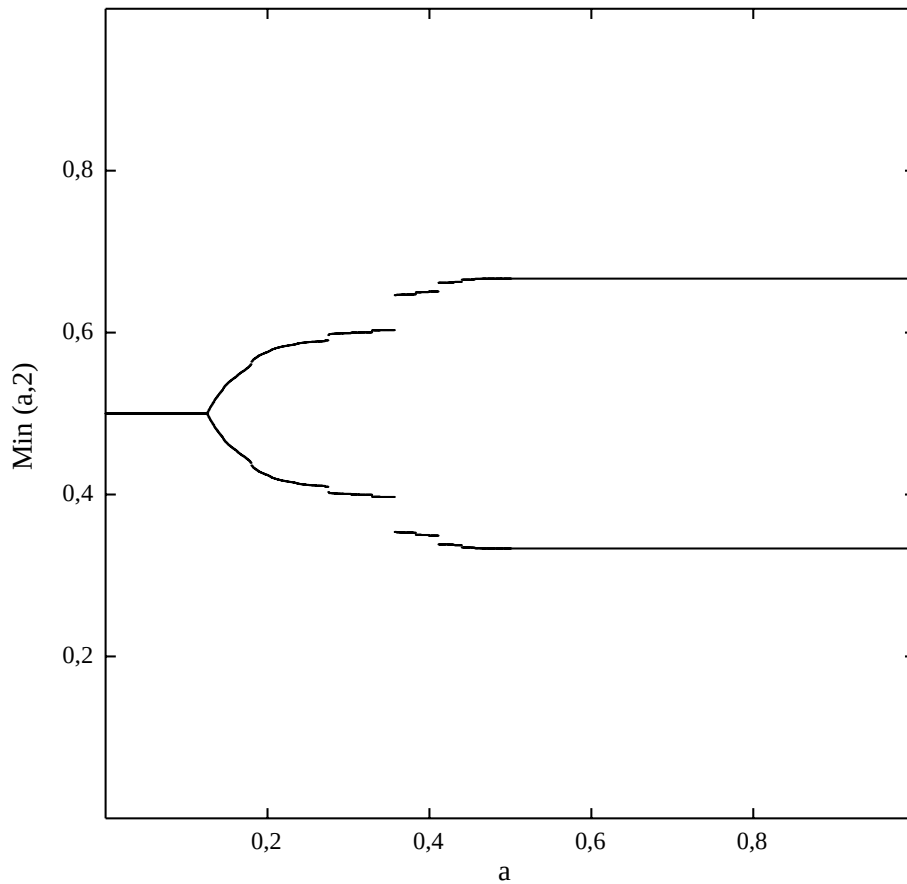


Figure 1. Graphe des points de minimum de la fonction de Weierstrass

5. Étude analytique des minimums de la fonction de Weierstrass. On considère la fonction $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2\pi b^n x)$ avec $0 < a < 1$ et b entier plus grand que un. Suivant les valeurs des paramètres a et b , on localise les positions des points qui réalisent le minimum de $C(x)$. Nous commençons d'abord par donner quelques propriétés de la fonction C : c'est une fonction paire, périodique de période un et symétrique par rapport à l'axe $x = 1/2$. Avant d'entamer l'étude des minimums de la

fonction de Weierstrass, attardons-nous brièvement sur son maximum. Si b est entier et si $0 < a < 1$, le maximum de $C(x)$ sur $\mathbf{R}$ est atteint aux entiers n de $\mathbf{Z}$. En effet, on a $C(n) = 1/(1 - a)$ et si $n < x < n + 1$, $C(x) < 1/(1 - a)$. Faisons maintenant une description des principaux résultats de cette section. Pour un entier impair b , on a $\text{Min}(a, b) = \{1/2\}$ (Lemme 2). Pour $b = 2$, on a les résultats suivants. Si $a \leq 1/8$, on a $\text{Min}(a, 2) = \{1/2\}$ (Théorème 3). Si $a \geq 1/2$, $\text{Min}(a, 2) = \{1/3, 2/3\}$ (Théorème 4). La démonstration de ce dernier résultat se généralise aux autres entiers pairs, lorsque $ab \geq 1$, on obtient $\text{Min}(a, b) \cap [0, 1/2] = \{\frac{b}{2b+2}\}$. Si $1/8 < a < 1/2$, l'interprétation du diagramme de bifurcation devient plus difficile, néanmoins nous pouvons exhiber certaines propriétés. En particulier, nous montrons que dans certaines parties de l'intervalle $(1/8, 1/4)$, l'ensemble $\text{Min}(a, 2) \cap [0, 1/2]$ est constitué d'un seul point (Théorème 6) et si $1/4 < a < 1/2$, nous arrivons à cerner les principaux points de discontinuité du diagramme de bifurcation (Théorème 8).

Cas où le paramètre b est un entier impair

Si le paramètre b est un entier impair plus grand que un, on a le résultat simple suivant :

Lemme 2. *Si b est un entier impair et si $0 < a < 1$, alors le minimum de $C(x)$ sur $[0, 1]$ est uniquement atteint en $x = 1/2$ et on a $C(1/2) = -1/(1 - a)$.*

Démonstration. Il est clair que $C(1/2) = -1/(1 - a)$. Si $x \in [0, 1]$, mais que $x \neq 1/2$, on a $\cos(2\pi x) > -1$ et dans ce cas, on a : $C(x) > C(1/2)$. $\square$

Cas où le paramètre b est un entier pair

On se limite au cas où le paramètre b est égal à deux. On a la fonction $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2\pi 2^n x)$. On étudie les lieux du minimum de $C(x)$ sur $[0, 1/2]$ lorsque le paramètre a varie de 0 à 1. Lorsque $0 \leq a \leq 1/8$ on a le résultat suivant :

Théorème 3. *Si $0 \leq a \leq 1/8$ alors la fonction $C(x)$ atteint son minimum sur $[0, 1]$ en un seul point $x = 1/2$ et la valeur minimale est $C(1/2) = (2a - 1)/(1 - a)$.*

Démonstration. L'idée de la démonstration est d'exprimer la fonction de Weierstrass $C(x)$ comme somme d'une série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ telle que le minimum de chacune des fonctions $f_n(x)$ sur $[0, 1]$ est uniquement atteint au même point $x = 1/2$. Pour ce faire, on pose $f_0(x) = \frac{1-8a}{1-4a} \cos(2\pi x)$ et pour $n \geq 1$,

$$f_n(x) = (4a)^n \cos(2\pi x) + a^n \cos(2\pi 2^n x)$$

Il est très facile de vérifier l'identité $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Vérifions que chacune des fonctions f_n admet le point $x = 1/2$ comme unique point de minimum sur $[0, 1]$ et que sur $[0, 1/2]$, les seuls points critiques de f_n sont précisément 0 et $1/2$. Ceci est vrai pour la fonction f_0 ; nous supposons maintenant que n est positif. On montre que $f'_n(x) = -2\pi(2a)^n \{2^n \sin(2\pi x) + \sin(2\pi 2^n x)\} = -2\pi(4a)^n \sin(2\pi x) \{1 + \prod_{k=1}^n \cos(\pi 2^k x)\}$.

La dernière équation est obtenue en appliquant l'identité $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ avec $\theta = 2\pi 2^k x$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $0 < x < 1/2$ et $f'_n(x) = 0$; il s'ensuivrait que $\prod_{k=1}^n \cos(\pi 2^k x) = -1$. Dans ce cas, on doit avoir $|\cos(\pi 2^k x)| = 1$ pour tout $k = 1, \dots, n$, ceci est impossible du moins pour le

cas $k = 1$. En conclusion, on a seulement deux points critiques sur $[0, 1/2]$: $x = 0$ et $x = 1/2$. Le minimum global de $f_n(x)$ sur $[0, 1/2]$ est atteint en $x = 1/2$ pour tout n . L'on déduit que $C(x)$ atteint son minimum sur $[0, 1/2]$ en $x = 1/2$. $\square$

On considère maintenant le cas où $a \geq 1/2$. Ceci nous donne la non-différentiabilité de la fonction de Weierstrass $C(x)$ (voir [1, 5]). Dans ce cas on a le théorème suivant :

Théorème 4. *Si $a \geq 1/2$, la fonction $C(x)$ atteint son minimum sur $[0, 1/2]$ en un seul point $x = 1/3$ et on a $C(1/3) = -1/(2 - 2a)$.*

Démonstration. L'idée de la démonstration est d'exprimer la fonction de Weierstrass $C(x)$ comme somme d'une série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(x)$ telle que les c_n sont positifs et le minimum sur $[0, 1/2]$ de chacune des fonctions $g_n(x)$ est atteint au même point $x = 1/3$. Pour ce faire, on pose $g_n(x) = \cos(2\pi 2^n x) + \cos(2\pi 2^{n+1} x)/2$. Pour que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n [\cos(2\pi 2^n x) + \cos(2\pi 2^{n+1} x)/2]$ ait $C(x)$ comme somme, il suffit que la suite c_n remplisse la récurrence : $c_n + c_{n-1}/2 = a^n$ alors que $c_0 = 1$. D'où $c_1 = a - 1/2$, $c_2 = a^2 - a/2 + 1/4$, $c_3 = a^3 - a^2/2 + a/4 - 1/8, \dots$ D'une façon générale, $c_n = \frac{a^{n+1} - (-1/2)^{n+1}}{a + 1/2}$. La dernière formule fait voir que $(\forall n) : c_n \geq 0$ lorsque l'hypothèse $2a \geq 1$ est remplie.

On vérifie sans difficulté que le minimum global de $g_0(x)$ sur $[0, 1/2]$ est atteint en un seul point $x = 1/3$ et que $g_0(1/3) = -1/2$. D'autre part, on a $g_n(x) = g_0(2^n x)$ et de la périodicité de $g_0(x)$, on obtient que $g_n(x) = g_0(2^n x) \geq g_0(1/3) = -1/2$ pour tout $x \in [0, 1/2]$. Par ailleurs on montre par récurrence sur n que $g_0(2^n/3) = g_0(1/3)$. Conclusion : $g_n(x) \geq g_n(1/3)$ pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in [0, 1/2]$.

Finalement, on a que $C(x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(1/3) = C(1/3) = -1/(2 - 2a)$. $\square$

Remarque. Si b est un entier pair quelconque et si $ab \geq 1$, le minimum de la fonction de Weierstrass $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2\pi b^n x)$ sur $[0, 1/2]$ est atteint uniquement en un seul point $x = b/(2(b+1))$, sa valeur est $C(b/(2(b+1))) = -\cos(\pi/(b+1))/(1-a)$. La démonstration est analogue à celle du théorème 4.

Si $1/8 < a < 1/4$, l'étude s'avère difficile. La position des lieux des points du minimum de la fonction $C(x)$ varie ponctuellement avec la variation du paramètre a . Cependant, nous avons pu par un calcul numérique déterminer certaines parties de l'intervalle $]1/8, 1/4[$ où le minimum de $C(x)$ n'est atteint qu'en un seul point. Cette étude est basée sur la notion du module de continuité. On considère les fonctions $C'(x)$ et $C''(x)$ comme étant des fonctions à deux variables : $\frac{\partial C}{\partial x}(x, a)$ et $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, a)$. Si on note par $\omega_1(h), \omega_2(h)$ les modules de continuité par rapport à la variable x et par $\mu_1(k), \mu_2(k)$ les modules de continuité par rapport à la variable a pour chacune des deux fonctions respectivement, on peut alors majorer ces différents modules :

Lemme 5. *Si le paramètre a est positif, on a les majorations :*

- $\omega_1(1/2^{N+1}) \leq 2\pi^2 \sum_{n=0}^{N-1} (2a)^n 2^{n-N} + 4\pi(2a)^N/(1-2a)$;
- $\omega_2(1/2^{N+1}) \leq 4\pi^3 \sum_{n=0}^{N-1} (4a)^n 2^{n-N} + 8\pi^2(4a)^N/(1-4a)$;
- $\mu_1(k) \leq 4\pi k / [(1-2a)(1-2a-2k)]$ si $a+k < 1/2$;
- $\mu_2(k) \leq 16\pi^2 k / [(1-4a)(1-4a-4k)]$ si $a+k < 1/4$.

Démonstration. On remarque que $\frac{\partial C}{\partial x}(x, a)$ est la fonction de Cellérier de paramètres $(2a, 2)$ affectée du facteur -2π et que $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, a)$ est la fonction de Weierstrass de

paramètres $(4a, 2)$ affectée du facteur $-4\pi^2$. Pour ces raisons, les inégalités relatives à ω_1 et ω_2 proviennent du Théorème 1.

Pour établir la troisième inégalité, on observe que :

$$\left| \frac{\partial C}{\partial x}(x, a) - \frac{\partial C}{\partial x}(x, a') \right| \leq 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} 2^n |a^n - a'^n| = 4\pi |a - a'| / [(1 - 2a)(1 - 2a')].$$

Si maintenant $|a - a'| \leq k$ et $a + k < 1/2$, on aura alors : $\mu_1(k) \leq 4\pi k / [(1 - 2a)(1 - 2a - 2k)]$. L'autre inégalité se démontre de la même manière. $\square$

Théorème 6. Si $a \in [0, 128; 0, 179] \cup [0, 180; 0, 203] \cup [0, 204; 0, 213]$, la fonction $C(x)$ admet un seul point de minimum sur $[0, 1/2]$ et la position de ce minimum est l'unique solution à l'équation $C'(x) = 0$ que l'on peut trouver sur $(0, 1/2)$; de plus en ce point de minimum, $C'''(x) > 0$.

Démonstration assistée par ordinateur. Prenons $a \in [0, 128; 0, 179]$ et soit le rectangle $R = \{(x, a) : x \in [0, 1/2] \text{ et } 0, 128 \leq a \leq 0, 179\}$. L'objectif est d'étudier le lieu des zéros de la fonction de deux variables $\frac{\partial C}{\partial x}(x, a)$ dans R . Nous allons vérifier que les deux fonctions $\frac{\partial C}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ ne s'annulent jamais en même temps en un même point de R . Pour cela, il suffit de trouver une partie S et deux nombres h et k tels que

- 1) $\bigcup_{(x,a) \in S} [x - h, x + h] \times [a - k, a + k] \supseteq R$.
- 2) $\forall (x, a) \in S$, au moins une des inégalités est satisfaite :

$$\left| \frac{\partial C}{\partial x}(x, a) \right| > \omega_1(h) + \mu_1(k) \text{ ou } \left| \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, a) \right| > \omega_2(h) + \mu_2(k).$$

En effet, s'il existait un point de R telle qu'à la fois $\frac{\partial C}{\partial x}(x', a') = 0$ et $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x', a') = 0$, on pourrait trouver un point (x, a) de S tel que $|x - x'| \leq h$ et $|a - a'| \leq k$. Dans ce cas on obtiendrait $|\frac{\partial C}{\partial x}(x, a)| \leq \omega_1(h) + \mu_1(k)$ et $|\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, a)| \leq \omega_2(h) + \mu_2(k)$. Ce qui contredit la condition 2.

La figure 2 illustre le contexte géométrique de ces deux conditions.

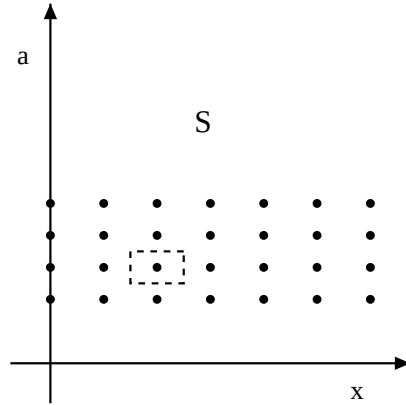


Figure 2. Recouvrement du plan pour l'analyse de la courbe (C', C'')

Indiquons comment nous avons choisi S, h et k .

$h = 2^{-21}$, $k = 5.10^{-5}$ et S est le produit cartésien de $A \times B$ où $A = \{n.2^{-20} : n = 0, 1, 2, \dots, 2^{19}\}$ et $B = \{n.10^{-4} : 1280 \leq n \leq 1790\}$. Avec ce choix de h , de k et de S pour R , il est clair que la condition 1) est satisfaite. Il reste à vérifier la condition 2), ceci peut se faire par ordinateur et par l'argumentation suivante :

Soient $C_1(x, a)$ et $C_2(x, a)$ les calculs respectifs de $\frac{\partial C}{\partial x}(x, a)$ et $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, a)$, il est possible de majorer les erreurs de calcul. En effet, avec un ordinateur qui admet une arithmétique en virgule flottante à double précision avec des mots de 32 bits, si $a < 9/40$ on a : $|C_1(x, a) - \frac{\partial C}{\partial x}(x, a)| < \epsilon_1$ et $|C_2(x, a) - \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, a)| < \epsilon_2$ où $\epsilon_1 = 2\pi \times 10^{-13}$ et $\epsilon_2 = 4\pi^2 \times 10^{-13}$. Ces inégalités sont justifiées dans l'appendice A.

On introduit une autre condition 3) en tout point de S , au moins une des inégalités est satisfaite $|C_1(x, a)| > \omega_1(h) + \mu_1(k) + \epsilon_1$ ou $|C_2(x, a)| > \omega_2(h) + \mu_2(k) + \epsilon_2$.

La condition 3) implique la condition 2) et c'est un calcul numérique qui montre que la condition 3) est vérifiée.

En conclusion $\forall a \in [0, 128; 0, 179]$, les zéros de l'équation $\frac{\partial C}{\partial x}(x, a) = 0$ sont tous simples; le nombre de racines est invariable en fonction de a . On sait déjà que $\frac{\partial C}{\partial x}(0, a) = 0$ et $\frac{\partial C}{\partial x}(1/2, a) = 0$. Le nombre de solutions dans $(0, 1/2)$ de l'équation $\frac{\partial C}{\partial x}(x, a) = 0$ est le nombre de changements de signe de la suite $\{C_1(x, a) : x \in A\}$ alors que a est une valeur arbitraire de B . À la suite de l'examen de la suite, ce nombre est un. Comme $x = 0$ est le lieu de maximum de $C(x)$, alors le minimum sur $[0, 1/2]$ de $C(x)$ est atteint au zéro de l'équation $\frac{\partial C}{\partial x}(x, a) = 0$; de plus en un tel zéro x , $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, a) > 0$ vu la condition 2). Si $a \in [0, 128; 0, 179]$, la démonstration est complète.

Si $a \in [0, 180; 0, 203]$, il suffit de reprendre la même argumentation en ne modifiant que B de la manière suivante : $B = \{n.10^{-4} : 1800 \leq n \leq 2030\}$. De la même façon, lorsque $a \in [0, 204; 0, 213]$, on prend pour B la progression arithmétique $\{n.10^{-4} : 2040 \leq n \leq 2130\}$. $\square$

Commentaire. Que se passe-t-il lorsque a est compris entre 0, 179 et 0, 180 ? C'est une question de calcul numérique que nous n'avons pas pu trancher. Le même commentaire s'applique lorsque a est compris entre 0, 203 et 0, 204 ou que a est entre 0, 213 et 1/4.

Considérons maintenant le diagramme de bifurcation des points de minimum de la fonction $C(x)$ qui dispose en abscisse des valeurs de a de 0 à 1 et en ordonnée de la position du point du minimum. Lorsque $a \in [0, 128; 0, 179] \cup [0, 180; 0, 203] \cup [0, 204; 0, 213]$, les parties du diagramme correspondantes sont des courbes continues dérivables avec des dérivées continues.

Théorème 7. Si $a \in (0, 128; 0, 179) \cup (0, 180; 0, 203) \cup (0, 204; 0, 213)$, les positions du minimum de $C(x)$ situées dans $[0, 1/2]$ sont représentées par une fonction unique continue $x = \phi(a)$ qui admet de plus une dérivée continue.

Démonstration. Si a est une valeur donnée de $(0, 128; 0, 179)$, si $C(x)$ est la fonction de Weierstrass, $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2\pi b^n x)$ et si x est la position du minimum de C sur $[0, 1/2]$, alors on peut poser $x = \phi(a)$. D'après le théorème 6, la fonction ϕ peut aussi se définir implicitement par l'équation $f(x, a) = 0$ sur le rectangle $R = (0, 1/2) \times (0, 128; 0, 179)$ si l'on a posé $f(x, a) = \frac{\partial C}{\partial x}(x, a)$. Or f admet des dérivées partielles d'ordre un continues sur R . De plus, on sait par le même théorème 6 qu'en tout point

de la courbe $f(x, a) = \frac{\partial C}{\partial x}(x, a) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, a) = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, a) \neq 0$. Les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont donc remplies pour dire que la fonction ϕ est non seulement continue, mais que sa dérivée existe et est continue. Si a est une valeur donnée de $(0, 180; 0, 203) \cup (0, 204; 0, 213)$, un raisonnement semblable a lieu. $\square$

Lorsque $1/4 < a < 1/2$ le diagramme de bifurcation des points de minimum de la fonction $C(x)$ présente des discontinuités. Un algorithme numérique simple et efficace permet de localiser certains de ces points de discontinuité.

Théorème 8. *Si $1/4 < a < 1/2$ le diagramme de bifurcation des points de minimum de la fonction $C(x)$ présente des discontinuités aux points suivants :*

$$\{0, 2747 \dots, 0, 3280 \dots, 0, 3568 \dots, 0, 3826 \dots, 0, 4106 \dots, 0, 4395 \dots\}.$$

De façon plus précise, pour chacune de ces valeurs a' , il existe un voisinage $(a' - \delta, a' + \delta)$ et deux nombres x_1 et x_2 tels que

- $0 < x_2 < x_1 < 1/2$,
- si $a' - \delta < a < a'$, alors le minimum de $x \rightarrow C(x, a)$ est atteint sur un voisinage de x_1 et non pas sur un voisinage de x_2 ;
- si $a' < a < a' + \delta$, alors le minimum de $x \rightarrow C(x, a)$ est atteint sur un voisinage de x_2 et non pas sur un voisinage de x_1 .

Démonstration. Pour fixer les idées, considérons d'abord le cas où $a' = 0, 3568 \dots$ et attardons à déterminer pour chacune des valeurs de a comprises entre $a_1 = 0, 35680$ et $a_2 = 0, 35690$ le minimum de la fonction de Weierstrass $x \rightarrow C(x, a)$. Après des calculs préliminaires sur ordinateur, deux valeurs x_1 et x_2 semblent jouer un grand rôle dans ce problème de minimisation : $x_1 = 0, 397 \dots$ et $x_2 = 0, 353 \dots$. Nous posons donc $x_3 = 0, 375$ (qui est environ à mi-chemin entre x_1 et x_2). Nous définissons maintenant deux fonctions g_1 et g_2 de la variable a : $g_1(a) = \min\{C(x, a) : x_3 \leq x \leq 1/2\}$ et $g_2(a) = \min\{C(x, a) : 0 \leq x \leq x_3\}$. On remarque que g_1 et g_2 sont continues et l'on vérifie numériquement que $g_1(a_1) < g_2(a_1)$ et $g_1(a_2) > g_2(a_2)$; en fait $g_1(a_1) = -0, 80136 \dots$, $g_2(a_1) = -0, 80132 \dots$, $g_1(a_2) = -0, 80139 \dots$, $g_2(a_2) = -0, 80141 \dots$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc une valeur $a' = 0, 3568 \dots$ telle que $g_1(a') = g_2(a')$. D'après la définition des fonctions g_1 et g_2 , on peut trouver deux abscisses x_1 et x_2 tels que $x_3 \leq x_1 \leq 1/2$, $g_1(a') = C(x_1, a')$ et $0 \leq x_2 \leq x_3$, $g_2(a') = C(x_2, a')$. Les valeurs numériques de x_1 et de x_2 sont respectivement $0, 397 \dots$ et $0, 353 \dots$; la fonction de Weierstrass $C(x, a')$ prend son minimum en ces deux endroits distincts, la valeur minimale atteinte est $-0, 80138 \dots$. À l'aide de résultats que Rockafellar [8] attribue à Danskin [3], que nous citons dans l'appendice B, on établit que la dérivée de g_1 en a' est le nombre $\frac{\partial C}{\partial a}(x_1, a') = -0, 324 \dots$ alors que la dérivée de g_2 en a' est le nombre $\frac{\partial C}{\partial a}(x_2, a') = -0, 854 \dots$. Parce que les dérivées de g_1 et de g_2 sont distinctes en a' et parce que le minimum de la fonction de Weierstrass $x \rightarrow C(x, a)$ est le plus petit des deux nombres $g_1(a)$ et $g_2(a)$, on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que

- si $a_1 \leq a' - \delta < a < a'$, alors le minimum de $x \rightarrow C(x, a)$ est atteint sur un voisinage de x_1 et non pas sur un voisinage de x_2 ;

- si $a' < a < a' + \delta \leq a_2$, alors le minimum de $x \rightarrow C(x, a)$ est atteint sur un voisinage de x_2 et non pas sur un voisinage de x_1 .

Ceci est précisément la conclusion recherchée. Pour les autres valeurs citées de a' , on procède de la même façon en se servant des données du tableau 3. $\square$

a'	x_1	x_2	$C(x_1) = C(x_2)$	$C(\frac{x_1+x_2}{2})$	$\frac{\partial C}{\partial a}(x_1)$	$\frac{\partial C}{\partial a}(x_2)$
0,2746...	0,409...	0,402...	-0,7835...	-0,7832...	-0,028...	-0,093...
0,3280...	0,399...	0,397...	-0,7930...	-0,7927...	-0,238...	-0,258...
0,3568...	0,397...	0,353...	-0,8013...	-0,7640...	-0,324...	-0,854...
0,3826...	0,352...	0,350...	-0,8245...	-0,8234...	-0,934...	-0,978...
0,4109...	0,349...	0,338...	-0,8535...	-0,8410...	-1,073...	-1,311...
0,4395...	0,337...	0,334...	-0,8930...	-0,8890...	-1,461...	-1,546...

TABLEAU 3. Valeurs responsables de discontinuité pour les minimums

Remarque. Si $F(a)$ désigne les endroits où la fonction de Weierstrass atteint son minimum, alors une discontinuité de l'application multivoque $a \rightarrow F(a)$ pour $a = a'$ se produit lorsque la fonction de Weierstrass $x \rightarrow C(x, a')$ atteint son minimum absolu en deux points distincts de $[0, 1/2]$, ce qui veut dire que sur une période complète, la fonction de Weierstrass atteint son minimum en 4 points.

6. Étude analytique des maximums de la fonction de Cellérier. La fonction de Cellérier est définie par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(2\pi b^n x).$$

Cellérier [2] a montré la non-dérivabilité de la fonction $S(x)$ pour tout entier b assez grand lorsque $ab = 1$. Par la suite la non-dérivabilité de la fonction $S(x)$ a été montrée sous des conditions plus générales sur les paramètres a et b à savoir $ab \geq 1$ avec $0 < a < 1$, b réel plus grand que un (voir [1, 5]). Ici on s'intéresse à déterminer les lieux de maximum de cette fonction dans le cas où $0 < a < 1$ et b est un entier impair plus grand que un. On donne quelques propriétés de $S(x)$: $S(x)$ est une fonction impaire, périodique de période un. On se limite à l'étudier sur l'intervalle $[0, 1/2]$. Dans ce cas si x est un point de maximum sur $[0, 1/2]$, $-x$ est un point de minimum sur $[-1/2, 0]$. Nous énonçons les principaux résultats de cette section. Notons par $\text{Max}(a, b)$ la ou les positions de $[0, 1/2]$ où la fonction $S(x)$ de paramètres (a, b) prend sa valeur maximale. Pour $b \equiv 1 \pmod{4}$, on aura $\text{Max}(a, b) = \{1/4\}$ (Lemme 9). Si $b \equiv 3 \pmod{4}$, on se restreint à $b = 3$. Dans ce cas, pour $0 < a < 1/9$, on a $\text{Max}(a, 3) = \{1/4\}$ (Théorème 10) et pour $a \geq 1/3$, on aura $\text{Max}(a, 3) = \{1/8, 3/8\}$ (Théorème 11). D'une manière générale, et si $ab \geq 1$, on a $\text{Max}(a, b) = \{\frac{b-1}{4b+4}, \frac{b+3}{4b+4}\}$.

Cas où $b \equiv 1 \pmod{4}$

Lemme 9. Si $b \equiv 1 \pmod{4}$, le maximum de la fonction $S(x)$ sur $[0, 1/2]$ est atteint en un seul point $x = 1/4$ et vaut $S(1/4) = 1/(1 - a)$.

Démonstration. On a $S(1/4) = 1/(1 - a)$. Si $x \in [0, 1/4[\cup]1/4, 1/2]$, alors $\sin(2\pi x) < 1$ et dans ce cas on aura $S(x) < S(1/4)$. $\square$

Cas où $b \equiv 3 \pmod{4}$

Si $b \equiv 3 \pmod{4}$, on se restreint au cas $b = 3$. Suivant les valeurs du paramètre a , on se propose de déterminer les lieux des points du maximum de la fonction $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(2\pi 3^n x)$. Lorsque $0 < a < 1/9$, on a le résultat suivant :

Théorème 10. *Si $b = 3$ et si $0 < a < 1/9$, alors le maximum de la fonction $S(x)$ sur $[0, 1]$ est atteint en un seul point $x = 1/4$ et on a $S(1/4) = 1/(1 + a)$.*

Démonstration. Nous nous inspirons de la démonstration des théorèmes 3 et 4. Si $h_n(x) = \sin(2\pi 3^{2n}x) + a \sin(2\pi 3^{2n+1}x)$, nous obtenons que $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} h_n(x)$. Vérifions maintenant que le maximum de chacune des fonctions $h_n(x)$ sur $[0, 1]$ est atteint au même point $x = 1/4$. Déterminons les points critiques de h_0 entre 0 et 1. On vérifie que $h'_0(x) = 2\pi \cos(2\pi x) \{1 - 3a + 6a \cos(4\pi x)\}$ après s'être servi de l'identité $\cos 3\theta = \cos \theta (2 \cos 2\theta - 1)$. Si $0 < a < 1/9$, alors la quantité $1 - 3a + 6a \cos(4\pi x)$ est nécessairement positive (il suffit de minorer $\cos(4\pi x)$ par -1). Les seuls points critiques de h_0 sont donc $x = 1/4$ et $x = 3/4$; $1/4$ est le point de maximum. $3/4$ est le point de minimum. De la périodicité de $h_0(x)$ et du fait que $h_n(x) = h_0(3^{2n}x)$, on déduit que $h_n(x) \leq h_0(1/4) = 1 - a$ pour tout $n \geq 0$ et pour tout x . D'où $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} h_n(x) \leq (1 - a) \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} = 1/(1 + a) = S(1/4)$ pour tout x . $\square$

On considère maintenant le cas où $a \geq 1/3$. Ceci implique la non-différentiabilité de la fonction. La position du point du minimum par rapport au paramètre a reste constante. On a le résultat suivant :

Théorème 11. *Si $b = 3$ et si $a \geq 1/3$, alors le maximum de la fonction $S(x)$ est atteint sur $[0, 1/2]$ en deux points $\{1/8, 3/8\}$ et vaut $S(1/8) = \cos(\pi/4)/(1 - a)$.*

Démonstration. La fonction $S(x)$ est symétrique par rapport à l'axe $x = 1/4$. Si on se limite à l'intervalle $[0, 1/4]$, la démonstration reste analogue à celle du théorème 4 en considérant dans ce cas la suite de fonctions $\{g_n\}_{n \geq 0}$ définie par : $g_n(x) = \sin(2\pi 3^n x) + \sin(2\pi 3^{n+1}x)/3$. $\square$

Remarque. Si b est un entier quelconque $\equiv 3 \pmod{4}$ et si $ab \geq 1$ le maximum de la fonction de $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(2\pi b^n x)$ sur $[0, 1/2]$ est atteint en deux points $\{(b-1)/4(b+1), 1/2 - (b-1)/4(b+1)\}$ sa valeur est $S((b-1)/4(b+1)) = \cos(\pi/(b+1))/(1 - a)$. La démonstration est analogue à celle du théorème 4.

Nous terminons cette section en attirant l'attention du lecteur sur le fait que nous nous sommes limités à étudier les maximums de la fonction de Cellérier pour des valeurs impaires du paramètre b . L'étude des maximums de la fonction de Cellérier pour des valeurs paires du paramètre b reste à faire.

7. Conclusion. Comme nous l'avons déjà dit, les algorithmes de recherche des points de minimum d'une fonction présupposent très souvent sa dérivabilité et même l'existence de sa dérivée seconde. Certains auteurs ont tenté de s'affranchir de ces hypothèses. Par exemple, Shubert [9] et Pijavskii [7] ont proposé une méthode de recherche du maximum pour des fonctions qui satisfont une condition de Lipschitz d'ordre 1. De

façon plus récente, Ellaia [4] a proposé un algorithme qui s'applique à des fonctions qui satisfont une condition de Hölder (ou une condition de Lipschitz d'ordre α où $0 < \alpha < 1$). Si $ab > 1$ le théorème 1 fait voir que la fonction de Weierstrass $C(x)$ satisfait une condition de Hölder d'ordre $\alpha = -\ln a / \ln b$. L'algorithme d'Ellaia serait donc applicable dans ce cas. Si $ab < 1$, la fonction de Weierstrass est de classe C^1 une foule d'algorithmes peuvent être utilisés pour minimiser numériquement cette fonction.

Consécutivement à la section 5, quelques questions restent sans réponse. Nous terminons en posant quatre de ces questions.

- Lorsque le paramètre a est comprise entre $1/8$ et $1/4$ alors que b vaut 2, est-il vrai que la dérivée de la fonction de Weierstrass ne s'annule qu'une seule fois sur l'intervalle $(0, 1/2)$?
- Est-ce que le nombre de discontinuités de l'application multivoque $a \rightarrow \text{Min}(a, 2)$ est infini ?
- Le graphe de $a \rightarrow \text{Min}(a, 2) \cap [0, 1/2]$ semble être le graphe d'une fonction décroissante. Peut-on vérifier cette conjecture ?
- Que peut-on dire des points de minimum et des points de maximum de la fonction de Weierstrass lorsque le paramètre a est choisi entre -1 et 0 ?

Enfin il serait également intéressant de s'interroger sur la minimisation de fonctions non dérivables comme $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n C(x_i, a_i, b_i)$, les paramètres $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ auraient été choisis d'avance.

Remerciement. Le second auteur reçoit l'appui du CRSNG (gouvernement fédéral du Canada) selon le programme de subvention de recherches.

A Erreur dans le calcul de la fonction de Weierstrass en virgule flottante. Dans la démonstration du théorème 6, nous avons besoin de faire l'évaluation numérique des deux fonctions $\frac{\partial C}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ et de connaître l'erreur absolue commise dans ces évaluations. Puisque $\frac{\partial C}{\partial x}(x, a) = -2\pi S(x, 2a)$ et $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, a) = -4\pi^2 2C(x, 4a)$, il suffit d'étudier l'erreur commise lors du calcul de la fonction de Weierstrass ou de Cellérier. Pour arriver à cette fin, nous rappelons l'approche de Wilkinson [11] pour l'étude des erreurs dans les opérations arithmétiques en virgule flottante et nous rappelons certaines de ses formules d'erreurs. Nous nous servons de ces résultats pour majorer les erreurs commises dans le calcul de la fonction de Weierstrass en virgule flottante.

Si x est un nombre réel, on supposera que $\text{fl}(x)$ est l'arrondi de x en virgule flottante à la base 2 avec t chiffres significatifs (en double précision, sur de nombreux ordinateurs, $t = 53$). Nous noterons par F la totalité des nombres que l'on peut exprimer en virgule flottante à la base 2 avec t chiffres significatifs. Si $x, y, \dots$ sont des nombres de F , nous supposons que $\text{fl}(x + y)$, $\text{fl}(x - y)$, $\text{fl}(xy)$ et $\text{fl}(x/y)$ donneront le calcul respectif de $\text{fl}(x) + \text{fl}(y)$, $\text{fl}(x) - \text{fl}(y)$, $\text{fl}(x)\text{fl}(y)$ et de $\text{fl}(x)/\text{fl}(y)$ en virgule flottante. D'une manière générale, si E est une expression arithmétique élémentaire formée de nombres de F , $x, y, z, \dots$ affectés d'opérations arithmétiques élémentaires, $\text{fl}(E)$ désigne le résultat obtenu en appliquant les opérations en virgule flottante sur l'expression portant sur les nombres donnés.

Wilkinson a d'abord donné les formules suivantes d'erreurs pour les opérations arithmétiques élémentaires.

Si $x \in F, y \in F$, alors il existe un nombre ϵ tel que $\text{fl}(x + y) = (1 + \epsilon)(x + y)$ où $|\epsilon| \leq 2^{-t}$.

Si $x \in F, y \in F$, alors il existe un nombre ϵ tel que $\text{fl}(x - y) = (1 + \epsilon)(x - y)$ où $|\epsilon| \leq 2^{-t}$.

Si $x \in F, y \in F$, alors il existe un nombre ϵ tel que $\text{fl}(xy) = (1 + \epsilon)xy$ où $|\epsilon| \leq 2^{-t}$.

Si $x \in F, y \in F, y \neq 0$, alors il existe un nombre ϵ tel que $\text{fl}(x/y) = (1 + \epsilon)x/y$ où $|\epsilon| \leq 2^{-t}$.

Nous relevons deux autres formules d'erreurs dues à Wilkinson, ce sont les formules (23.5) et (28.6) de [11].

Formule 1. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ une collection de n nombres de F , alors

$$\text{fl}(x_1 x_2 \dots x_n) = (1 + E)x_1 x_2 \dots x_n$$

où $(1 - 2^{-t})^{n-1} \leq 1 + E \leq (1 + 2^{-t})^{n-1}$.

Formule 2. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ une collection de n nombres de F , on suppose que $n2^{-t} < 1/10$, alors

$$|\text{fl}(\sum_{k=1}^n x_k) - \sum_{k=1}^n x_k| \leq 1,06(n-1)2^{-t} \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

Dans son énoncé de la formule 28.6, Wilkinson suppose que $\sum_{k=1}^n |x_k| < 1$, mais cette hypothèse n'est absolument pas nécessaire.

Calcul de la fonction de Weierstrass

Nous supposons que l'argument x dans la fonction de Weierstrass est une fraction dyadique de la forme $i/2^t, 0 \leq i \leq 2^t$, et que le nombre a se représente sans erreur en virgule flottante avec t bits pour la mantisse. On remarque que $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2\pi 2^n x) = \sum_{n=0}^{t-1} a^n \cos(2\pi 2^n x) + a^t/(1-a)$. Nous désignerons par c_n le résultat du calcul par ordinateur de la valeur $\cos(2\pi 2^n x)$. Ce que nous supposons est que $|c_n - \cos(2\pi 2^n x)| < 3 \cdot 2^{-t} |\cos(2\pi 2^n x)|$. Le calcul de $C(x)$ est $\text{fl}(C(x)) = \text{fl}(\sum_{n=0}^{t-1} a^n c_n + a^t/(1-a))$. La formule 1 de Wilkinson permet de dire que $\text{fl}(a^n c_n) = a^n c_n (1 + E_n)$ où $(1 - 2^{-t})^n \leq (1 + E_n) \leq (1 + 2^{-t})^n$. La formule 2 de Wilkinson donne : $|\text{fl}(\sum_{n=0}^{t-1} a^n c_n + a^t/(1-a)) - [\sum_{n=0}^{t-1} \text{fl}(a^n c_n) + \text{fl}(a^t/(1-a))]| \leq M_1(a)$ où $M_1(a) = 1,06t2^{-t}(1 + 3 \times 2^{-t})/(1 - a(1 + 2^{-t}))$. D'autre part on montre que $|\sum_{n=0}^{t-1} \text{fl}(a^n c_n) + \text{fl}(a^t/(1-a)) - C(x)| \leq M_2(a)$ où $M_2(a) = \sum_{n=0}^{t-1} a^n [(1 + 2^{-t})^n (1 + 3 \times 2^{-t}) - 1] + \frac{a^t}{1-a} [(1 + 2^{-t})^t - 1]$

Si dans la somme des erreurs $M_1(a) + M_2(a)$, on néglige les termes qui contiennent des puissances supérieures à un de 2^{-t} , on obtient la simple majoration, $|\text{fl}(C(x)) - C(x)| \leq [\frac{1}{(1-a)^2} + \frac{2}{1-a} + \frac{1,06t}{1-a(1+2^{-t})}]2^{-t}$. De la même façon, on montre qu'à lieu l'inégalité analogue pour la fonction de Cellérier,

$$|\text{fl}(S(x)) - S(x)| \leq [\frac{1}{(1-a)^2} + \frac{2}{1-a} + \frac{1,06t}{1-a(1+2^{-t})}]2^{-t}.$$

Ces deux inégalités permettent de dire que les erreurs $|\text{fl}(C(x)) - C(x)|$ et $|\text{fl}(S(x)) - S(x)|$ ne dépassent pas 10^{-13} lorsque les calculs se font à double précision, que a et x se représentent exactement en virgule flottante et que $a < 0,9$. Ce sont ces majorations d'erreurs dont on avait besoin dans le théorème 6.

B Dérivabilité de la valeur minimale. Nous énonçons dans le contexte d'une fonction de deux variables un résultat donné par Rockafellar [8].

Soit $f(x, v)$ une fonction de classe C^1 définie sur le rectangle $[a, b] \times [c, d]$, on pose

$$p(v) = \max\{f(x, v) : x \in [a, b]\} \text{ et } X(v) = \{x : f(x, v) = p(v)\},$$

alors pour tout v de (c, d) , p admet des dérivées à droite et à gauche $p'(v+) = \min\{\frac{\partial f}{\partial v}(x, v) : x \in X(v)\}$, $: p'(v-) = \max\{\frac{\partial f}{\partial v}(x, v) : x \in X(v)\}$

English extended abstract. We undertake the optimization of the Weierstrass function and of a similar function, that one of Cellérier. The Weierstrass function is given by a trigonometric series which has two real parameters a and b :

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2\pi b^n x)$$

where $0 < a < 1$, $b > 1$. We will always assume that b is an integer, $b = 2, 3, 4, \dots$. With this restriction, the function of Weierstrass is periodic, with a period of one; and for each value of a and for such a value of b , the minimum of $C(x)$ is reached. One denotes by $\text{Min}(a, b)$ the places of $[0, 1]$ where $C(x)$ takes its minimal value. When b is odd, a very simple case occurs.

Lemma 2. *If b is an odd integer and if $0 < a < 1$, then the minimum of $C(x)$ on $[0, 1]$ occurs only at $x = 1/2$ and $C(1/2) = -1/(1 - a)$.*

So the only interesting case is when b is even. The graph of the multiapplication $a \rightarrow \text{Min}(a, b)$ is called the bifurcation diagram of $C(x)$. This diagram with $b = 2$ is the content of the Figure 1. We consider two series of questions:

- How can one computes efficiently the set of points of minimum $\text{Min}(a, 2)$?
- What are the most visible properties of the bifurcation diagram?

As answer to the first question, we describe two minimum seeking methods of a possibly nondifferentiable, objective function whose modulus of continuity is known at least by an upper bound. These algorithms are a search at two levels and a search by bisection. With Weierstrass function, these algorithms are compared for their efficiency (see Tables 1 and 2). The following upper bounds for the modulus of continuity of Weierstrass function (and Cellérier function) are satisfied:

Theorem 1.

$$\omega\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{2}{1-a}$$

and for $N \geq 1$,

$$\omega\left(\frac{1}{2b^N}\right) \leq \frac{\pi(1 + ab + \dots + a^{N-1}b^{N-1})}{b^N} + \frac{2a^N}{1-a}$$

Related to the second question, the following theorems are proved.

Theorem 3. *If $0 \leq a \leq 1/8$ and if $b = 2$, then the function $C(x)$ reaches its minimum on $[0, 1]$ at the only place $x = 1/2$ and $C(1/2) = (2a - 1)/(1 - a)$.*

Theorem 4. *If $a \geq 1/2$, then the function $C(x)$ reaches its minimum on $[0, 1/2]$ at the only place $x = 1/3$ and $C(1/3) = -1/(2 - 2a)$.*

Theorem 6. *If $a \in [0, 128; 0, 179] \cup [0, 180; 0, 203] \cup [0, 204; 0, 213]$, then the function $C(x)$ has only one point of minimum in $[0, 1/2]$ and this minimum is the unique solution to the equation $C'(x) = 0$ in $(0, 1/2)$; moreover, at this point, $C''(x) > 0$.*

The proof of Theorem 6 is computer aided after the moduli of continuity of $\frac{\partial C}{\partial x}$ and $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ have been used.

Theorem 7. *If $a \in [0, 128; 0, 179] \cup [0, 180; 0, 203] \cup [0, 204; 0, 213]$, the positions of minimum of $C(x)$ in $[0, 1/2]$ come from a unique continuously differentiable function $x = \phi(a)$.*

Theorem 8. *If $1/4 < a < 1/2$, the diagram of bifurcation of the points of minimum of $C(x)$ has discontinuities at the following points:*

$$\{0, 2747 \dots, 0, 3280 \dots, 0, 3568 \dots, 0, 3826 \dots, 0, 4106 \dots, 0, 4395 \dots\}.$$

More precisely for each of these values a' , there is a neighbourhood $(a' - \delta, a' + \delta)$ and two numbers x_1 and x_2 such that

- $0 < x_2 < x_1 < 1/2$,
- if $a' - \delta < a < a'$, then the minimum of $x \rightarrow C(x, a)$ is reached on a neighbourhood of x_1 but not on a neighbourhood of x_2 ;
- if $a' < a < a' + \delta$, then the minimum of $x \rightarrow C(x, a)$ is reached on a neighbourhood of x_2 but not on a neighbourhood of x_1 .

The last matters of the paper are about the function of Cellérier, the trigonometric series:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(2\pi b^n x)$$

where $0 < a < 1$, $b > 1$. We are studying the maximum of S when b is an odd integer.

Lemma 9. *If $b \equiv 1 \pmod{4}$, the maximum of $S(x)$ in $[0, 1/2]$ is reached at only one point: $x = 1/4$ and $S(1/4) = 1/(1 - a)$.*

Theorem 10. *If $b = 3$ and if $0 < a < 1/9$, then the maximum of $S(x)$ sur $[0, 1]$ is reached at only one point: $x = 1/4$ and $S(1/4) = 1/(1 + a)$.*

Theorem 11. *If $b = 3$ and if $a \geq 1/3$, then the maximum of $S(x)$ in $[0, 1/2]$ is reached at the two places $\{1/8, 3/8\}$ and $S(1/8) = \cos(\pi/4)/(1 - a)$.*

In an appendix, the error in the computation in floating point of the Weierstrass function is analyzed. If $\text{fl}(C(x))$ is the computed value of $C(x)$, a typical result is that $|\text{fl}(C(x)) - C(x)| < 10^{-13}$ when the computations are done in double precision, that a and x has an exact representation in floating point and that $a < 0,9$. This error analysis is necessary for the proof of Theorem 6.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Baouche et S. Dubuc, *La non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass*, Enseign. Math. **38** (1992), 89–94.
2. C. Cellérier, *Note sur les principes fondamentaux de l'analyse*, Bull. Sci. Math. **(2) XIV première partie** (1890), 142–160.
3. J. M. Danskin, *The Theory Max-Min and Its Application to Weapons Allocations Problems*, Springer-Verlag, New-York, 1967.
4. R. Ellaia, *Global optimization procedures for solving systems of Hölder equations-inequations*, Séminaire d'analyse numérique; Univ. Paul Sabatier, Toulouse III (1989-1990), VII-1–VII-14.
5. G. H. Hardy, *Weierstrass's non-differentiable function*, Trans. Amer. Math. Soc. **17** (1916), 301–325.
6. J. Kiefer, *Sequential minimax search for a maximum*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 502–506.
7. S. A. Pijavskii, *An algorithm for finding the absolute minimum of function*, Theory of Optimal Solutions, Akad. Nauk Ukrain, SSR, Kiev, 1967; Seminar, Kiev **2** (1967). (en russe)
8. R. T. Rockafellar, *Differentiability properties of the minimum value in an optimization problem depending on parameters*, Proc. Int. Cong. of Math, Warsaw (1984), 1419–1423.
9. B. O. Shubert, *A sequential method seeking the global maximum of a function*, SIAM J. Numer. Anal. **9** (1972), 379–388.
10. F. Weierstrass, *Über continuirliche functionen eines reellen arguments die für keinen werth des letzteren einen bestimmter differentialquotienten besitzen*, Mathematische Werke **II** (1872), 71–72.
11. J. H. Wilkinson, *Rounding Errors in Algebraic Processes*, Her Majesty's Stationery Office, London, 1963.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
 UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
 CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE CENTRE-VILLE
 MONTRÉAL (QUÉBEC)
 H3C 3J7 CANADA