

CARACTÉRISATION DES FONCTIONS D.C.

A. ELHILALI ALAOUI

RÉSUMÉ. Dans ce papier nous caractérisons les fonctions localement lipschitziennes qui peuvent s'écrire comme différence de deux fonctions convexes (fonctions D.C.) en termes de multi-applications cycliquement monotones maximales.

ABSTRACT. In this paper we give a characterization of locally Lipschitz functions which are differences of two convex functions (D.C. functions) in terms of maximal cyclically monotone set-valued mappings.

Introduction. Rockafellar [19] a caractérisé les multi-applications qui sont des sous-différentiels de fonctions convexes s.c.i. en termes de multi-applications cycliquement monotones maximales. Il a montré qu'une multi-application d'un espace de Banach X dans son dual est le sous-différentiel d'une fonction convexe s.c.i. propre de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ si et seulement si elle est cycliquement monotone maximale. Depuis plusieurs auteurs se sont intéressés à la caractérisation de nombreuses classes importantes (en optimisation) de fonctions non différentiables. Nous citons (par exemple) Clarke [3] qui a montré qu'une fonction f définie et localement lipschitzienne sur un ouvert convexe Ω d'un espace de Banach X est convexe sur Ω si et seulement si son gradient généralisé (au sens de Clarke) est monotone. Poliquin [15] a montré qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semi-continue inférieurement est convexe si et seulement si son sous-différentiel proximal $\partial_p f$ est monotone. Correa, Jofre et Thibault [5] ont généralisé par une méthode complètement différente le résultat de Poliquin au cas où f est définie sur un espace de Banach quelconque et ont considéré un sous-différentiel quelconque au sens de Thibault [23] et Thibault et Zagrodny [24]. Tous les résultats ci-dessus sont relatifs aux fonctions convexes.

Plusieurs classes de fonctions non convexes et non différentiables ont été aussi étudiées. Spingarn [21] a montré que si X est de dimension finie et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne, alors f est sous- $\mathcal{C}^1$ si et seulement si son gradient généralisé (au sens de Clarke) $\partial_c f$ est sous-monotone. Rockafellar [20] a montré qu'une fonction localement lipschitzienne $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est sous- $\mathcal{C}^2$ si et seulement si $\partial_c f$ est hypomonotone. Nous renvoyons également le lecteur à Janin [12], pour beaucoup d'autres

Reçu le 29 juin 1995 et, sous forme définitive, le 14 décembre 1995.

Ce travail a été effectué dans le cadre de l'Action Intégrée n° 95849 entre l'Université de Montpellier II et les Universités Cadi-Ayyad (Marrakech) et Mohammed V (Rabat).

résultats concernant les fonctions sous- $\mathcal{C}^1$ et sous- $\mathcal{C}^2$ (appelées respectivement fonctions *P.C.1* et *P.C.2* dans [12]). Récemment Ellaia et Hassouni [10] ont montré qu'une fonction localement lipschitzienne $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est quasi-convexe si et seulement si $\partial_c f$ est quasi-monotone. Ce résultat a été étendu depuis peu par Dinh The Luc [6] et Aussel, Corvellec et Lassonde [1] aux fonctions semi-continues inférieurement définies sur des espaces de Banach. L'idée principale dans ces deux articles est d'utiliser, suite au travail de Correa, Jofre et Thibault [5] (pour les fonctions convexes), le théorème de la valeur moyenne de Zagrodny [25].

Dans ce papier nous caractérisons les fonctions s'écrivant comme différence de deux fonctions convexes (fonctions D.C.) définies et localement lipschitziennes sur un espace de Banach séparable X (ou plus généralement sur un espace de Banach X qui peut être renormé par une norme Gâteaux-différentiable ou un espace d'Asplund).

Le plan que nous adoptons est le suivant.

Tout d'abord nous rappelons quelques résultats sur les dérivées directionnelles généralisées, les gradients généralisés au sens de Clarke et les multi-applications cycliquement monotones maximales.

Dans la troisième section nous montrons que toute fonction continue qui est D.C. admet au moins une décomposition privilégiée au sens où les deux fonctions convexes apparaissant dans la différence sont continues. Ensuite nous rappelons quelques résultats de Christensen [2] sur les ensembles Hâar-nuls dans un espace de Banach séparable X qui ont permis à Thibault [22], d'étendre le théorème de Clarke sur la représentation des gradients généralisés de fonctions localement lipschitziennes sur $\mathbb{R}^n$ aux fonctions localement lipschitziennes sur des espaces de Banach séparables. Nous utilisons ces résultats et d'autres pour montrer qu'une fonction f définie et localement lipschitzienne sur un ouvert convexe Ω d'un espace de Banach séparable X est D.C. si et seulement s'il existe deux multi-applications cycliquement monotones maximales M_1 et M_2 telles que pour tout $x \in \Omega$

$$\partial_c f(x) \subset M_1(x) - M_2(x).$$

Dans la quatrième section nous établissons une caractérisation similaire à la précédente pour les espace d'Asplund et les espaces qui peuvent être renormés par une norme Gâteaux-différentiable (sauf à l'origine) quand on se restreint à la classe des fonctions localement lipschitziennes qui sont régulières. Pour cela nous rappelons les résultats cruciaux de Preiss [17] sur le gradient généralisé des fonctions localement lipschitziennes définies sur les espaces d'Asplund et les espaces qui peuvent être renormés par une norme Gâteaux-différentiable (sauf à l'origine).

Nous terminons ce papier en montrant que dans le cas où $X = \mathbb{R}^n$ notre caractérisation est équivalente à celle donnée par Ellaia [9] pour les espaces de dimension finie.

1. Préliminaires. Nous allons rappeler quelques résultats sur les dérivées directionnelles généralisées et les gradients généralisés au sens de Clarke.

Avant cela rappelons que si X est un espace de Banach et si $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe avec $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ alors le sous-différentiel $\partial f(\bar{x})$, au sens de l'analyse convexe, de f en $\bar{x}$ est le sous-ensemble de X^* défini par

$$\partial f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, x - \bar{x} \rangle + f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in X\}.$$

2.1 Définitions.

- 1) Soient X un espace de Banach, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne et $\bar{x}$ un élément de X . La dérivée directionnelle généralisée de f au point $\bar{x}$, dans la direction $v \in X$, est donnée par

$$f^0(\bar{x}, v) := \limsup_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

- 2) On appelle gradient généralisé de f (au sens de Clarke) au point $\bar{x} \in X$ et on le note $\partial_c f(\bar{x})$ le sous-ensemble

$$\partial_c f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* : f^0(x, v) \geq \langle x^*, v \rangle, \forall v \in X\}.$$

Rappelons que si f est convexe, alors $\partial_c f(\bar{x}) = \partial f(\bar{x})$.

2.2 Définition. Soient X un espace de Banach et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne. On dit que f est régulière en $\bar{x}$, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i) pour tout $v \in X$, la dérivée directionnelle usuelle

$$f'(\bar{x}, v) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t}$$

existe;

- ii) pour tout $v \in X$, $f'(\bar{x}, v) = f^0(\bar{x}, v)$.

Notons que toute fonction convexe, continue au voisinage de $\bar{x}$ est régulière en $\bar{x}$ (voir [3, proposition 2.3.6]). Rappelons aussi que pour deux fonctions localement lipschitziennes f_1 et f_2 on a $\partial_c(f_1 + f_2) \subset \partial_c f_1 + \partial_c f_2$ et si de plus f_1 et f_2 sont régulières on a $\partial_c(f_1 + f_2) = \partial_c f_1 + \partial_c f_2$ (voir à ce propos [3, corollaire 3]).

Soient X^* le dual topologique de X et $M : X \longrightarrow X^*$ une multi-application de X dans X^* . Le graphe de M est l'ensemble

$$GrM := \{(x, x^*) \in X \times X^* : x^* \in M(x)\}.$$

Parfois (pour des raisons de commodité d'écriture) nous identifierons M avec son graphe.

On dit que la multi-application M est monotone si pour tous $(x_1, x_1^*), (x_2, x_2^*) \in GrM$ on a

$$\langle x_2^* - x_1^*, x_2 - x_1 \rangle \geq 0.$$

On dit que M est une multi-application cycliquement monotone (en abrégé m.a.c.m.) si pour tout $n > 0$ et toute famille finie de couples $(x_i, x_i^*) \in GrM, i = 0, \dots, n$, on a

$$\langle x_n^*, x_{n-1} - x_n \rangle + \dots + \langle x_1^*, x_0 - x_1 \rangle + \langle x_0^*, x_n - x_0 \rangle \leq 0.$$

On dit que M est une multi-application cycliquement monotone maximale (en abrégé m.a.c.m.m.) si M est cycliquement monotone et son graphe n'est pas strictement

contenu dans le graphe d'une multi-application cycliquement monotone c'est-à-dire si M_1 est une m.a.c.m. et $M \subset M_1$, alors $M = M_1$.

Nous rappelons aussi qu'une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite D.C. (différence de deux fonctions convexes) sur un ensemble convexe $\Omega \subset X$ s'il existe deux fonctions convexes $g, h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telles que pour tout $x \in \Omega$ on ait

$$f(x) = g(x) - h(x).$$

Ici et dans toute la suite nous adoptons la convention $+\infty - \infty = +\infty$. Le couple (g, h) sera appelé indifféremment une décomposition D.C. de f sur Ω . Quand $\Omega = X$, on dira simplement que f est D.C.

Le domaine effectif d'une fonction φ est l'ensemble

$$\text{dom}\varphi := \{x \in X : \varphi(x) < +\infty\}.$$

3. Caractérisation des fonctions D.C. Nous commençons par montrer que toute fonctions D.C. continue admet une décomposition continue.

3.1 Lemme. *Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert convexe de X avec $\bar{x} \in \Omega$ et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction D.C. finie et continue sur Ω . Si (g, h) est une décomposition D.C. de f sur Ω , alors $(\bar{g}, \bar{h})$ est aussi une décomposition D.C. de f sur Ω .*

Ici $\bar{\varphi}$ désigne la régularisée s.c.i. de la fonction φ .

Preuve. Pour tout $x \in \Omega$ on a

$$\liminf_{y \rightarrow x} (f(y) + h(y)) = \liminf_{y \rightarrow x} g(y)$$

et par suite (puisque $f(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$ par continuité de f en x) on obtient

$$f(x) + \bar{h}(x) = \bar{g}(x)$$

ce qui achève la preuve. $\square$

3.2 Proposition. *Toute fonction D.C. finie et continue sur un ouvert convexe Ω d'un espace de Banach X admet une décomposition D.C. continue sur Ω . Plus précisément si (g, h) est une décomposition D.C. de f sur Ω avec g et h semicontinues inférieurement (s.c.i.) et propres sur Ω , alors g et h sont continues sur Ω .*

Preuve. Fixons un point $x \in \Omega$ quelconque. Comme f est continue en x , on a

$$x \in \text{int}(\text{dom}f) = \text{int}(\text{dom}g \cap \text{dom}h) \subset [\text{int}(\text{dom}g)] \cap \text{dom}h.$$

La fonction g étant convexe s.c.i. propre sur l'ouvert Ω et $x \in \Omega \cap \text{int}(\text{dom}g)$ donc g est continue en x . Comme $h(y) = g(y) - f(y)$ pour tout $y \in \Omega$, il découle de ce qui précède que h est aussi continue en x et donc la preuve de la proposition est terminée. $\square$

Par la suite nous aurons besoin de la notion de sous-ensembles Hâar-nuls introduite et étudiée par Christensen [2].

3.3 Définition [2]. Soit H un sous-ensemble universellement mesurable de X . On dit que H est Hâar-nul dans X s'il existe une mesure de probabilité μ sur la tribu borélienne de X telle que

$$\chi_H * \mu = 0$$

c'est-à-dire pour tout $y \in X$

$$\int \chi_H(x - y)(\mu(dx)) = 0$$

où $\chi_H * \mu$ désigne le produit de convolution de μ et de χ_H , la fonction caractéristique de H , définie sur X par $\chi_H(x) = 1$ si $x \in H$ et $\chi_H(x) = 0$ si $x \notin H$.

3.4 Remarques.

- 1) Si $X = \mathbb{R}^n$, alors $H \subset X$ est Hâar-nul si et seulement si H est Lebesgue-négligeable.
- 2) Si H est Hâar-nul dans un espace de Banach séparable X , alors $X \setminus H$, le complémentaire de H dans X , est dense dans X (voir [22]).

L'un des nombreux résultats importants sur la théorie des ensembles Hâar-nuls est le théorème suivant de Christensen sur la dérivabilité des fonctions localement lipschitziennes.

3.5 Théorème [2]. Soient X un espace de Banach séparable et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne. Alors f est Gâteaux-différentiable en tout point d'une partie D de X dont le complémentaire est Hâar-nul dans X .

Ce théorème a permis à Thibault d'étendre le résultat de Clarke pour les fonctions localement lipschitziennes sur $\mathbb{R}^n$ aux fonctions localement lipschitziennes sur des espaces de Banach séparables.

3.6 Proposition [22]. Soient X un espace de Banach séparable et Ω un ouvert non vide de X . Soit $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne sur Ω et soit P une partie de Ω sur laquelle g est Gâteaux-différentiable et dont le complémentaire dans Ω est Hâar-nul dans X . Alors pour tout $x \in \Omega$ on a

$$\partial_c g(x) = \bar{co}\{\lim \nabla g(x_n), x_n \longrightarrow x, x_n \in P\}$$

où $\bar{co}A$ désigne l'enveloppe convexe *-faiblement fermée de A dans X^* .

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant de Thibault-Zagrodny [24]. Rappelons auparavant la définition de fonctions convexement sous-différentiablement similaires introduite par Thibault-Zagrodny dans [24].

3.7 Définition [24]. Soient Ω un ouvert convexe d'un espace de Banach X et $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions finies en un point de Ω . On dit que f est convexement sous-différentiablement similaire à g sur Ω s'il existe une suite de nombres réels positifs (ε_n) avec $\varepsilon_n \downarrow 0$ et trois suites de fonctions $(f_n), (g_n)$ et (h_n) de Ω dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que

- i) $f_n + h_n$ et $g_n + h_n$ sont semicontinues inférieurement sur Ω ,

- ii) $g_n + h_n$ est convexe sur Ω et h_n est finie sur $\Omega \cap (\text{dom} f_n \cup \text{dom} g_n)$,
- iii) (f_n) et (g_n) convergent simplement vers f et g respectivement,
- iv) $\partial_c(f_n + h_n)(x) \subset \partial(g_n + h_n)(x) + \varepsilon_n \mathbb{B}$ pour tout $x \in X$.

3.8 Théorème [24]. Soient X un espace faiblement Asplund et Ω un ouvert convexe de X et soient f et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions D.C. sur Ω . Supposons que f soit continue en un point de Ω et que

$$\text{dom} \partial_c f \subset \text{dom} \partial_c g \quad \text{et} \quad \partial_c f(x) \subset \partial_c g(x)$$

pour tout x dans un sous ensemble G_δ -dense D de Ω . Alors f est convexement sous-différentiablement similaire à g sur Ω et il existe un nombre réel α tel que

$$f(x) = g(x) + \alpha$$

pour tout $x \in \Omega$.

3.9 Remarque. Le théorème reste vrai si l'on remplace ∂_c par un pré-sous-différentiel quelconque au sens de Thibault [23] et Thibault et Zagrodny [24].

Pour la notion de sous-ensemble G_δ -dense on pourra consulter [14] par exemple.

Ces résultats vont nous permettre de caractériser dans un espace de Banach séparable, à l'aide de la notion de monotonie cyclique, les fonctions localement lipschitziennes qui sont D.C.

3.10 Théorème. Soient Ω un ouvert convexe d'un espace de Banach séparable X et f une fonction à valeurs réelles définie et localement lipschitzienne sur Ω . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) f est D.C. sur Ω ;
- ii) il existe deux m.a.c.m.m. M_1 et M_2 telles que pour tout $x \in \Omega$

$$\partial_c f(x) \subset M_1(x) - M_2(x).$$

Preuve. i) $\implies$ ii) Comme f est D.C. et continue sur Ω , il existe (d'après la proposition (3.2)) deux fonctions convexes g et h définies et continues sur Ω telles que pour tout $x \in \Omega$

$$f(x) = g(x) - h(x).$$

Considérons les fonctions convexes s.c.i. $\bar{g}$ et $\bar{h}$ définies par

$$\bar{g}(x) = \liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} g(y) \quad \text{et} \quad \bar{h}(x) = \liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} h(y) \quad \text{pour } x \in \text{adh} \Omega$$

et

$$\bar{g}(x) = \bar{h}(x) = +\infty \quad \text{pour } x \notin \text{adh} \Omega.$$

Alors pour $x \in \Omega$ on a

$$\partial_c f(x) = \partial_c(\bar{g} - \bar{h})(x) \subset \partial \bar{g}(x) - \partial \bar{h}(x)$$

(voir [3, proposition 2.3.3]). Comme les multi-applications $M_1 = \partial \bar{g}$ et $M_2 = \partial \bar{h}$ sont des m.a.c.m.m. (voir à ce propos [13]), la preuve de i) $\implies$ ii) est terminée.

ii) $\implies$ i) Supposons $\partial_c f(x) \subset M_1(x) - M_2(x)$ pour tout $x \in \Omega$, avec M_1 et M_2 deux m.a.c.m.m. D'après [19], il existe deux fonctions convexes, s.c.i. et propres g et h telles que $M_1 = \partial g$ et $M_2 = \partial h$ et donc pour tout $x \in \Omega$ on a

$$\partial_c f(x) \subset \partial g(x) - \partial h(x). \quad (3.10.1)$$

Cette dernière inclusion implique que

$$\Omega \cap \text{dom} \partial_c f \subset \text{dom}(\partial g - \partial h) = \text{dom} \partial g \cap \text{dom} \partial h.$$

Comme f est localement lipschitzienne sur Ω on a

$$\Omega \cap \text{dom} \partial_c f = \Omega$$

et donc $\Omega \subset \partial g$ et $\Omega \subset \partial h$ ce qui assure que g et h sont continues sur Ω . Les fonctions f , g et h sont alors localement lipschitziennes sur Ω et donc d'après le théorème (3.5) il existe un ensemble Hâar-nul H tel que f, g et h sont Gâteaux-différentiables sur $\Omega \setminus H$. Donc pour tout $x \in \Omega \setminus H$, d'après la relation (3.10.1) et d'après l'égalité $\partial \varphi(u) = \{ \nabla \varphi(u) \}$ pour toute fonction convexe φ Gâteaux-différentiable en u , on a

$$\nabla f(x) = \nabla g(x) - \nabla h(x),$$

autrement dit, pour tout $x \in \Omega \setminus H$: $\nabla(f + h)(x) = \nabla g(x)$.

On en déduit, pour tout $x \in \Omega$, l'égalité

$$\begin{aligned} \bar{co}\{ \lim \nabla g(x_n) : x_n \longrightarrow x, x_n \in \Omega \setminus H \} \\ = \bar{co}\{ \lim \nabla(f + h)(x_n) : x_n \longrightarrow x, x_n \in \Omega \setminus H \} \end{aligned}$$

ce qui exprime, d'après la proposition (3.6), l'égalité des gradients généralisés au sens de Clarke : $\partial_c(f + h) = \partial g$. Ainsi d'après le théorème (3.8) $f + h = g + Cte$ sur Ω ce qui achève la preuve. $\square$

4. Cas où X est un espace d'Asplund ou peut être renormé par une norme Gâteaux-différentiable (sauf à l'origine). Le théorème précédent caractérise toutes les fonctions localement lipschitziennes qui sont D.C. sur un espace de Banach séparable X . Nous allons voir que l'on peut aussi obtenir une caractérisation similaire pour les espaces d'Asplund (respectivement les espaces qui peuvent être renormés par une norme Gâteaux-différentiable sauf à l'origine) quand l'on se restreint à la classe des fonctions localement lipschitziennes qui sont régulières au sens de Clarke.

Rappelons qu'un espace de Banach X est un espace d'Asplund (faiblement Asplund) si toute fonction convexe continue d'un sous-ensemble ouvert convexe Ω de X dans $\mathbb{R}$ est Fréchet-différentiable (Gâteaux-différentiable) en tout point d'un sous-ensemble G_δ -dense de Ω (voir à ce propos R. R. Phelps [14]). Rappelons aussi que l'intersection de deux sous-ensembles G_δ -denses est un sous-ensemble G_δ -dense, que tout espace de Banach séparable est faiblement Asplund et que tout espace de Banach réflexif est un espace d'Asplund (et donc faiblement Asplund).

Nous déduisons du travail de Preiss [17] le résultat important suivant que nous utiliserons dans la suite.

4.1 Théorème [17]. Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert convexe de X et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne sur Ω . Supposons que X soit d'Asplund (resp. puisse être renormé par une norme Gâteaux-différentiable sauf à l'origine). Alors pour tout $x \in \Omega$,

$$\partial_c f(x) = \bigcap_{s>0} \bar{\text{co}}\{ \nabla f(y) : y \in \mathbb{B}(x, s) \cap \text{dom} \nabla f \}$$

$$(\text{resp. } \partial_c f(x) = \bigcap_{s>0} \{ \nabla f(y) : y \in \mathbb{B}(x, s) \cap \text{dom} \nabla f \}).$$

Ici $\mathbb{B}(x, s)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon s .

Rappelons que, d'après Ekeland-Lebourg [7], tout espace de Banach qui peut être renormé par une norme Fréchet-différentiable (sauf à l'origine) est un espace d'Asplund.

Sous l'hypothèse supplémentaire « f est régulière» (voir la définition 2.1) nous allons montrer que le théorème 3.10 reste vrai dans le cas où X est un espace d'Asplund ou peut être renormé par une norme Gâteaux-différentiable (sauf à l'origine).

4.2 Théorème. Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert convexe de X et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne et régulière. Supposons que X est d'Asplund ou peut être renormé par une norme Gâteaux-différentiable (sauf à l'origine). Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) f est D.C. sur Ω ;
- ii) il existe deux m.a.c.m.m. M_1 et M_2 telles que $\partial_c f(x) \subset M_1(x) - M_2(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

Preuve. i) $\implies$ ii) La preuve est la même que celle de l'implication correspondante du théorème 3.10.

ii) $\implies$ i) Comme dans le théorème 3.10, il existe deux fonctions convexes continues g et h telles que pour tout $y \in \Omega$ on ait

$$\partial_c f(y) \subset \partial g(y) - \partial h(y).$$

Pour tout $x \in \text{dom} \nabla h$ on a

$$\partial_c f(x) \subset \partial g(x) - \nabla h(x)$$

ce qui est équivalent à

$$\partial_c f(x) + \nabla h(x) \subset \partial g(x)$$

et donc pour tout $x \in \text{dom} h$ on a

$$\partial_c (f + h)(x) \subset \partial g(x). \quad (4.2.1)$$

Montrons maintenant que

$$\text{dom} \nabla (f + h) \subset \text{dom} \nabla h. \quad (4.2.2)$$

Comme f est régulière et que h est convexe continue (donc régulière), $f + h$ est régulière et on a $\partial_c(f + h) = \partial_c f + \partial h$. Par suite si $x \in \text{dom} \nabla(f + h)$ on a

$$\nabla(f + h)(x) = \partial_c f(x) + \partial h(x)$$

et donc $\partial_c f(x)$ et $\partial h(x)$ sont réduits à des singletons et par conséquent f et h sont Gâteaux-différentiables en x (voir [3, proposition 2.2.4]). On a donc bien $\text{dom} \nabla(f + h) \subset \text{dom} \nabla h$.

Nous déduisons des inclusions (4.2.1) et (4.2.2) que pour tout $y \in \text{dom}(f + h)$ on a

$$\nabla(f + h)(y) \subset \partial g(y).$$

On en déduit l'inclusion

$$\bigcap_{s>0} \bar{co}\{ \nabla(f + h)(y) : y \in \mathbb{B}(x, s) \cap \text{dom} \nabla(f + h) \} \subset \bigcap_{s>0} \bar{co} \partial g(\mathbb{B}(x, s))$$

ce qui exprime que

$$\partial_c(f + h)(x) \subset \bigcap_{s>0} \bar{co} \partial g(\mathbb{B}(x, s)). \quad (4.2.3)$$

Il est connu que pour une fonction convexe continue le sous différentiel est semi-continu supérieurement (s.c.s.) c'est-à-dire pour tout V voisinage de 0 (pour la topologie *-faible) il existe $s_V > 0$ tel que

$$\partial g(\mathbb{B}(x, s)) \subset \partial g(x) + V$$

(on prend V convexe et fermé) et par conséquent si $\mathcal{V}$ désigne l'ensemble des voisinages *-faibles de zéro qui sont convexes et *-faiblement fermés on a

$$\bigcap_{s>0} \bar{co} \partial g(\mathbb{B}(x, s)) \subset \bigcap_{s_V>0} \bar{co} \partial g(\mathbb{B}(x, s_V)) \subset \bigcap_{V \in \mathcal{V}} \bar{co}(\partial g(x) + V). \quad (4.2.4)$$

Comme $\partial g(x)$ est faiblement compact et convexe et V est convexe fermé on a

$$\bar{co}(\partial g(x) + V) = \partial g(x) + V. \quad (4.2.5)$$

On déduit de (4.2.3), (4.2.4) et (4.2.5) que pour tout $x \in \Omega$ on a

$$\partial_c(f + h)(x) \subset \bigcap_{V \in \mathcal{V}} (\partial g(x) + V) = \partial g(x)$$

et donc $\partial_c(f + h)(x) \subset \partial g(x)$ pour tout $x \in \Omega$ ce qui assure d'après le théorème (3.8) que $f + h = g + Cte$. Ainsi la preuve est terminée. $\square$

4.3 Remarque. L'implication (i) $\implies$ ii) reste vraie si X est un espace de Banach quelconque.

Nous allons montrer que notre caractérisation permet de retrouver celle donnée par Ellaia dans [9] pour les espaces de dimension finie. Commençons par rappeler la définition suivante.

4.4 Définition. On dit qu'une multi-application $\Gamma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est à variation finie en un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, si l'on peut trouver une m.a.c.m.m. $M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i) $\bar{x} \in \text{intdom} M$;

ii)

$$\limsup_{\substack{x_i \rightarrow \bar{x}, i=1,2 \\ y_i \in \Gamma(x_i), z_i \in M(x_i) \\ \langle x_1 - x_2, z_1 - z_2 \rangle \neq 0}} \frac{\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle}{\langle x_1 - x_2, z_1 - z_2 \rangle} < +\infty.$$

Si M_1 et M_2 sont à variations finies en $\bar{x}$, alors $\alpha M_1 + \beta M_2$ est à variation finie en $\bar{x}$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (voir Ellaia [9]).

Ellaia dans [9] a montré qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, localement lipschitzienne est D.C. si et seulement si son gradient généralisé au sens de Clarke est à variation finie. Nous allons montrer que ce résultat peut aussi être déduit du théorème 3.10.

4.5 Proposition. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

i) f est D.C.

ii) $\partial_c f$ est à variation finie en tout point de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. i) $\implies$ ii) Fixons un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ quelconque.

Sont M_1 et M_2 deux m.a.c.m.m. et Ω un ouvert convexe contenant $\bar{x}$ tels que $\partial_c f(x) \subset M_1(x) - M_2(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Il existe deux fonctions convexes s.c.i. g et h telles que $M_1 = \partial g$ et $M_2 = \partial h$. Les multi-applications M_1 et M_2 sont à variations finies ainsi que $M_1 - M_2$. Comme $\partial_c f(x) \subset M_1(x) - M_2(x)$ pour tout $x \in \Omega$, la multi-application $\partial_c f$ l'est aussi d'après la définition (4.4).

ii) $\implies$ i) Si $\partial_c f$ est à variation finie au point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage ouvert convexe Ω de $\bar{x}$, une constante $k \geq 0$ et une fonction convexe h définie dans Ω tels que pour tous $x_1, x_2 \in \Omega, y_1 \in \partial_c f(x_1), y_2 \in \partial_c f(x_2), z_1 \in \partial h(x_1)$ et $z_2 \in \partial h(x_2)$ avec $\langle x_1 - x_2, z_1 - z_2 \rangle \neq 0$ on a

$$\frac{|\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle|}{\langle x_1 - x_2, z_1 - z_2 \rangle} \leq k \quad (4.6.1)$$

La fonction h étant convexe sur Ω , ∂h est monotone sur Ω et par suite $\langle x_1 - x_2, z_1 - z_2 \rangle \geq 0$. La relation (4.6.1) est alors équivalente à :

$$-k \langle x_1 - x_2, z_1 - z_2 \rangle \leq \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \leq k \langle x_1 - x_2, z_1 - z_2 \rangle$$

ce qui implique que pour tous $x_1, x_2 \in \Omega, y_1 \in \partial_c f(x_1), y_2 \in \partial_c f(x_2), z_1 \in \partial h(x_1)$ et $z_2 \in \partial h(x_2)$ avec $\langle x_1 - x_2, z_1 - z_2 \rangle \neq 0$ on a

$$\langle x_1 - x_2, y_1 + k z_1 - (y_2 + k z_2) \rangle \geq 0$$

c'est-à-dire la multi-application $\partial_c f + k \partial h$ est monotone sur Ω . Comme $\partial_c(f + kh) \subset \partial_c f + k \partial h$, la multi-application $\partial_c(f + kh)$ est monotone sur Ω et par conséquent $f + kh$ est convexe sur Ω (voir Clarke [3] et Rockafellar [20]) et pour tout $x \in \Omega$

$$\partial_c f(x) = \partial_c(f + kh - kh)(x) \subset \partial(f + kh)(x) - \partial(kh)(x). \quad (4.6.2)$$

Soient les fonctions φ et $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ définies par

$$\varphi(x) := \liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} (f + kh)(y) \text{ et } \psi(x) := \liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} (kh)(y) \text{ pour tout } x \in \text{adh}\Omega$$

et

$$\varphi(x) = \psi(x) = +\infty \text{ si } x \notin \text{adh}\Omega.$$

Ces fonctions φ et ψ sont convexes s.c.i. propres et il découle de (4.6.2) que

$$\partial_c f(x) \subset \partial\varphi(x) - \partial\psi(x) \text{ pour tout } x \in \Omega$$

et $\partial\varphi$ et $\partial\psi$ sont deux multi-applications maximales monotones.

Par conséquent, d'après le théorème (4.2), f est D.C. sur Ω . Ainsi f est D.C. sur un voisinage de chaque point de $\mathbb{R}^n$, donc d'après un résultat de Hartman [11] f est D.C. sur $\mathbb{R}^n$. $\square$

Remerciements. Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance et mes vifs remerciements au Professeur L. Thibault pour ses conseils, ses suggestions, ses corrections et l'importance qu'il a donnée à ce travail.

English extended abstract. A function that can be written as a difference of two convex functions is called a D.C. function. We begin by showing that every D.C. function admits a continuous decomposition.

Proposition. *Every finite continuous D.C. function defined on a convex open set Ω of a Banach space X admits a continuous D.C. decomposition on Ω .*

The following theorem characterizes, in the context of separable Banach spaces, the locally Lipschitz functions that are D.C. functions. It uses the notion of cyclic monotonicity.

Theorem. *Let Ω be convex open subset of a separable Banach space X and f be a real-valued locally Lipschitz function on Ω . The following statements are equivalent:*

- i) f is a D.C. function on Ω .
- ii) *there exists two cyclically monotonic maximal multiapplications M_1 and M_2 such that, for every $x \in \Omega$,*

$$\partial_c f(x) \subset M_1(x) - M_2(x).$$

The preceding theorem characterized the locally Lipschitz functions that are D.C. on a convex open set Ω of a separable Banach space X . We now obtain a similar characterization for Asplund spaces and also for spaces that can be renormed by Gâteaux-differentiable norm (except at the origin) when we restrict ourselves to the class of locally Lipschitz functions that are regular in the sense of Clarke (see definition 2.1).

Recall that, according to Ekeland-Lebourg [7], every Banach space which can be renormed by a Fréchet-differentiable (except at the origin) norm, is a Asplund space.

Theorem. Let X be a Banach space, Ω a convex open subset of X , and $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a regular locally Lipschitz function. Assume, further, that X is a Asplund space or can be renormed by Gâteaux-differentiable norm (except at the origin). The following are equivalent:

- i) f is a D.C. function.
- ii) there exists two cyclically monotonic maximal multiapplications M_1 and M_2 such that $\partial_c f(x) \subset M_1(x) - M_2(x)$, for every $x \in \Omega$.

Remark. The implication i) $\Rightarrow$ ii) remains true when X is an arbitrary Banach space.

Our characterization implies the one given by Ellaia, in [8], for finite-dimensional spaces.

Proposition. Let $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ be a locally Lipschitz function. Then, the following statements are equivalent:

- i) f is a D.C. function;
- ii) $\partial_c f$ is of bounded variation at every point of $\mathbb{R}^n$.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. Aussel, J. N. Corvellec et M. Lassonde, *Subdifferential characterization of quasiconvexity and convexity*, Journal of Convex Analysis (à paraître).
2. J. P. R. Christensen, *On set of Haar measure zero in abelian groups*, Israel J. Math. **13** (1972), 428–443.
3. F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, New York, 1983.
4. ———, *Generalized gradients of Lipschitz functionals*, Adv. Math. **40** (1986), 52–66.
5. R. Correa, A. Jofre et L. Thibault, *Characterization of lower semi-continuous convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 61–72.
6. Dinh The Luc, *Characterisation of quasiconvex functions*, Bull. Austral. Math. Soc. **48** (1993), 393–406.
7. I. Ekeland et G. Lebourg, *Generic Fréchet differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **224** (1976), 19–216.
8. A. Elhilali Alaoui, *Fonctions D.C. à valeurs dans un espace de Banach ordonné - caractérisation des fonctions D.C.*, Thèse de 3^e cycle, Tetouan, Université Sidi Mohammed Ben Abdellah, 1989.
9. R. Ellaia, *Contribution à l'analyse et l'optimisation de différence de fonctions convexes*, Thèse de 3^e cycle, Toulouse, Université Paul Sabatier, 1984.
10. R. Ellaia et A. Hassouni, *Characterization of nonsmooth functions through their generalized gradients*, Optimization **22** (1991), 401–416.
11. P. Hartman, *On functions representable as a difference of convex functions*, Pacific J. Math. **9** (1959), 829–850.
12. R. Janin, *Sur la dualité et la sensibilité dans les problèmes de programme mathématique*, Thèse d'état, Paris, Université Paris VI, 1974.
13. J. J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Cours donné au Collège de France, 1966.
14. R. R. Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Lecture Notes in Math., vol. 1364, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
15. R. A. Poliquin, *Integration of subdifferentials of nonconvex functions*, Nonlinear Anal. **17** (1991), 385–398.
16. ———, *Proto-differentiation of subgradient set-valued mappings*, Canad. J. Math. **42** (1990), 520–532.

17. D. Preiss, *Differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces*, J. Funct. Anal. **91** (1990), 312–345.
18. R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, University Press, Princeton, 1970.
19. ———, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math. **33** (1966), 497–510.
20. ———, *Favorable classes of Lipschitz-continuous functions in subgradient optimization*, Progress in nondifferentiable optimization (E. Nurminski, ed.), IIASA Collaborative Proc. Ser. CP-82, 8, Internat. Inst. Appl. Systems, Laxenberg, 1982, pp. 125–143.
21. J. E. Spingarn, *Submonotone subdifferentials of Lipschitz functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **264** (1981), 77–89.
22. L. Thibault, *On generalized differentials and subdifferential of Lipschitz vector valued functions*, Nonlinear Anal. **6** (1982), 1037–1053.
23. ———, *A note on the Zagrodny mean value theorem* (to appear).
24. L. Thibault et D. Zagrodny, *Integration of subdifferentials of lower semicontinuous functions on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **189** (1995), 33–58.
25. D. Zagrodny, *Approximate mean value theorem for upper subderivatives*, Nonlinear Anal. **12** (1988), 1413–1428.

A. ELHILALI ALAOUI
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
UNIVERSITÉ CADI-AYYAD
B.P. 618
MARRAKECH, MAROC