

RELATIONS MATRICIELLES POUR HYPERBINOMIALES

PIERRE THÉORÊT

RÉSUMÉ. Dans cet article, on déduit de façon uniforme des identités de la forme $H(n, k) = \sum_j F(n, j)G(j, k)$ avec F , G et H des doubles suites triangulaires inférieures définies par des équations linéaires aux différences partielles. Les solutions de la classe d'équations considérée acceptent, comme cas particulier, les coefficients binomiaux, les nombres de Stirling, et leurs q -analogues.

ABSTRACT. We deduced identities as $H(n, k) = \sum_j F(n, j)G(j, k)$ with F , G and H defined by partial linear difference equations. Solutions of the class of equations considered include, as particular cases, binomial coefficients, Stirling numbers, and their q -analogues.

1. Introduction. On dit que H est *hyperbinomiale* et on écrit $H = \mathcal{HB}(p(n, k); q(n, k))$ si elle satisfait l'équation de récurrence aux valeurs initiales

$$H(n, k) = p(n, k)H(n-1, k) + q(n, k)H(n-1, k-1) \quad (1)$$

$$H(0, k) = \delta_{0k}, \quad (2)$$

où δ_{0k} est le delta de Kronecker.

Par exemple, $H = \mathcal{HB}(1; 1)$ pour $H(n, k) = \binom{n}{k}$; $S = \mathcal{HB}(k; 1)$, $c = \mathcal{HB}(n-1; 1)$ et $s = \mathcal{HB}(1-n; 1)$ pour les nombres de Stirling; $H = \mathcal{HB}(k; n-k+1)$ pour les nombres eulériens; $H = \mathcal{HB}(1-n+sk; s)$ pour les nombres C ; $H = \mathcal{HB}(n+k-1; 1)$ pour les nombres de Lah; $H = \mathcal{HB}(q^k; 1)$ pour les polynômes gaussiens que l'on note par $\binom{n}{k}_q$.

Lorsque les coefficients de la récurrence (1) sont des polynômes du premier degré, on dit que H est une *hyperbinomiale spéciale*. Une étude générale des hyperbinomiales spéciales est proposée comme problème de recherche dans [12] (prob. 89, chap. 6), dans [20] elles sont étudiées du point de vue de leurs fonctions génératrices. Par ailleurs, on retrouve dans la littérature plusieurs classes d'hyperbinomiales comme généralisant les nombres de Stirling [3 à 11, 13, 14, 16] ou les nombres eulériens [2, 15]. Une étude plus approfondie et d'avantage d'exemples peuvent être trouvés dans [19].

Dans cet article, on détermine des conditions générales pour que le produit $F \times G$ de deux hyperbinomiales, $(F \times G)(n, k) := \sum_{j=k}^n F(n, j)G(j, k)$, soit encore une

Reçu le 15 août 1994 et, sous forme définitive, le 27 janvier 1995.

double suite hyperbinomiale. On montre que si $F = \mathcal{HB}(a_n r_k + b_n; a_n s_k)$ et $G = \mathcal{HB}(t_k/s_n - r_{n-1}/s_n; u_k/s_n)$, alors $F \times G = \mathcal{HB}(a_n t_k + b_n; a_n u_k)$. On en déduit les formules de conversion $\sum_k F(n, k) \prod_{j=1}^k (\alpha_j t + \beta_j) = \prod_{j=1}^n (a_j t + b_j)$ où $F = \mathcal{HB}(-a_n \alpha_{k+1} \beta_{k+1} + b_n; a_n \alpha_k)$ et on détermine aussi la récurrence hyperbinomiale de $F^{(-1)}$ la double suite orthogonale à F . On termine la deuxième section par quelques considérations sur les fonctions génératrices d'hyperbinomiales.

Dans la troisième section, on généralise un résultat de Milne [17]. Explicitement, pour $F = \mathcal{HB}(r_k; s_k)$ on montre que pour tout $m \geq 0$

$$\sum_{j \leq m} F^{(-1)}(m, j) F(n + j, m + k) = F_{(-m)}(n, k),$$

où $F_{(-m)} = \mathcal{HB}(r_{k+m}; s_{k+m})$.

Dans la quatrième section, on donne plusieurs exemples. En guise d'illustration, on démontre quelques identités faisant intervenir les q -analogues des nombres de Stirling introduits par Cigler [6]. Pour $H = \mathcal{HB}(a_n t_k + a_n d_n; a_n u_k)$ on donne une expression de $H(n, k)$ en termes de fonctions symétriques.

Table 1. Quelques généralisations des nombres de Stirling

$p(n, k)$	$q(n, k)$	Terme général/Références
$(1 - q^{n-1})/(1 - q)$	1	$s_q[n, k]$, [8,9]
$(p^{n-1} - q^{n-1})/(p - q)$	1	$c_{p,q}[n, k]$, [8,9,11]
$(1 - q^k)/(1 - q)$	1	$S_q[n, k]$, [8,9]
$(p^k - q^k)/(p - q)$	1	$S_{p,q}[n, k]$, [8,9,11]
$k - 1 + q^{n-1}$	1	$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_q$, q -analogue de Cigler [6]
$n - q^k$	1	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_q$, q -analogue de Cigler [6]
$n - 2 + q^k$	1	$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_q^*$, q -analogue de Cigler [6]
$k + 1 - q^{n-1}$	1	$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_q^*$, q -analogue de Cigler [6]
$\alpha - n + 1$	1	$s_{(\alpha)}(n, k)$, Stirling non-centrés, [14]
$k - \alpha$	1	$S_{(\alpha)}(n, k)$, Stirling non-centrés, [14]
$\alpha_k - n + 1$	1	$s(n, k; \bar{\alpha})$, Non-centrés multiparamétrés, [10]
$k - \alpha_{n-1}$	1	$S(n, k; \bar{\alpha})$, Non-centrés multiparamétrés, [10]
$-\alpha_{n-1}$	1	$s_\alpha(n, k)$, [7,9]
α_k	1	$S_\alpha(n, k)$, [7,9]

2. Produits hyperbinomiaux. Étant données les valeurs initiales (2), les hyperbinomiales sont des doubles suites triangulaires inférieures, c'est-à-dire que $H(n, k) = 0$ si $k > n$. En outre, pour $H = \mathcal{HB}(p(n, k); q(n, k))$ on a les valeurs

$$H(n, 0) = \prod_{j=1}^n p(j, 0), \quad H(n, n) = \prod_{j=1}^n q(j, j). \quad (3)$$

On écrit $F \times G$ pour le produit matriciel de deux doubles suites triangulaires

$$(F \times G)(n, k) = \sum_j F(n, j) G(j, k). \quad (4)$$

On dit que I est la double suite identité si $I(n, k) = \delta_{nk}$ et on écrit $F^{(-1)}$ pour l'inverse de F qui, si il existe, satisfait $F \times F^{(-1)} = F^{(-1)} \times F = I$.

Le produit $F \times G$ de deux hyperbinomiales $F = \mathcal{HB}(f(n, k); f'(n, k))$ et $G = \mathcal{HB}(g(n, k); g'(n, k))$ est une double suite triangulaire H avec $H(0, 0) = 1$ qui n'est pas nécessairement hyperbinomiale. Pour $n > 0$:

$$\begin{aligned} H(n, k) &:= \sum_j F(n, j)G(j, k) \\ &= \sum_j (f(n, j)F(n-1, j) + f'(n, j)F(n-1, j-1))G(j, k) \\ &= \sum_j f(n, j)F(n-1, j)G(j, k) \\ &\quad + \sum_j f'(n, j)F(n-1, j-1)g(j, k)G(j-1, k) \\ &\quad + \sum_j f'(n, j)F(n-1, j-1)g'(j, k)G(j-1, k-1) \\ &= \sum_j \{f(n, j-1) + f'(n, j)g(j, k)\}F(n-1, j-1)G(j-1, k) \\ &\quad + \sum_j \{f'(n, j)g'(j, k)\}F(n-1, j-1)G(j-1, k-1), \end{aligned}$$

ainsi, lorsque les fonctions

$$h(n, k, j) = f(n, j-1) + f'(n, j)g(j, k), \quad (5)$$

$$h'(n, k, j) = f'(n, j)g'(j, k), \quad (6)$$

sont indépendantes de j , en ce sens que $h(n, k, j) = h(n, k, 0)$ et $h'(n, k, j) = h'(n, k, 0)$ pour tout j , alors $H := F \times G = \mathcal{HB}(h(n, k, 0); h'(n, k, 0))$.

Dans [18], S. Milne donne l'inverse de suites satisfaisant des récurrences plus générales que celles des hyperbinomiales. Lorsque l'on pose $n_0 = \alpha_0 = \beta_0 = 1$ dans le théorème 1.7 de [18], on retrouve exactement le résultat (10) du théorème qui suit. Dans un autre article, le même auteur énonce un résultat intéressant [17, thm 3.1] que l'on généralise pour les hyperbinomiales dans la section suivante.

Théorème 1. Soit $G = \mathcal{HB}(g(n, k); g'(n, k))$ et $F = \mathcal{HB}(f(n, k); f'(n, k))$ des hyperbinomiales telles que $f'(n, n) \neq 0$ et $g'(n, n) \neq 0$ pour tout $n > 0$. Les fonctions $h(n, k, j)$ et $h'(n, k, j)$ données par (5) et (6) sont indépendantes de j si, et seulement si pour certaines suites

$$f(n, k) = a_n r_k + b_n, \quad f'(n, k) = a_n s_k, \quad (7)$$

$$g(n, k) = \frac{t_k - r_{n-1}}{s_n}, \quad g'(n, k) = u_k / s_n, \quad (8)$$

et alors

$$F \times G = \mathcal{HB}(a_n t_k + b_n; a_n u_k), \quad (9)$$

$$F^{(-1)} = \mathcal{HB}\left(-\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}s_n} - \frac{r_{n-1}}{s_n}; \frac{1}{a_k s_n}\right). \quad (10)$$

Preuve. Pour montrer que les conditions sont nécessaires on remplace (7) et (8) dans (5) et (6) pour obtenir $h(n, k, j) = a_n t_k + b_n$ et $h'(n, k, j) = a_n u_k$ ce qui, avec le calcul précédent, démontre (9).

Réciproquement, si on suppose que $h'(n, k, j)$ est indépendante de j , alors on a $h'(n, k, n) = h'(n, k, 0)$ et $h'(n, k, k) = h'(n, k, 0)$ d'où

$$\begin{aligned} g'(n, k) &= f'(n, 0)g'(0, k)/f'(n, n) := c_n u_k, \\ f'(n, k) &= f'(n, 0)g'(0, k)/g'(k, k) := a_n s_k \end{aligned}$$

avec $c_j s_j = 1$.

Par ailleurs, si $h(n, k, j)$ est aussi une fonction indépendante de j , alors l'équation $h(n, k, k+1) = h(n, k, 0)$ est vérifiée et elle se traduit par

$$f(n, k) + f'(n, k+1)g(k+1, k) = f(n, -1) + f'(n, 0)g(0, k), \quad (11)$$

or, en remarquant que $f'(n, 0) = a_n s_0$, on obtient

$$f(n, k) = f(n, -1) + a_n \{s_0 g(0, k) - s_{k+1} g(k+1, k)\} := b_n + a_n r_k. \quad (12)$$

De la même manière, l'identité $h(n, k, n) = h(n, k, 0)$ se réécrit

$$f(n, n-1) + f'(n, n)g(n, k) = f(n, n-1) + f'(n, 0)g(0, k),$$

et en remplaçant f et f' par leurs valeurs on obtient

$$\begin{aligned} a_n s_n g(n, k) &= f(n, -1) - f(n, n-1) + a_n s_0 g(0, k) \\ &= a_n \{-r_{n-1} + (r_{-1} + s_0 g(0, k))\} \\ &:= a_n \{-r_{n-1} + t_k\}. \end{aligned}$$

Pour démontrer (10) on remarque que $I = \mathcal{H}B(u(n, k); u'(n, k))$ est la double suite identité si, et seulement si $u(n, n-1) = 0$ et $u'(n, n) = 1$. Si on suppose que $F \times G = I$ alors dans (9) on doit avoir $a_n t_{n-1} + b_n = 0$ et $a_n u_n = 1$ ce qui revient à $u_k = 1/a_k$ et $t_k = -b_{k+1}/a_{k+1}$. Une autre preuve de (10) peut être donnée par le corollaire 1. $\square$

L'équation (2.6) de [10] $s(n, k) = \sum_j s(n, j; \bar{\alpha}) s_\alpha(n, k)$ faisant intervenir trois versions¹ des nombres de Stirling de première espèce correspond au produit hyperbinomial $\mathcal{H}B(1-n; 1) = \mathcal{H}B(\alpha_k - n; 1) \times \mathcal{H}B(-\alpha_{n-1}; 1)$. Remarquons que lorsque $H = F \times G$, alors par inversion on a cinq autres identités: $H^{(-1)} = G^{(-1)} \times F^{(-1)}$, $F = H \times G^{(-1)}$, $F^{(-1)} = G \times H^{(-1)}$, $G = F^{(-1)} \times H$ et $G^{(-1)} = H^{(-1)} \times F$. Ainsi, les équations (2.6), (2.7), (2.8), (3.3), (3.4), (3.5) de [10] peuvent être obtenues l'une de l'autre.

À partir de $H = F \times G$ on obtient aussi d'autres identités avec l'opérateur ρ de réflexion. Pour $B = \mathcal{H}B(b(n, k); b'(n, k))$, on pose $(\rho B)(n, k) := B(n, n-k)$ et on peut alors montrer que $\rho B = \mathcal{H}B(b'(n, n-k); b(n, n-k))$. Évidemment $\rho^2 B = B$ et si $\rho B = B$, alors on dit que B est *symétrique*. Par exemple, si $B = \mathcal{H}B(a_n t_k + b_n; a_n u_k)$, alors $(\rho B) = \mathcal{H}B(a_n u_{n-k}; a_n t_{n-k} + b_n)$. Lorsque $H = F \times G$ on a $H(n, k) = \sum_j F(n, j)G(j, k)$ et en plus

$$\begin{aligned} H(n, k) &= \sum_j (\rho F)(n, j)G(n-j, k), \\ H(n, k) &= \sum_j (\rho F)(n, j)(\rho G)(n-j, n-k-j), \\ (\rho H)(n, k) &= \sum_j F(n, j)G(j, n-k), \\ (\rho H)(n, k) &= \sum_j (\rho F)(n, j)G(n-j, n-k), \\ (\rho H)(n, k) &= \sum_j (\rho F)(n, j)(\rho G)(n-j, k-j). \end{aligned}$$

¹Voir la table 1.

Corollaire 1. Soit $F = \mathcal{HB}\left(-a_n \frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1}} + b_n; \frac{a_n}{\alpha_k}\right)$. Alors

$$\sum_k F(n, k) \prod_{j=1}^k (\alpha_j t + \beta_j) = \prod_{j=1}^n (a_j t + b_j). \quad (13)$$

Preuve. Lorsque $G = \mathcal{HB}(\alpha_n t + \beta_n; \alpha_n u_k)$ le théorème donne $F \times G = \mathcal{HB}(a_n t + b_n; a_n u_k)$. Il suffit donc de considérer l'identité $(F \times G)(n, 0) = \sum_k F(n, k) G(k, 0)$ les termes $(F \times G)(n, 0)$ et $G(k, 0)$ pouvant être alors calculés avec (3). $\square$

Le corollaire permet aussi de démontrer la partie (10) du théorème. En effet, l'inverse $F^{(-1)}$ doit satisfaire

$$\sum_k F^{(-1)}(n, k) \prod_{j=1}^k (a_j t + b_j) = \prod_{j=1}^n (\alpha_j t + \beta_j),$$

et alors le corollaire donne $F^{(-1)} = \mathcal{HB}\left(-\alpha_n \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} + \beta_n; \frac{\alpha_n}{a_k}\right)$.

Dans la littérature plusieurs doubles suites sont définies comme cas particulier de l'équation (13). Par exemple, les nombres de Stirling non-centrés [14] sont définis par

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n s_{(\alpha)}(n, k) (t - \alpha)^k &= \prod_{j=1}^n (t - j + 1), \\ \sum_{k=0}^n S_{(\alpha)}(n, k) \prod_{j=1}^k (t - j + 1) &= (t - \alpha)^n, \end{aligned}$$

ils sont généralisés dans [10] par les nombres de Stirling non-centrés multi-paramétrés

$$\sum_{k=0}^n s(n, k; \bar{\alpha}) \prod_{j=1}^k (t - \alpha_{j-1}) = \prod_{j=1}^n (t - j + 1), \quad (14)$$

$$\sum_{k=0}^n S(n, k; \bar{\alpha}) \prod_{j=1}^k (t - j + 1) = \prod_{j=1}^n (t - \alpha_{j-1}). \quad (15)$$

Le corollaire 1 permet d'obtenir directement les récurrences hyperbinomiales satisfaites par ces doubles suites.

Dans le cas particulier $F = \mathcal{HB}(f_n; f'_n)$, l'identité (13) donne ce que l'on appelle dans [19,20] les *polynômes hyperbinomiaux*

$$F_n^t(t) := \sum_k F(n, k) t^k = \prod_{j=1}^n (f_j t + f'_j). \quad (16)$$

En posant $t = 1$ dans (16) on obtient alors les *sommes de ligne*

$$\sum_k F(n, k) = \prod_{j=1}^n (f_j + f'_j). \quad (17)$$

Ces sommes de lignes peuvent aussi être obtenues pour des hyperbinomiales ne satisfaisant pas des récurrences du type de celles données dans le théorème 1.

Théorème 2. Soit $F = \mathcal{HB}(h_n - g_{k+1}f_{n,k+1}; f_{n,k})$. Alors

$$\sum_k F(n, k) \prod_{j=1}^k g_j = \prod_{j=1}^n h_j. \quad (18)$$

Preuve. Soit $G(k) := \prod_{j=1}^k g_j$ et $H(n) := \sum_k F(n, k)G(k)$. Alors $H(0) = 1$ et

$$\begin{aligned} H(n) &= \sum_k \{h_n - g_{k+1}f_{n,k+1}\} F(n-1, k)G(k) \\ &\quad + \sum_k f_{n,k} F(n-1, k-1)g_k G(k-1), \end{aligned} \quad (19)$$

or, en remplaçant k par $k+1$ dans la deuxième somme on obtient après simplification $H(n) = h_n H(n-1)$. $\square$

Par exemple, si $H = \mathcal{HB}(h_n - q_{n,k+1}; q_{n,k})$, alors $\sum_k H(n, k) = \prod_{j=1}^n h_j$. En particulier, pour les nombres eulériens de seconde espèce² $A_2 = \mathcal{HB}(k+1; 2n-k-1)$ on a $h_n = 2n-1$ et alors

$$\sum_k A_2(n, k) = \prod_{j=1}^n (2j-1) = \frac{2n(2n-1) \cdots (n+1)}{2^n} \quad (20)$$

Pour une double suite triangulaire H on écrit $h(x, t) := \sum_n H_n^t(t)x^n$ où $H_n^t(t)$ est la suite de polynômes définie en (16), $h(x, t)$ est aussi la fonction génératrice en t de la suite de séries formelles $h_k^c(x) := \sum_n H(n, k)x^n$.

Lorsque $H = F \times G$, alors

$$h(x, t) = \sum_j f_j^c(x) G_j^t(t).$$

Dans [20] on considère plutôt les fonctions génératrices exponentielles qui sont données sous forme close pour plusieurs classes d'hyperbinomiales spéciales.

3. Inversion. Dans [17, thm 3.3], Milne énonce un théorème intéressant que nous généralisons avec notre théorème 3. La démonstration de ce théorème exige plusieurs lemmes qui nous instruisent sur certaines propriétés des hyperbinomiales.

Pour plus de commodités nous utilisons dans ce qui suit la version de la convention de Iverson utilisée dans [12]. On écrit $[P(n)]$ pour la fonction caractéristique d'une proposition $P(n)$: $[P(n)] = 1$ si la proposition est vraie et $[P(n)] = 0$ si elle est fausse. Avec cette notation $\delta_{n,k} \equiv [n = k]$ et on écrit $B = \mathcal{HB}(b(n, k); b'(n, k))$ si, et seulement si elle satisfait

$$B(n, k) = b(n, k)B(n-1, k) + b'(n, k)B(n-1, k-1) + [n = k = 0] \quad (21)$$

en convenant aussi que $B(-1, k) = 0$.

²Ils dénombrent les permutations d'un multi-ensemble selon le nombre de montées. Voir par exemple [12, p. 256].

Lorsque l'on développe les termes $B(n-1, k)$ et $B(n-1, k-1)$ de (21) on obtient la récurrence du deuxième ordre :

$$\begin{aligned} B(n, k) = & b(n, k)b(n-1, k)B(n-2, k) \\ & + (b(n, k)b'(n-1, k-1) + b(n-1, k-1)b'(n, k))B(n-2, k-1) \\ & + b'(n, k)b'(n-1, k-1)B(n-2, k-2) \\ & + B(n, k) \{[n=1][k=0] + [n=k=1] + [n=k=0]\} \end{aligned}$$

où la dernière ligne, nulle pour $n > 1$, donne les valeurs initiales pour $n \leq 1$.

Par le lemme qui suit on généralise ce type de développement.

Lemme 1. Soit $B = \mathcal{H}B(b(n, k); b'(n, k))$ et

$$B_{r,s}^G = \mathcal{H}B(b(r-n+1, s-k); b'(r-n+1, s-k+1)),$$

c'est-à-dire que pour $m \geq 0$

$$B_{n,k}^G(m+1, j) = b(n-m, k-j)B_{n,k}^G(m, j) + b'(n-m, k-j+1)B_{n,k}^G(m, j-1). \quad (22)$$

Alors pour tout $m \geq 0$

$$B(n, k) = \sum_i B_{n,k}^G(m, i)B(n-m, k-i). \quad (23)$$

Preuve. Soit K^{-1} l'opérateur de différences tel que $K^{-1}B(n, k) = B(n, k-1)$, alors l'équation (23) peut s'écrire

$$B(n, k) = \left(\sum_{j=0}^m B_{n,k}^G(m, j)K^{-j} \right) B(n-m, k) \quad (24)$$

et la récurrence hyperbinomiale de B

$$B(n, k) = (b(n, k) + b'(n, k)K^{-1}) B(n-1, k). \quad (25)$$

Or en itérant (25) on a

$$B(n, k) = \left(\prod_{j=0}^{m-1} [b(n-j+1, k) + b'(n-j+1, k)K^{-1}] \right) B(n-m, k). \quad (26)$$

En comparant (24) et (26) on déduit donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m B_{n,k}^G(m, j)K^{-j} &= \prod_{j=0}^{m-1} (b(n-j+1, k) + b'(n-j+1, k)K^{-1}) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{m-1} B_{n,k}^G(m-1, j)K^{-j} \right) (b(n-m, k) + b'(n-m, k)K^{-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} B_{n,k}^G(m-1, j)b(n-m, k-j)K^{-j} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-1} B_{n,k}^G(m-1, j)b'(n-m, k-j)K^{-j-1} \end{aligned}$$

et on retrouve la récurrence (22) en identifiant de part et d'autre le coefficient de K^{-j} dans la dernière identité.

Remarquons que si l'on considère $b(n, k)$ comme l'opérateur de multiplication par $b(n, k)$, alors $K^{-1}b(n, k) = b(n, k-1)K^{-1}$ et $K^{-j}b(n, k) = b(n, k-j)K^{-j}$. C'est ainsi que s'obtient la troisième égalité. $\square$

Par exemple, les hyperbinomiales $B_{r,s}^g$ correspondant aux coefficients binomiaux satisfont à la même récurrence que ceux-ci. Ainsi pour $n \geq m$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^m \binom{n-m}{k-i} \binom{m}{i}. \quad (27)$$

Lemme 2. *Les hyperbinomiales*

$$\begin{aligned} B &= \mathcal{H}B(b(n, k); b'(n, k)), \\ \tau_g B &= \mathcal{H}B(b(n+1, k); b'(n+1, k)), \\ \tau_d B &= \mathcal{H}B(b(n+1, k+1); b'(n+1, k+1)), \end{aligned}$$

sont mutuellement récursives avec l'équation

$$B(n, k) = B(1, 0)\tau_g B(n-1, k) + B(1, 1)\tau_d B(n-1, k-1) + [n = k = 0]. \quad (28)$$

Preuve. On démontre la proposition par induction sur n . L'équation (28) est trivialement vérifiée pour $n = 0$ et si elle l'est pour $n-1$, alors en développant $B(n, k)$ avec sa récurrence, puis $B(n-1, k)$ et $B(n-1, k-1)$ en utilisant l'hypothèse d'induction, on obtient

$$\begin{aligned} B(n, k) &= b(n, k)B(n-1, k) + b'(n, k)B(n-1, k-1) + [n = k = 0] \\ &= b(n, k)B(1, 0)\tau_g B(n-2, k) + b'(n, k)B(1, 0)\tau_g B(n-2, k-1) \\ &\quad + b(n, k)B(1, 1)\tau_d B(n-2, k-1) + b'(n, k)B(1, 1)\tau_d B(n-2, k-2) \\ &\quad + [n = k = 0] + b(n, k)[n = 1][k = 0] + b'(n, k)[n = k = 1] \\ &= B(1, 0)\tau_g B(n-1, k) + B(1, 1)\tau_d B(n-1, k-1) + [n = k = 0] \\ &\quad + (b(1, 0) - B(1, 0))[n = 1][k = 0] + (b(1, 1) - B(1, 1))[n = k = 1], \end{aligned}$$

or, avec (3) on a $b(1, 0) = B(1, 0)$ et $b(1, 1) = B(1, 1)$, et ainsi l'équation (28) est aussi vérifiée pour n . $\square$

Pour $B = \mathcal{H}B(b(n, k); b'(n, k))$ on appelle *partage en deux parts* l'équation (28) du lemme précédent. Par exemple, pour $E = \mathcal{H}B(k+1; n-k+1)$ le partage en deux parts

$$E(n, k) = \tau_g E(n-1, k) + \tau_d E(n-1, k-1) + [n = k = 0]$$

avec $\tau_g E = \mathcal{H}B(k+1; n-k+2)$ et $\tau_d E = \mathcal{H}B(k+2; n-k+1)$ s'exprime pour les premières lignes par la somme de matrices

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 11 & 11 & 1 \end{pmatrix}}_{\{E(n, k)\}_{0 \leq k, n \leq 4}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_{\{\tau_g E(n, k)\}_{0 \leq k, n \leq 4}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}}_{\{\tau_d E(n, k)\}_{0 \leq k, n \leq 4}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\{[n = k = 0]\}_{0 \leq k, n \leq 4}}$$

Lorsque $B(1,0) = 0$ (ou $B(1,1) = 0$), alors l'équation (28) permet de donner le terme général de $\tau_d B$ (ou de $\tau_g B$) directement en fonction de celui de B . Par exemple, pour les nombres de Stirling de seconde espèce $S = \mathcal{H}B(k;1)$, on a $\tau_d S = \mathcal{H}B(k+1;1)$ et pour tout $n \geq 0$, $\tau_d S(n,k) = S(n+1, k+1)$. Ainsi au produit hyperbinomial $\mathcal{H}B(1;1) \times \mathcal{H}B(k;1) = \mathcal{H}B(k+1;1)$ correspond la formule de sommation $\sum_j \binom{n}{j} S(j,k) = S(n+1, k+1)$.

Lemme 3. Soit $B_u^g = \mathcal{H}B(b(u-k); b'(u-k))$ et $B_{(u)} = \mathcal{H}B(b(k-u); b'(k-u))$. Alors pour tout entier a on a

$$B_{k+a}^g(n, l)[l = k] = B_{(-a)}(n, k). \quad (28)$$

Preuve. Le partage de B_{k+a}^g s'exprime pour $n > 0$ par

$$B_{k+a}^g(n, l) = B_{k+a}^g(1, 0)\tau_g B_{k+a}^g(n-1, l-1) + B_{k+a}^g(1, 1)\tau_d B_{k+a}^g(n-1, l-1)$$

où on a avec (3) $B_{k+a}^g(1, 0) = b(k+a)$, et $B_{k+a}^g(1, 1) = b'(k+a)$. Or, par le lemme 2, $\tau_g B_{k+a}^g = B_{k+a}^g$ et $\tau_d B_{k+a}^g = B_{k+a-1}^g$. Ainsi en multipliant l'équation de partage par $[l = k]$ et en posant $H(n, k) := B_{k+a}^g(n, l)[l = k]$ on obtient

$$H(n, k) = b(a+k)H(n-1, k) + b'(a+k)H(n-1, k-1) + [n = k = 0],$$

d'où $H(n, k) = B_{(-a)}(n, k)$. $\square$

Le dernier lemme exprime aussi le fait que pour toute colonne de $B_{(-a)}$ il existe une autre hyperbinomiale ayant la même colonne à la même position. Par exemple, la colonne m de $S = \mathcal{H}B(k;1)$ coïncide avec la colonne m de $S_m^g = \mathcal{H}B(m-k;1)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_{\{S(n, k)\}_{0 \leq k, n \leq 4}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 1 \end{pmatrix}}_{\{S_0^g(n, k)\}_{0 \leq k, n \leq 4}},$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\{S_1^g(n, k)\}_{0 \leq k, n \leq 4}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 15 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\{S_2^g(n, k)\}_{0 \leq k, n \leq 4}}.$$

Théorème 3. Soit $B = \mathcal{H}B(b(k); b'(k))$ une hyperbinomiale inversible et

$$B_{(-a)} = \mathcal{H}B(b(k+a); b'(k+a)).$$

Alors pour tout a , n et k des entiers positifs on a

$$\sum_{j \leq a} B^{(-1)}(a, j) B(n+j, a+k) = B_{(-a)}(n, k). \quad (29)$$

Preuve. On utilise la récurrence d'ordre n du lemme 1 appliquée à $B(n+j, a+k)$ et que l'on remplace dans le membre gauche de (29)

$$\begin{aligned}
 H(a, n, k) &:= \sum_j^a B^{(-1)}(a, j) B(n+j, a+k) \\
 &= \sum_{j=0}^a B^{(-1)}(a, j) \sum_{l=0}^n B(j, k+a-l) B_{x, k+a}^g(n, l) \\
 &= \sum_{l=0}^n B_{x, k+a}^g(n, l) \sum_{j=0}^a B^{(-1)}(a, j) B(j, k+a-l) \\
 &= B_{x, k+a}^g(n, l)[l=k]. \\
 &= B_{(-a)}(n, k).
 \end{aligned} \tag{30}$$

Dans (30) on désigne $B_{n+j, k+a}^g$ par $B_{x, k+a}^g$ qui est, dans ce cas, indépendant de $n+j$ ce qui permet d'exclure ce terme de la somme sur j . $\square$

Corollaire 2. Soit $F = \mathcal{H}B(f_k; f'_k)$ avec $f'_k \neq 0$ pour tout $k > 0$. Par le théorème 1, l'hyperbinomiale F est inversible avec $F^{(-1)} = \mathcal{H}B(-f_{n-1}/f'_n; 1/f'_n)$ et alors

$$\sum_j F^{(-1)}(k, j) F(m+j, k) = \{f_k\}^m. \tag{31}$$

Preuve. Avec l'équation (29) du théorème on a

$$\sum_{j \leq k} F^{(-1)}(k, j) F(m+j, b+k) = F_{(-k)}(m, b), \tag{32}$$

or en posant $b = 0$ dans (32) et en utilisant (3) on a $F_{(-k)}(m, 0) = \{f_k\}^m$. $\square$

Pour les nombres binomiaux, les nombres de Stirling et leurs q -analogues la formule (31) devient

$$\sum_i (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{m+i}{k} = 1, \tag{33}$$

$$\sum_i (-1)^{k-i} q^{\binom{k-i-1}{2}} \binom{k}{i}_q \binom{m+i}{k}_q = q^{mk}, \tag{34}$$

$$\sum_i s(k, i) S(m+i, k) = k^m, \tag{35}$$

$$\sum_i s_{p,q}(k, i) S_{p,q}(m+i, k) = \left\{ \frac{q^k - p^k}{q - p} \right\}^m. \tag{36}$$

4. Exemples. Pour construire des exemples de produits hyperbinomiaux et exprimer les formules de sommations correspondantes on a besoin d'un bon répertoire de récurrences hyperbinomiales avec leurs solutions.

À la suite du lemme 2 on a montré que lorsque $H(1,0)H(1,1) = 0$, alors le terme général de l'hyperbinomiale H s'exprime en fonction de celui de $\tau_d H$ ou $\tau_g H$.

On introduit ici une nouvelle opération qui permet de simplifier certaines récurrences hyperbinomiales.

On écrit $G = \mathcal{H}G(A(n, k); B(n, k))$ si, et seulement si

$$G(0, 0) = 1, \quad (37)$$

$$G(n, k) = A(n, k)G(n-1, k), \quad A(n, k) \neq 0, \quad (0 \leq k < n) \quad (38)$$

$$G(n, k) = B(n, k)G(n-1, k-1) \quad B(n, k) \neq 0, \quad (0 < k \leq n). \quad (39)$$

On écrit aussi $G \odot H$ pour la double suite de terme général $G(n, k)H(n, k)$.

Proposition 1. Soit $G = \mathcal{H}G(A(n, k); B(n, k))$ et $H = \mathcal{H}B(p(n, k); q(n, k))$. Alors on a

$$A(n, k)B(n-1, k) = A(n-1, k-1)B(n, k) \quad (40)$$

pour $0 \leq k \leq n$,

$$G(n, k) = \prod_{j=1}^{n-k} A(j, 0) \prod_{j=1}^k B(n-k+j, j) \quad (41)$$

$$G(n, k) = \prod_{j=1}^{n-k} A(k+j, k) \prod_{j=1}^k B(j, j) \quad (42)$$

et

$$\begin{aligned} G \odot H &:= \mathcal{H}G(A(n, k); B(n, k)) \odot \mathcal{H}B(p(n, k); q(n, k)) \\ &= \mathcal{H}B(A(n, k)p(n, k); B(n, k)q(n, k)). \end{aligned} \quad (43)$$

Table 2. Exemples de termes généraux de $G = \mathcal{H}G(A(n, k); B(n, k))$

$A(n, k)$	$B(n, k)$	$G(n, k)$
α	β	$\alpha^{n-k} \beta^k$
α_{n-k}	β_k	$\prod_{j=1}^{n-k} \alpha_j \prod_{m=1}^k \beta_m$
α_n	α_n	$\prod_{j=1}^n \alpha_j$
$q^{\alpha_{n-k}}$	p^{β_k}	$q^{\sum_{j=1}^{n-k} \alpha_j} p^{\sum_{m=1}^k \beta_m}$

Exemples.

(1) L'équation (3.7) de [10]

$$\sum_{k=i}^n \left[S_{\alpha}(n, k) S_{\bar{\alpha}}(k, i) - \binom{n}{k} \alpha^{n-k} S_{(\alpha)}(k, i) \right] = 0$$

exprime simplement le fait que

$$S_{\alpha} \times S_{\bar{\alpha}} = H \times S_{(\alpha)} \quad (44)$$

où $H = \mathcal{HB}(\alpha; 1)$. Si dans (44) on considère H comme une inconnue, alors on calcule avec le théorème 1 que

$$H = (S_\alpha \times S_{\bar{\alpha}}) \times S_{(\alpha)}^{(-1)} = S \times s_{(\alpha)}$$

et on retrouve $H = \mathcal{HB}(\alpha; 1) = \mathcal{HG}(\alpha^{n-k}; 1) \odot \mathcal{HB}(1, 1)$ de sorte que $H(n, k) = \alpha^{n-k} \binom{n}{k}$.

(2) La formule de Carlitz [1]

$$\sum_j \binom{n}{j} (q-1)^{j-k} S_q(j, k) = \binom{n}{k}_q, \quad (45)$$

définissant les q -analogues des nombres de Stirling de seconde espèce S_q , se traduit par le produit hyperbinomial

$$\mathcal{HB}(q^k; 1) = \mathcal{HB}(1; 1) \times \{\mathcal{HG}(q-1; 1) \odot S_q\},$$

ainsi, par inversion,

$$\mathcal{HG}(q-1; 1) \odot S_q = \mathcal{HB}(q^k; 1) \times \mathcal{HB}(-1; 1) = \mathcal{HB}(q^k - 1; 1),$$

d'où $S_q = \mathcal{HB}\left(\frac{q^k-1}{q-1}; 1\right)$.

Avec le théorème 1 on peut obtenir un p, q -analogues de la formule (45) avec

$$H(n, k) = \sum_j \binom{n}{j} (q-p)^{j-k} S_{p,q}(j, k),$$

où $S_{p,q} = \mathcal{HB}\left(\frac{q^k-p^k}{q-p}; 1\right)$ et $H = \mathcal{HB}(q^k - p^k + 1; 1)$ un p, q -analogue des coefficients binomiaux.

- (3) Pour les polynômes gaussiens $F(n, k) = \binom{n}{k}_q$, $F = \mathcal{HB}(q^k; 1)$, la formule (10) donne $F^{(-1)} = \mathcal{HB}(-q^{n-1}; 1)$. Or, $q^{n-1} = q^{n-k-1} q^k$, ainsi $F^{(-1)} = \mathcal{HG}(-q^{n-k-1}; 1) \odot \mathcal{HB}(q^k; 1)$ et $F^{(-1)}(n, k) = (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_q$.
- (4) Dans un article récent [6] Cigler introduit de nouveaux q -analogues pour les nombres de Stirling. En gardant les mêmes notations

$$\begin{aligned} \{\}_q &= \mathcal{HB}(k-1+q^{n-1}; 1), & [\}_q &= \mathcal{HB}(n-q^k; 1), \\ \{\}_q^* &= \mathcal{HB}(k+1-q^{n-1}; 1), & [\}_q^* &= \mathcal{HB}(n-2+q^k; 1), \end{aligned}$$

Il montre que $\{\}_q \times [\}_q^* = I$ et $\{\}_q^* \times [\}_q = I$ ce qui peut aussi se vérifier avec le théorème 1. Les formules (1), (9) et (16) de [6]:

$$\begin{aligned} \sum_j q^{\binom{n-j+1}{2}} \binom{n}{j}_q S(j, k) &= \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}_q \\ \sum_j c(n+1, j+1) (-1)^{j-k} \binom{j}{k}_q &= \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q, \\ \sum_j c(n, j) q^{j-k} \binom{j}{k}_q &= \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right]_q^*, \end{aligned}$$

peuvent aussi s'interpréter comme des produits hyperbinomiaux. Par exemple, à la première formule correspond le produit hyperbinomial

$$\{\mathcal{H}G(q^{n-k}; 1) \odot \mathcal{H}B(q^k; 1)\} \times \mathcal{H}B(k; 1) = \tau_d \mathcal{H}B(k-1+q^{n-1}; 1)$$

ce qui revient plus simplement à

$$\mathcal{H}B(q^n; 1) \times \mathcal{H}B(k; 1) = \mathcal{H}B(k+q^n; 1).$$

- (5) Le théorème 1 permet d'obtenir de nouvelles formules de sommation faisant intervenir les q -analogues de Cigler. Par exemple, en prenant $G(n, k) = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_q^*$, on obtient des produits hyperbinomiaux de la forme

$$\mathcal{H}B(b_n + q^k; 1) \times \mathcal{H}B(k+1-q^{n-1}; 1) = \mathcal{H}B(k+1+b_n; 1). \quad (46)$$

En particulier, avec $b_n \equiv 0$ il correspond

$$\sum_j \binom{n}{j}_q \left\{ \begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix} \right\}_q^* = S(n+1, k+1)$$

et avec $b_n \equiv -1$ on a

$$\sum_j (q-1)^{n-j} S_q(n, j) \left\{ \begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix} \right\}_q^* = S(n, k)$$

une formule de sommation faisant intervenir trois versions des nombres de Stirling de seconde espèce.

Par la même approche on obtient

$$\begin{aligned} \sum_j \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right\}_q s(j, k) &= (q-1)^{n-k} c_q(n, k), \\ \sum_j (1-q)^{n-j} S_q(n, j) \left\{ \begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix} \right\}_q &= S(n, k), \\ \sum_j (1-q)^{n-j} c_q(n, j) S(j, k) &= \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_q^*, \\ \sum_k (-1)^k k! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_q &= \prod_{j=0}^{n-1} (q^j - 2), \\ \sum_j \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right\}_q (-1)^{k-j} L(j, k) &= \sum_j \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_q^*, \end{aligned}$$

où $L = \mathcal{H}B(n+k-1; 1)$ donne les nombres de Lah. Ces formules de sommation pourrait avoir aussi une interprétation combinatoire intéressante.

- (6) Les q -analogues de Cigler forment des cas particuliers de nombres de Stirling non-centrés multiparamétrés [10]. Ainsi, les équations (14) et (15), aussi conséquences du corollaire 1, deviennent

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_q \prod_{j=1}^k (t - q^{j-1} + 1) &= \prod_{j=1}^n (t - j + 1), \\ \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_q^* \prod_{j=1}^k (t + q^{j-1} - 1) &= \prod_{j=1}^n (t - j + 1), \\ \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_q \prod_{j=1}^k (t - j + 1) &= \prod_{j=1}^n (t - q^{j-1} + 1), \\ \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_q^* \prod_{j=1}^k (t - j + 1) &= \prod_{j=1}^n (t + q^{j-1} - 1). \end{aligned}$$

(7) Soit $H = \mathcal{HB}(a_n t_k + a_n d_n; a_n u_k)$. Alors

$$H = \mathcal{HG}(a_n; a_n u_k) \odot \mathcal{HB}(t_k + d_n; 1),$$

et si on écrit M pour $\mathcal{HB}(t_k + d_n; 1)$, alors

$$H(n, k) = M(n, k) \prod_{j=1}^n a_j \prod_{m=1}^k u_m.$$

Par ailleurs, $M = F \times G$ avec $F = \mathcal{HB}(d_n; 1)$ et $G = \mathcal{HB}(t_k; 1)$. Or, dans [7] et [9] on voit que

$$\begin{aligned} F(n, k) &= e_{n-k}(d_1, d_2, \dots, d_n) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} d_{i_1} \cdots d_{i_{n-k}} \\ G(n, k) &= h_{n-k}(t_0, t_1, \dots, t_k) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{n-k} \leq k} t_{i_1} \cdots t_{i_{n-k}} \end{aligned}$$

où $e_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$ et $h_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$ sont les fonctions symétriques de degré n en k variables respectivement élémentaires et complètes.

En résumé on a

$$H(n, k) = e_n(a_1, \dots, a_n) e_k(u_1, \dots, u_k) \sum_{\ell=k}^n e_{n-\ell}(d_1, \dots, d_n) h_{\ell-k}(t_0, \dots, t_k). \quad (47)$$

(8) L'expression (47) du terme général de $H = \mathcal{HB}(a_n t_k + a_n d_n; a_n u_k)$ permet de trouver d'autres hyperbinomiales coïncidant avec H pour une ligne ou pour une colonne. Explicitement, si

$$H_{(m,\ell)} = \mathcal{HB}(a_{m-n+1} t_k + a_{m-n+1} d_{m-n+1}; a_{m-n+1} u_k), \quad (48)$$

$$H_{(m,c)} = \mathcal{HB}(a_n t_{m-k} + a_n d_n; a_n u_{m-k+1}), \quad (49)$$

alors, pour tout j , $H_{(m,\ell)}(m, j) = H(m, j)$ et $H_{(m,c)}(j, m) = H(j, m)$.

(9) Pour $H = \mathcal{HB}(a_n t_k + a_n d_n; a_n u_k)$, l'équation (23) du lemme 1

$$H(n, k) = \sum_{i=0}^m H_{n,k}^{\mathcal{G}}(m, i) H(n-m, k-i),$$

peut aussi s'écrire

$$H(m+j, n) = \sum_k H_{m+j,n}^{\mathcal{G}}(j, n-k) H(m, k), \quad (50)$$

où $H_{r,s}^{\mathcal{G}} = \mathcal{HB}(a_{r-n+1} t_{s-k} + a_{r-n+1} d_{r-n+1}; a_{r-n+1} u_{s-k})$. L'exemple précédent montre que l'on peut remplacer $H_{m+j,n}^{\mathcal{G}}$ dans (50) par $(H_{m+j,n}^{\mathcal{G}})_{(j,\ell)}$ avec

$$(H_{m+j,n}^{\mathcal{G}})_{(j,\ell)} = \mathcal{HB}(a_{n+m} t_{s-k} + a_{n+m} d_{n+m}; a_{n+m} u_{s-k}).$$

Par exemple, lorsque l'on prend S_α ou s_α pour H , on retrouve la convolution de Chu-Vandermonde de [9, Theorem 2.6].

English extended abstract. In this article we consider double sequences solutions of a linear partial difference equation

$$H(n, k) = p(n, k)H(n-1, k) + q(n, k)H(n-1, k-1) \quad (51)$$

with initial values $H(0, k) = \delta_{0,k}$. We then say that H is hyperbinomial and write $H = \mathcal{HB}(p(n, k); q(n, k))$.

For example, $H = \mathcal{HB}(1; 1)$ for $H(n, k) = \binom{n}{k}$; $S = \mathcal{HB}(k; 1)$, $c = \mathcal{HB}(n-1; 1)$ and $s = \mathcal{HB}(1-n; 1)$ for Stirling numbers; $H = \mathcal{HB}(k; n-k+1)$ for Eulerian numbers; $H = \mathcal{HB}(1-n+sk; s)$ for C numbers; $H = \mathcal{HB}(q^k; 1)$ for Gaussian polynomials noted $\binom{n}{k}_q$.

Hyperbinomials are triangular sequences, $H(n, k) = 0$ if $k > n$, so we ask when the matricial product

$$(F \times G)(n, k) := \sum_{j=k}^n F(n, j)G(j, k)$$

of two hyperbinomials F and G give rise to a triangular sequence also satisfying an hyperbinomial difference equation such as (51). We note I for identity, $I(n, k) = \delta_{nk}$ and $F^{(-1)}$ for the double sequence such that $F^{(-1)} \times F = F \times F^{(-1)} = I$. In the first section, with theorem 1, we show that the most general hyperbinomial product $F \times G = H$ are with

$$\begin{aligned} F &= \mathcal{HB}(a_n r_k + b_n; a_n s_k), \\ G &= \mathcal{HB}\left(\frac{t_k - r_{n-1}}{s_n}; \frac{u_k}{s_n}\right), \\ H &= \mathcal{HB}(a_n t_k + b_n; a_n u_k), \end{aligned}$$

and then

$$F^{(-1)} = \mathcal{HB}\left(\frac{-b_{k+1}}{a_{k+1}s_n} - \frac{r_{n-1}}{s_n}; \frac{1}{a_k s_n}\right).$$

From the theorem we deduce that hyperbinomials serve for general conversion. With corollary 1 we show that

$$\sum_k C(n, k) \prod_{j=1}^k (\alpha_j t + \beta_j) = \prod_{j=1}^n (a_j t + b_j),$$

where $C = \mathcal{HB}(-a_n \alpha_{k+1} \beta_{k+1} + b_n; a_n / \alpha_k)$. These conversion can be more general, with theorem 2 we show

$$\sum_k D(n, k) \prod_{j=1}^k g_j = \prod_{j=1}^n h_j$$

for $D = \mathcal{HB}(h_n - g_{k+1} f_{n,k+1}; f_{n,k})$.

In the third section we generalize result of Milne [17]. Explicitely, theorem 3 show that

$$\sum_{j \leq a} B^{(-1)}(a, j) B(n+j, a+k) = B_{(-a)}(n, k)$$

where $B = \mathcal{H}B(b(k); b'(k))$ and $B_{(-a)} = \mathcal{H}B(b(k+a); b'(k+a))$.

In the fourth section we give many examples. We demonstrate some identities involving the q -analogues of Stirling numbers introduced by Cigler [6]. We also show that for $H = \mathcal{H}B(a_n t_k + a_n d_n; a_n u_k)$, $H(n, k)$ is expressed in terms of symmetric functions.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Carlitz, *On abelian fields*. Trans. Amer. Math. Soc **35** (1933), 122-136.
2. L. Carlitz et R. A. Scoville, *Generalized Eulerian numbers: Combinatorial applications*, J. Reine Angew Math. **265** (1974), 110-137.
3. L. Carlitz, *Weighted Stirling numbers of the first and second kind*, Fibonacci Quart. **18** (1980), 147-162 et 242-257.
4. Ch. A. Charalambides, *The generalized Stirling and C numbers*, Sankhya **36** (1974), 419-436.
5. Ch. A. Charalambides et J. Singh, *A review of the Stirling numbers, their generalizations and statistical applications*, Comm. Statist. Theory Methods **17** (1988), 2533-2595.
6. J. Cigler, *A New q -Analog of Stirling Numbers*, Prépublication.
7. M. Comtet, *Nombres de Stirling généraux et fonctions symétriques*, C. R. Acad. Sc. Par. (Série A) **275** (1972), 747-750.
8. A. de Médicis et P. Leroux, *A unified combinatorial approach for q -(and p, q -)Stirling numbers*, J. Statist. Plann. Inference **34** (1993), 89-105.
9. ———, *Generalized Stirling numbers, convolution formulae and p, q -analogues*, À paraître dans Canad. J. Math.
10. B. S. El-Desouky, *The multiparameter noncentral Stirling numbers*, Fibonacci Quart. **32** (1994), 218-225.
11. H. W. Gould, *The q -Stirling Numbers of the First and Second Kinds*, Duke Math. J. **28** (1961), 281-289.
12. R. L. Graham, D. E. Knuth et O. Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, Reading, Massachussets, 1989.
13. F. T. Howard, *Degenerate weighted Stirling numbers*, Discrete Math. **57** (1985), 45-58.
14. M. Koutras, *Non-central Stirling numbers and applications*, Discrete Math. **42** (1982), 73-89.
15. M. Koutras, *Eulerian numbers associated with sequences of polynomials*, Fibonacci Quart. **32** (1994), 44-57.
16. A. G. Kyriakoussis, *On extended generalized Stirling pairs*, Fibonacci Quart. **31** (1993), 44-52.
17. S. Milne, *Restricted Growth Functions and Incidence Relations of the Lattice of Partitions of an n -Set*, Adv. in Math. **26** (1977), 290-305.
18. S. Milne, *Inversion Properties of Triangular Arrays*, Analysis **1** (1981), 1-7.
19. P. Théorêt, *Hyperbinomiales : Doubles suites satisfaisant à des équations aux différences partielles de dimension et d'ordre deux de la forme $H(n, k) = p(n, k)H(n-1, k) + q(n, k)H(n-1, k-1)$* , Thèse de doctorat, Montréal, Université du Québec à Montréal, mai 1994.
20. P. Théorêt, *Fonctions génératrices pour une classe d'équations aux différences partielles*, Ann. Sci. Math. Québec **19** (1995), 91-105.

P. THÉORÊT
7214 CHAMBORD
MONTREAL QC H2E 1W6
CANADA