

CONTINUITÉ AUTOMATIQUE DANS LES LIMITES INDUCTIVES LOCALEMENT CONVEXES DE Q -ALGÈBRES DE FRÉCHET

M. AKKAR ET C. NACIR

RÉSUMÉ. Nous montrons un résultat sur la continuité automatique dans les algèbres limites inductives localement convexes de suites de Q -algèbres de Fréchet et nous déduisons que sur une algèbre semi-simple on peut définir une au plus telle structure.

ABSTRACT. We show a result of automatic continuity in the algebras that are locally inductive limits of sequences of Fréchet Q -algebras and we deduce that on a semi-simple algebra we can define at most one such structure.

Introduction. Soient A et A' deux algèbres complexes avec A' semi-simple.

Dans [19] Johnson montre, en utilisant la théorie des représentations dans les algèbres, que si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont respectivement deux normes d'algèbres de Banach sur A et A' et si φ est un morphisme d'algèbre de $(A, \|\cdot\|_1)$ sur $(A', \|\cdot\|_2)$, alors φ est continue.

Aupetit redémontre ce théorème dans [6], en utilisant une technique sur les fonctions sous-harmoniques.

Nous utilisons cette même technique moyennant un résultat de [11] que nous redémontrons ici (lemme 1), et un théorème du graphe fermé de [13], pour montrer que si τ_1 est une topologie sur A d'algèbre limite inductive localement convexe d'une famille de Q -algèbres de Fréchet et τ_2 une topologie sur A' d'algèbre limite inductive localement convexe d'une suite de Q -algèbres de Fréchet (algèbre $Q\text{-}\mathcal{LF}$), tout morphisme d'algèbre de (A, τ_1) sur (A', τ_2) est continu. Nous déduisons alors un théorème d'unicité de structure d'algèbre $Q\text{-}\mathcal{LF}$ semi-simple.

Deux résultats analogues sur la continuité automatique ont été publiés récemment.

Le premier [12] est basé sur la démonstration du théorème principal de [23]; la démonstration de ce résultat utilise effectivement que les algèbres considérées sont localement multiplicativement convexes. Nous donnons dans cet article des exemples d'algèbres limites inductives localement convexes de suites d'algèbres de Fréchet qui ne sont pas des algèbres LFQ au sens de ([21], p. 301) et qui donc n'entrent pas dans le cadre du résultat de [12] car toutes les algèbres considérées dans [12] sont supposées localement multiplicativement convexes.

Reçu le 21 mai 1994 et, sous forme définitive, le 3 avril 1995.

Le deuxième [15] qui généralise le théorème de Johnson aux a.l.c. métrisables complètes à idéaux maximaux fermés utilise un lemme de Schur dans ces algèbres que Guan démontre dans [14]. Nous démontrons que toute a.l.c. commutative métrisable complète à idéaux maximaux fermés est en fait une Q -algèbre de Fréchet et donc dans le cas commutatif, le théorème de Guan se déduit de celui d'Aupetit ([6], remarque 3) ou de notre présent résultat.

Ce travail contient aussi certaines propriétés des algèbres $Q\text{-}\mathcal{LF}$. Nous y démontrons en particulier que toute algèbre commutative unitaire limite inductive localement convexe d'une suite de Q -algèbres de Fréchet est une algèbre $Q\text{-}\mathcal{LF}$, que la commutativité n'est pas nécessaire pour avoir cette propriété dans le cas où les algèbres facteurs de la limite inductive se réduisent à des algèbres de Banach, que de telles algèbres sont aussi des limites inductives localement convexes d'algèbres de Banach, cette dernière structure étant minimale dans le cas où l'algèbre est semi-simple.

Préliminaires. Dans toute la suite les algèbres considérées sont complexes, non nécessairement commutatives, et unitaires d'unité e , sauf mention contraire. Soit A une algèbre, on note:

- $\text{conv}(V)$ l'enveloppe convexe d'une partie V de A .
- $\text{Inv}(A)$ l'ensemble des éléments inversibles de A .
- $N(A)$ l'ensemble des éléments quasi-nilpotents de A .
- $Q_r(A)$ l'ensemble des éléments quasi-réguliers de A .
- $\text{Rad}(A)$ le radical de A qui est l'intersection des idéaux à gauche maximaux de A . D'après ([25], théorème 2.3.2.), $\text{Rad}(A)$ est égal au plus grand idéal bilatère de A contenu dans $Q_r(A)$.

Pour $x \in A$ on note:

$$Sp_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda e \notin \text{Inv}(A)\}.$$

$$\rho_A(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in Sp_A(x)\}$$

avec $\rho_A(x) = +\infty$ si $Sp_A(x)$ est non borné et $\rho_A(x) = -\infty$ si $Sp_A(x) = \emptyset$.

Un espace localement convexe (e.l.c.) est dit strictement bornologique au sens de la définition de ([13], p. 199) s'il est limite inductive localement convexe d'espaces de Banach.

Une algèbre topologique (A, τ) est une algèbre A munie d'une topologie τ compatible avec sa structure d'espace vectoriel et pour laquelle la multiplication est séparément continue.

Une algèbre topologique (A, τ) est dite localement convexe (a.l.c.) si elle est munie d'une topologie d'espace localement convexe. Si τ est définie par la famille des semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ on note aussi (A, τ) par $(A, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$.

Une a.l.c. (A, τ) est dite localement multiplicativement convexe (a.l.m.c.) si sa topologie est définie par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ telle que: $p_\lambda(xy) \leq p_\lambda(x)p_\lambda(y)$ pour tous $x, y \in A$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$. La multiplication dans A est alors globalement continue. On a ([22], théorème 5.1) ou ([28], théorème 11.4), si

(A, τ) est en outre complète alors (A, τ) est la limite projective des algèbres de Banach $(\widehat{A_\lambda}, \widehat{p_\lambda})$ ($\lambda \in \Lambda$); où $(\widehat{A_\lambda}, \widehat{p_\lambda})$ est l'algèbre de Banach complétée de l'algèbre normée $(A/N_\lambda, p_\lambda)$, N_λ étant l'annulateur de p_λ et les applications de transition étant les projections canoniques π_λ de A sur $\widehat{A_\lambda}$. On déduit également d'après le corollaire 5.3 de [22] ou le théorème 12.10 de [28] que pour tout $x \in A$ on a :

$$\rho_A(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} [\lim_{n \rightarrow +\infty} [p_\lambda(x^n)]^{1/n}] = \sup_{\lambda \in \Lambda} [\lim_{n \rightarrow +\infty} [\widehat{p_\lambda}(\pi_\lambda(x))^n]^{1/n}].$$

Si en plus (A, τ) est un espace de Fréchet, on dit que (A, τ) est une a.l.m.c. de Fréchet ou seulement une algèbre de Fréchet et en abrégé une algèbre $\mathcal{F}$; dans ce cas τ peut être définie par une suite croissante de semi-normes $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que: $p_i(xy) \leq p_i(x)p_i(y)$ pour tous $x, y \in A$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Une algèbre topologique (A, τ) est dite une Q -algèbre topologique si $\text{Inv}(A)$ est ouvert dans A . Une algèbre de Fréchet qui est une Q -algèbre topologique est dite une Q -algèbre de Fréchet et en abrégé une algèbre $Q\text{-}\mathcal{F}$.

Si (A, τ) est une a.l.c., on désignera par $\mathcal{B}_A$ l'ensemble de ses parties convexes, équilibrées, fermées et bornées, et par $\mathfrak{B}_A$ le sous ensemble de $\mathcal{B}_A$ des parties de A qui sont en plus idempotentes et contenant l'unité e de l'algèbre A .

Une algèbre bornologique convexe séparée (resp. complète) $(A, \mathcal{B})$ est dite algèbre localement multiplicativement convexe (a.b.m.c.) (resp. a.b.m.c. complète) si $\mathcal{B}$ admet une pseudo-base $(B_i)_{i \in I}$ formée de disques idempotents (resp. de disques idempotents complétants); une telle algèbre est alors limite inductive bornologique convexe des algèbres normées (resp. algèbres de Banach) (A_{B_i}, p_{B_i}) où A_{B_i} est la sous-algèbre de A engendrée par B_i et p_{B_i} la jauge du disque B_i dans A_{B_i} (voir [1] ou [18]).

Soit I un ensemble préordonné filtrant à droite et A une algèbre réunion d'une sous-famille de ses sous-algèbres $(A_i)_{i \in I}$. On note par φ_i l'injection canonique de A_i dans A . On suppose que pour tout $i \in I$, A_i est munie d'une topologie d'algèbre de Fréchet (resp. de Banach) τ_i et que si $i \leq j$, $A_i \subset A_j$ et le morphisme canonique $(A_i, \tau_i) \rightarrow (A_j, \tau_j)$ est continu. On munit A de la topologie τ limite inductive localement convexe des topologies τ_i ($i \in I$). On note $(A, \tau) = \bigcup_{i \in I} (A_i, \tau_i)$ et on dit qu'on a une algèbre limite inductive localement convexe d'une réunion d'algèbres de Fréchet (resp. de Banach) et que $((A_i, \tau_i))_{i \in I}$ est une famille de définition de la limite inductive. Dans le cas où $I = \mathbb{N}$ avec son ordre naturel, on dit que (A, τ) est une algèbre $\mathcal{LF}$; et si pour tout $n \in \mathbb{N}$ (A_n, τ_n) est une algèbre de Banach, on dit que A, τ est une algèbre $\mathcal{LB}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, (A_n, τ_n) est une algèbre $Q\text{-}\mathcal{F}$, et (A, τ) est une Q -algèbre topologique, on dit que (A, τ) est une algèbre $Q\text{-}\mathcal{LF}$.

Comme exemples d'algèbres $Q\text{-}\mathcal{LF}$ nous avons: les algèbres de Banach, les algèbres $Q\text{-}\mathcal{F}$, les algèbres limites inductives localement convexes de suites d'algèbres de Banach étudiées dans [27] et dans [4], les algèbres bornologiques multiplicativement convexes complètes ayant une base dénombrable de bornés étudiées dans [1] et dans [18]. Ce ne sont pas les seuls exemples d'algèbres $Q\text{-}\mathcal{LF}$; dans la suite nous donnons une famille d'exemples d'algèbres $Q\text{-}\mathcal{LF}$ qui ne sont ni des a.l.m.c. de [22], ni des a.b.m.c. de [18] ou de [1].

1. Propriétés des algèbres Q - $\mathcal{LF}$.

1.1. Propriétés de l'ensemble des éléments inversibles d'une algèbre $\mathcal{LF}$.

Lemme 1. (voir [11]) *Soit (A, τ) une algèbre topologique. La fonction rayon spectral $x \mapsto \rho_A(x)$ est semi-continue supérieurement dans A si, et seulement si, (A, τ) est une Q -algèbre topologique.*

Preuve. Condition nécessaire: Supposons que $\text{Inv}(A)$ n'est pas un ouvert de A . Soit V un voisinage de 0 dans A , il existe alors $x \in e + V$ tel que x soit non inversible dans A . Posons $y = x - e$; on a $y \in V$ et $e + y$ est non inversible dans A d'où $\rho_A(y) \geq 1$. Tout voisinage de 0 dans A contient donc un élément y de A tel que $\rho_A(y) \geq 1$ et on a $\rho_A(0) = 0$, donc la fonction ρ_A ne peut pas être semi-continue supérieurement en 0.

Condition suffisante: Supposons que $\text{Inv}(A)$ est un ouvert de A . Soit $a \in A$, si $\rho_A(a) = +\infty$ alors par définition ρ_A est semi-continue supérieurement en a . Supposons maintenant que $\rho_A(a) < +\infty$ et soit $\alpha > \rho_A(a)$. Choisissons β tel que $\alpha > \beta > \rho_A(a)$. Soit $\Phi : (x, \mu) \mapsto x - \mu e$ de $A \times \mathbb{C}$ dans A et $\Theta : (x, \mu) \mapsto e - \mu x$ de $A \times \mathbb{C}$ dans A . Les applications Φ et Θ sont continues dans $A \times \mathbb{C}$ et puisque $\text{Inv}(A)$ est un ouvert de A on a $\Phi^{-1}(\text{Inv}(A))$ et $\Theta^{-1}(\text{Inv}(A))$ sont deux ouverts de $A \times \mathbb{C}$. $(a, 0) \in \Theta^{-1}(\text{Inv}(A))$ donc il existe un voisinage V de a dans A et un voisinage W de 0 dans $\mathbb{C}$ tels que $V \times W \subset \Theta^{-1}(\text{Inv}(A))$. Puisque $1/\lambda \rightarrow 0$ lorsque $|\lambda| \rightarrow +\infty$, il existe $\rho > 0$ tel que $1/\lambda \in W$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\lambda| > \rho$. On peut choisir $\rho > \beta$; soit $D = \{\lambda \in \mathbb{C} / \rho \geq |\lambda| \geq \beta\}$ (notons qu'on peut avoir $\beta < 0$ si $\rho_A(a) = -\infty$). Puisque $\beta > \rho_A(a)$, $(a, \lambda) \in \Phi^{-1}(\text{Inv}(A))$ pour tout $\lambda \in D$ et donc il existe un voisinage ouvert $V_{a,\lambda}$ de a dans A , un voisinage ouvert $W_{a,\lambda}$ de λ dans $\mathbb{C}$ tels que $V_{a,\lambda} \times W_{a,\lambda} \subset \Phi^{-1}(\text{Inv}(A))$. Nous avons $D \subset \bigcup_{\lambda \in D} W_{a,\lambda}$ et D est un compact de $\mathbb{C}$, donc il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ dans D tels que $D \subset \bigcup_{1 \leq i \leq k} W_{a,\lambda_i}$. On pose $V_1 = V \cap (\bigcap_{1 \leq i \leq k} V_{a,\lambda_i})$; alors V_1 est un voisinage de a dans A . Nous allons montrer que pour tout élément x de V_1 on a $\beta > \rho_A(x)$. Soient x un élément de V_1 et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \geq \beta$. Deux cas se posent:

- (i) si $|\lambda| \geq \rho$ alors $(x, 1/\lambda) \in V \times W \subset \Theta^{-1}(\text{Inv}(A))$ et par suite $\lambda e - x$ est inversible dans A .
- (ii) si $\rho \geq |\lambda| \geq \beta$ alors il existe $1 \leq i \leq k$ tel que: $(x, \lambda) \in V_{a,\lambda_i} \times W_{a,\lambda_i} \subset \Phi^{-1}(\text{Inv}(A))$ et par suite $x - \lambda e$ est inversible dans A .

Ainsi si $\rho_A(a) < +\infty$ et $\alpha > \rho_A(a)$ il existe un voisinage V_1 de a dans A tel que $\alpha > \rho_A(x)$ pour tout $x \in V_1$; ρ_A est donc semi-continue supérieurement en a . $\square$

Proposition 2. *Soit $(A, \tau) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n, \tau_n)$ une algèbre $\mathcal{LF}$ commutative unitaire. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ (A_n, τ_n) est une algèbre Q - $\mathcal{F}$ alors (A, τ) est une algèbre Q - $\mathcal{LF}$.*

Preuve. D'après le lemme 1, il suffit de montrer que la fonction $x \mapsto \rho_A(x)$ est semi-continue supérieurement en 0. Soit $\lambda > 0$; en utilisant toujours le lemme 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un voisinage V_n de 0 dans (A_n, τ_n) tel que $\lambda > \rho_{A_n}(x)$ pour tout $x \in V_n$. L'enveloppe convexe équilibrée V de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ est un voisinage de 0 dans (A, τ) . Soit $x \in V$; on a $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{n_i}$, les α_i étant des réels positifs vérifiant $\sum_{i=1}^p \alpha_i \leq 1$ et $x_{n_i} \in A_{n_i}$ pour tout $i = 1, \dots, p$. On peut supposer $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_p$; alors $x_{n_i} \in A_{n_p}$ pour tout $i = 1, \dots, p$ et d'après ([22], corollaire 5.7) on a

$\rho_{A_{n_p}}(x) \leq \sum_{i=1}^p \alpha_i \rho_{A_{n_p}}(x_{n_i})$, donc

$$\rho_A(x) \leq \rho_{A_{n_p}}(x) \leq \sum_{i=1}^p \alpha_i \rho_{A_{n_i}}(x_{n_i}) \leq \sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda < \lambda. \quad \square$$

Remarques.

- 1) On ignore si toute algèbre $\mathcal{LF}$ qui est une Q -algèbre topologique est une algèbre $Q\text{-}\mathcal{LF}$; si cette propriété est vraie, le théorème de Gelfand-Mazur serait vrai pour la classe des algèbres $\mathcal{LF}$.
- 2) On ignore si le résultat de la proposition 2 reste vrai dans le cas non commutatif. Cependant nous avons le résultat suivant:

Proposition 3. *Toute algèbre $\mathcal{LB}$ est une algèbre $Q\text{-}\mathcal{LF}$.*

Preuve. D'après ([24], théorème 4), on peut se ramener à $(A, \tau) = \bigcup_{\rightarrow t} (A_n, \|\cdot\|_n)$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'application $\varphi_n : (A_n, \|\cdot\|_n) \rightarrow (A_{n+1}, \|\cdot\|_{n+1})$ est de norme ≤ 1 , donc si B_n désigne la boule unité ouverte de $(A_n, \|\cdot\|_n)$, on a $B_n \subset B_{n+1}$. On déduit que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ est convexe et donc c'est un voisinage de 0 dans (A, τ) , d'où $(e - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (e - B_n)$ est un voisinage de e dans A et il est contenu dans $\text{Inv}(A)$ car $(e - B_n)$ est contenu dans $\text{Inv}(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

1.2. Propriété de structure d'une algèbre $Q\text{-}\mathcal{LF}$. Une algèbre $Q\text{-}\mathcal{F}(A, \tau)$ est en particulier une algèbre à inverse continu et donc elle a une théorie de Gelfand identique à celle d'une algèbre de Banach (chapitre 2.2 de [16]). D'après la proposition 16 de [4] une telle algèbre est dans le cas commutatif la limite inductive localement convexe de la réunion des algèbres de Banach (A_B, p_B) ($B \in \mathfrak{B}_A$).

Rappelons aussi que l'e.l.c. sous jacent à (A, τ) est bornologique et complet, par suite d'après le corollaire de la proposition 3.2.2 de [9] cet e.l.c. est limite inductive localement convexe de la réunion des espaces de Banach (A_B, p_B) ($B \in \mathfrak{B}_A$) (c'est-à-dire qu'il est strictement bornologique au sens de la définition de [13] page 199).

Proposition 4. *Soit $(A, \tau) = \bigcup_{\rightarrow t} (A_i, \tau_i)_{i \in I}$ une algèbre commutative limite inductive localement convexe d'une réunion de Q -algèbres de Fréchet; alors (A, τ) est aussi une limite inductive localement convexe d'une réunion d'algèbres de Banach, et elle est dans tous les cas strictement bornologique.*

Preuve. On sait d'après la proposition 16 de [4], que pour tout $i \in I$, $(A_i, \tau_i) = \bigcup_{\rightarrow t} (A_B, p_B)_{B \in \mathfrak{B}_{A_i}}$. Soit $\mathfrak{B} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_{A_i}$, il est clair que pour tout $B \in \mathfrak{B}$ (A_B, p_B) est une algèbre de Banach; on définit dans $\mathfrak{B}$ la relation $\leq$ suivante par:

$$\forall B_i, B_j \in \mathfrak{B} \quad B_i \leq B_j \iff B_i \subset B_j$$

alors $\mathfrak{B}$ est ordonné filtrant à droite par la relation $\leq$, et on a $(A, \tau) = \bigcup_{\rightarrow t} (A_B, p_B)_{B \in \mathfrak{B}}$. En effet, d'une part pour tout $B \in \mathfrak{B}$, il existe $i \in I$ tel que $B \in \mathfrak{B}_{A_i}$ et on a

$$(A_B, p_B) \rightarrow (A_i, \tau_i) = \bigcup_{\rightarrow t} (A_B, p_B)_{B \in \mathfrak{B}_{A_i}} \rightarrow (A, \tau) = \bigcup_{\rightarrow t} (A_i, \tau_i)_{i \in I}$$

est continue, et d'autre part pour tout $i \in I$ on a

$$(A_i, \tau_i) \rightarrow \bigcup_{\rightarrow t} (A_B, p_B)_{B \in \mathfrak{B}_{A_i}} \rightarrow \bigcup_{\rightarrow t} (A_B, p_B)_{B \in \mathfrak{B}}$$

est continue, d'où la bicontinuité de l'application identique

$$(A, \tau) \rightarrow \bigcup_{\rightarrow t} (A_B, p_B)_{B \in \mathfrak{B}}.$$

Pour la deuxième partie de la proposition on a une même preuve; il suffit de remarquer que d'après le corollaire de la proposition 3.2.2 de [9] on a pour tout $i \in I$ $(A_i, \tau_i) = \bigcup_{\rightarrow t} (A_B, p_B)_{B \in \mathfrak{B}_{A_i}}$, de considérer $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_{A_i}$, et de définir dans $\mathcal{B}$ la même relation d'ordre $\leq$ que ci-dessus. $\square$

Remarques.

- 1) On ne sait pas si la bornologie de von Neumann d'une algèbre Q - $\mathcal{F}$ ou Q - $\mathcal{LF}$ commutative est multiplicativement convexe; mais d'après la proposition 4 de telles algèbres peuvent toujours être munies de structures d'a.b.m.c. complètes et par suite elles ont une théorie de Gelfand identique à celle des algèbres de Banach; en particulier ces algèbres ont des spectres globaux non vides et ces sous-classes d'algèbres $\mathcal{LF}g$ vérifient le théorème de Gelfand-Mazur.
- 2) Nous allons voir dans la suite que dans le cas d'une algèbre Q - $\mathcal{LF}$ commutative semi-simple la structure d'algèbre limite inductive localement convexe de réunion d'algèbres de Banach de la proposition 4 est minimale.

2. Continuité automatique dans les algèbres Q - $\mathcal{LF}$.

Lemme 5. Soit $\lambda \mapsto f(\lambda)$ une fonction analytique d'un domaine D de $\mathbb{C}$ dans une algèbre Q - $\mathcal{F}$ $(A, (p_i)_{i \in \mathbb{N}})$, alors $\lambda \mapsto \rho_A(f(\lambda))$ est sous-harmonique dans D .

Preuve. D'après le lemme 1, la fonction $x \mapsto \rho_A(x)$ est semi-continue supérieurement dans A . Il reste donc à montrer que $\lambda \mapsto \rho_A(f(\lambda))$ vérifie l'inégalité de la moyenne. D'après les préliminaires, $(A, (p_i)_{i \in \mathbb{N}})$ est la limite projective des algèbres de Banach $((\hat{A}_i, \hat{p}_i))_{i \in \mathbb{N}}$ et pour tout $x \in A$ on a :

$$\rho_A(x) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \lim_{n \rightarrow +\infty} [\hat{p}_i[\pi_i(x)]^n]^{1/n}$$

π_i étant la projection canonique de A sur $\hat{A}_i$.

Soit $i \in \mathbb{N}$, $\pi_i \circ f$ est une fonction analytique de D dans l'algèbre de Banach $(\hat{A}_i, \hat{p}_i)$, on a donc :

$$\lambda \mapsto \rho_i[\pi_i[f(\lambda)]] = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\hat{p}_i[\pi_i(f(\lambda))]^n]^{1/n}$$

est sous-harmonique dans D d'après ([5], théorème 1, p. 9), on déduit que pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'application $\lambda \mapsto \rho_i[\pi_i[f(\lambda)]]$ vérifie l'inégalité de la moyenne. D'où le résultat puisqu'une enveloppe supérieure de fonctions positives vérifiant l'inégalité de la moyenne vérifie aussi l'inégalité de la moyenne. $\square$

Lemme 6. Soient (A, τ) une algèbre limite inductive localement convexe d'une réunion de Q -algèbres de Fréchet et x, y deux éléments de A . Alors la fonction $\lambda \mapsto \rho_A(\lambda x + y)$ est sous-harmonique dans $\mathbb{C}$.

Preuve. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de définition de (A, τ) ; il existe alors $i_o \in I$ tel que $x, y \in A_{i_o}$ et on a $\rho_A(\lambda x + y) = \inf_{i \geq i_o} \rho_{A_i}(\lambda x + y)$. D'après le lemme 5, $\lambda \mapsto \rho_{A_i}(\lambda x + y)$ est sous-harmonique dans $\mathbb{C}$ pour tout $i \geq i_o$. Ainsi $(\lambda \mapsto \rho_{A_i}(\lambda x + y))_{i \geq i_o}$ est une famille filtrante décroissante de fonctions sous-harmoniques dans $\mathbb{C}$, et d'après le théorème 4.4.11 de [7] la fonction $\lambda \mapsto \rho_A(\lambda x + y) = \inf_{i \geq i_o} \rho_{A_i}(\lambda x + y)$ est sous-harmonique dans $\mathbb{C}$. $\square$

Théorème 7. Soient (A, τ) une algèbre limite inductive localement convexe d'une réunion de Q -algèbres de Fréchet qui est une Q -algèbre topologique, (A', τ') une algèbre Q - $\mathcal{LF}$ semi-simple. Si φ est un morphisme d'algèbres de A sur A' alors φ est continu.

Preuve. D'après la proposition 4, (A, τ) est un e.l.c. strictement bornologique. Puisque (A', τ') est une Q -algèbre topologique, tout idéal à gauche maximal de A' est fermé, par suite $\text{Rad}(A')$ est fermé dans A' ; A' étant semi-simple on a $\text{Rad}(A') = \{0\}$, par suite (A', τ') est un espace topologique séparé. Il suffit alors d'après le théorème 4.2 de [13] de montrer que le graphe de φ est séquentiellement fermé dans $A \times A'$. Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers 0 dans (A, τ) telle que $(\varphi(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément $\varphi(a)$ de (A', τ') . D'après le lemme 1, le lemme 6 et la preuve du théorème 1 de [6], on obtient $\rho_A(\varphi(a)) = 0$. Soit

$$I = \left\{ \varphi(a) \in A' \mid \exists (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow 0, (\varphi(x_i))_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \varphi(a) \right\}$$

I est un idéal bilatère de A' et d'après ce qu'on vient de voir $I \subset N(A')$. On déduit que $I \subset Q_r(A')$ et d'après le théorème 2.3.2 de [25] $I \subset \text{Rad}(A')$; par suite $I = \{0\}$ et donc $\varphi(a) = 0$. $\square$

Corollaire 8. Sur une algèbre A semi-simple il existe au plus une structure d'algèbre Q - $\mathcal{LF}$. En particulier sur A il existe au plus une structure d'algèbre $\mathcal{LB}$.

Preuve. Soit A une algèbre semi-simple et supposons que sur A on a deux topologies τ et τ' d'algèbres Q - $\mathcal{LF}$. Il suffit d'appliquer le théorème 7 à l'application identique de (A, τ) sur (A, τ') . $\square$

Corollaire 9. Soit A une algèbre commutative semi-simple. Si τ est une topologie d'algèbre Q - $\mathcal{LF}$ sur A non équivalente à une topologie d'algèbre de Fréchet, alors on ne peut définir aucune topologie d'algèbre de Fréchet sur A .

Preuve. Puisque (A, τ) est une Q -algèbre topologique on a $\rho_A(x) < +\infty$ pour tout $x \in A$. Supposons qu'on peut définir une topologie τ' d'algèbre de Fréchet sur A ; d'après ([22], théorème 13.6.) on aura (A, τ') une Q -algèbre topologique et d'après le théorème 7 on aura τ équivalente à τ' ce qui n'est pas vérifié par notre hypothèse. $\square$

Corollaire 10. Soient $(A, \mathcal{B}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n, \|\cdot\|_n)$, $(A', \mathcal{B}') = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A'_n, \|\cdot\|'_n)$ deux a.b.m.c. complètes à bases dénombrables de bornés avec A' semi-simple. Si φ est un

morphisme d'algèbres de A sur A' alors φ est borné. Par conséquent sur une algèbre semi-simple il existe au plus une structure d'a.b.m.c. complète à base dénombrable de bornés.

Preuve. Soient $T_{(A,B)}$ et $T_{(A',B')}$ les e.l.c. des disques bornivores respectivement associés à (A, B) et (A', B') [17]. $T_{(A,B)}$ et $T_{(A',B')}$ sont des a.l.c. avec

$$T_{(A,B)} = \bigcup_{\rightarrow t} (A_n, \|\cdot\|_n) \quad \text{et} \quad T_{(A',B')} = \bigcup_{\rightarrow t} (A'_n, \|\cdot\|'_n)$$

et ce sont des Q -algèbres topologiques d'après la proposition 3.

Soit B un borné de (A, B) , il existe un disque borné complétant D de (A, B) tel que $B \subset D$. Puisque $id_A : (A, B) \rightarrow T_{(A,B)}$ est bornée et $\varphi : T_{(A,B)} \rightarrow T_{(A',B')}$ est bornée car elle est continue d'après le théorème 7, $B' = \varphi(D)$ est un disque borné complétant de $T_{(A',B')}$. $T_{(A',B')}$ est un espace topologique séparé car A' est semi-simple. D'après 19.5.5 de [20] il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B' \subset (A'_n, \|\cdot\|'_n)$ et B' y est borné d'où $\varphi(D) = B'$ est borné dans (A', B') . $\square$

Corollaire 11. (Structure minimale d'algèbre limite inductive localement convexe d'algèbres de Banach d'une algèbre Q - $\mathcal{LF}$ commutative) *Soit $(A, \tau') = \bigcup_{\rightarrow t} (A'_n, \tau'_n)$ une algèbre Q - $\mathcal{LF}$ commutative semi-simple. Alors la structure sur A d'algèbre limite inductive localement convexe d'algèbres de Banach de la proposition 4 est minimale.*

Preuve. Soit $(A, \tau) = \bigcup_{\rightarrow t} (A_i, \|\cdot\|_i)_{i \in I}$ une autre structure d'algèbre limite inductive localement convexe d'algèbres de Banach sur A . D'après le théorème 7 on a $id_A : (A, \tau) \rightarrow (A, \tau')$ est continue et donc τ' moins fine que τ . $\square$

Remarques.

- 1) Le théorème 7 et son corollaire 10 généralisent ainsi le théorème d'unicité de structure des algèbres de Banach semi-simples de [19], le théorème d'unicité de structure d'algèbres Q - $\mathcal{F}$ semi-simples de ([6], remarque 3) et le théorème d'unicité de structure d'a.b.m.c. commutatives complètes semi-simples à bases dénombrables de bornés de [18].
- 2) Dans [10], on démontre un théorème d'unicité de structure d'algèbres de Fréchet commutatives semi-simples. Nous ne savons pas encore si ce théorème d'unicité se généralise aux algèbres $\mathcal{LF}$ commutatives semi-simples.

3. Liens avec deux résultats récents sur la continuité automatique.

3.1. Lien avec le résultat de [13]. Fragouloupoulou montre dans [13] un résultat analogue de continuité automatique qui est basé sur la démonstration du théorème principal de [23]; la démonstration de ce résultat utilise effectivement que les algèbres considérées sont multiplicativement convexes. Nous donnons dans ce qui suit une famille d'exemples d'algèbres Q - $\mathcal{LF}$ topologiques semi-simples mais qui ne sont pas des a.l.m. convexes. Ces algèbres ne sont pas des algèbres LFQ au sens de la définition 9.1 de [21], et par suite n'entrent pas dans le cadre du résultat de [13].

Exemple d'une algèbre Q - $\mathcal{LF}$ semi-simple qui n'est pas une a.l.m.c. Soit $(A, \mathcal{T})$ une a.l.c. de Fréchet unitaire non isomorphe à une algèbre de Banach. Soit $\mathcal{K}(\mathbb{R}, A)$ l'algèbre

des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans A , à support compact, munie de la topologie τ_o limite inductive stricte définie par les a.l.c. de Fréchet $(\mathcal{K}([-i, i], A))_{i \geq 1}$ des fonctions de $\mathcal{K}(\mathbb{R}, A)$ à support dans $[-i, i]$. On munit $\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A$ (resp. $\mathcal{K}([-i, i], A) \times A$) de la topologie produit τ_1 (resp. $\tau_{1,i}$) et de la multiplication suivante:

$$(\psi_1, a_1)(\psi_2, a_2) = (\psi_1\psi_2 + a_1\psi_2 + \psi_1a_2, a_1a_2).$$

On a $(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A), \tau_o)$, $(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A, \tau_1)$ et $(\mathcal{K}([-i, i], A) \times A, \tau_{1,i})$ ($i \geq 1$) sont des a.l.c. complètes; les deux dernières algèbres sont unitaires d'unité $(0, e)$.

Proposition 12. *La multiplication $(\psi_1, a_1)(\psi_2, a_2) \mapsto (\psi_1\psi_2 + a_1\psi_2 + \psi_1a_2, a_1a_2)$ n'est pas continue dans $(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A, \tau_1)$.*

Preuve. D'après la proposition 2 de [27], la multiplication dans $(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A), \tau_o)$ est continue. Il suffit donc de montrer que l'application $(\psi_1, a_1)(\psi_2, a_2) \mapsto \psi_1a_2 + a_1\psi_2$ n'est pas continue ou encore que l'application $(\psi, a) \mapsto a\psi$ de $(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A), \tau_o) \times (A, \mathcal{T})$ dans $(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A), \tau_o)$ n'est pas continue.

Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite de semi-normes définissant $\mathcal{T}$. On peut supposer $p_n(e) = 1$ pour tout $n \geq 1$, $(p_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante et pour tout $n \geq 1$ il n'existe aucun réel $k > 0$ tel que $p_{n+1} \leq kp_n$. Soit $V = \text{conv}(\bigcup_{i \geq 1} V_i)$ le voisinage de 0 dans $\mathcal{K}(\mathbb{R}, A)$ où pour tout $i \geq 1$ on a:

$$V_i = \left\{ \psi \in \mathcal{K}([-i, i], A) \mid \sup_{x \in [-i, i]} p_i(\psi(x)) \leq \frac{1}{2^i} \right\}.$$

Nous allons montrer que si $U = \{a \in A \mid p_s(a) < \epsilon\}$ est un voisinage quelconque de 0 dans A et $W = \text{conv}(\bigcup_{i \geq 1} W_i)$ est un voisinage quelconque de 0 dans $(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A), \tau_o)$ où $W_i = \{\psi \in \mathcal{K}([-i, i], A) \mid \sup_{x \in [-i, i]} p_{j_i}(\psi(x)) < \epsilon_i\}$ est un voisinage quelconque de 0 dans $\mathcal{K}([-i, i], A)$ (on peut prendre $j_i \geq i$ pour tout $i \geq 1$, $(j_i)_{i \geq 1}$ strictement croissante et $(\epsilon_i)_{i \geq 1}$ strictement décroissante), alors UW n'est pas contenu dans V .

Soit $a \in A$ tel que $p_s(a) < \epsilon/2$ et $p_{s+1}(a)\epsilon_{s+1}/2 > 3$. On a $a \in U$. Soit ψ la fonction paire à valeurs dans A définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = 0$ si $x \geq s+1$, $\psi(x) = \epsilon_{s+1}e/2$ si $x \in [0, (s+1) - 1/4]$ et $\psi(x) = 2\epsilon_{s+1}[(s+1) - x]e$ si $x \in [(s+1) - 1/4, s+1]$. On a $\psi \in \mathcal{K}([-(s+1), (s+1)], A)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_{j_{s+1}}(\psi(x)) \leq \epsilon_{s+1}p_{j_{s+1}}(e)/2$ donc $\psi \in W_{s+1}$ et par suite $\psi \in W$. Supposons $a\psi \in V$, il existe alors $i_1, \dots, i_p \in \mathbb{N}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in]0, 1]$ tels que $i_1 < \dots < i_p$, $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$ et $a\psi = \sum_{j=1}^p \lambda_j v_{i_j}$ avec $v_{i_j} \in V_{i_j}$ pour $j \in \{1, \dots, p\}$. Soit $x_0 \in]s, s+1/2[$; puisque $v_{i_j}(x_0) = 0$ pour tout $i_j \leq s$, on a $a\psi(x_0) = \sum_{i_j > s} \lambda_j v_{i_j}(x_0)$. On a d'une part:

$$p_{s+1}(a\psi(x_0)) = p_{s+1}(a \frac{\epsilon_{s+1}}{2} e) > 3$$

et d'autre part:

$$p_{s+1} \left[\sum_{i_j > s} (\lambda_j v_{i_j}(x_0)) \right] \leq \sum_{i_j > s} \lambda_j p_{s+1}(v_{i_j}(x_0))$$

$$\leq \sum_{i_j > s} \lambda_j p_{i_j}(v_{i_j}(x_0)) \leq \sum_{i \geq 1} \frac{1}{2^i} \leq 2,$$

d'où la contradiction. $\square$

Proposition 13. *L'algèbre $(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A, \tau_1)$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à l'algèbre $\bigcup_{\rightarrow t} (\mathcal{K}([-i, i], A) \times A, \tau_{1,i})$.*

Preuve. L'égalité algébrique est évidente. Pour tout $i \geq 1$ l'injection canonique

$$\varphi_i : (\mathcal{K}([-i, i], A) \times A, \tau_{1,i}) \rightarrow (\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A, \tau_1)$$

est continue car l'injection canonique

$$\mathcal{K}([-i, i], A) \rightarrow (\mathcal{K}(\mathbb{R}, A), \tau_0)$$

est continue. On déduit que l'application identique

$$\varphi : \bigcup_{\rightarrow t} (\mathcal{K}([-i, i], A) \times A, \tau_{1,i}) \rightarrow (\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A, \tau_1)$$

est continue.

$(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A, \tau_1)$ est un espace localement convexe séparé, bornologique et complet car c'est un produit de deux espaces vérifiant ces propriétés. On déduit ([20], 2, §18), que $(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A, \tau_1)$ est la limite inductive localement convexe de la famille des espaces de Banach (E_B, p_B) où B parcourt l'ensemble de ses disques bornés fermés. D'après ([13], théorème 2, p.200) l'application identique φ est ouverte et donc c'est un isomorphisme.

Notons que dans $\bigcup_{\rightarrow t} (\mathcal{K}([-i, i], A) \times A, \tau_{1,i})$ la limite inductive est stricte car elle l'est aussi dans $\bigcup_{\rightarrow t} (\mathcal{K}([-i, i], A))$. $\square$

Proposition 14. *Si $(A, \mathcal{T})$ est une algèbre Q - $\mathcal{F}$ qui n'est pas une algèbre de Banach, alors pour tout $i \geq 1$ $(\mathcal{K}([-i, i], A) \times A, \tau_{1,i})$ est une algèbre Q - $\mathcal{F}$ et $(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A, \tau_1)$ est une algèbre Q - $\mathcal{LF}$ complète qui n'est pas une a.l.m.convexe.*

Preuve. Soit τ_2 la topologie définie sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A$ par les semi-normes $(Q_n)_{n \geq 1}$ telles que:

$$Q_n(\psi, a) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (p_n \psi(x)) + p_n(a)$$

$(A, \mathcal{T})$ est une Q -algèbre topologique, donc

$$\exists n \geq 1 \exists \epsilon > 0 \{ a \in A \mid p_n(a - e) < \epsilon \} \subset \text{Inv}(A).$$

Soit

$$V = \{ \psi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} (\psi(x)) < \frac{\epsilon}{2} \} \times \{ a \in A \mid p_n(a - e) < \frac{\epsilon}{2} \}.$$

On a V est un voisinage de $(0, e)$ dans $(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A, \tau_2)$ et puisque τ_2 est moins fine que τ_1 , V est aussi un voisinage de $(0, e)$ dans $(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A, \tau_1)$ et $V \subset \text{Inv}(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A)$. De même on a $V \cap (\mathcal{K}([-i, i], A) \times A)$ est un voisinage de $(0, e)$ dans $\mathcal{K}([-i, i], A) \times A$ et $V \subset \text{Inv}(\mathcal{K}([-i, i], A) \times A)$. $\square$

Proposition 15. Soit $\mathcal{M}$ un idéal à gauche maximal de A , alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ $\mathcal{M}_{x_0} = \{ (\psi, a) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A \mid \psi(x_0) + a \in \mathcal{M} \}$ est un idéal à gauche maximal de $\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A$.

Preuve. Il est facile de voir que $\mathcal{M}_{x_0}$ est un idéal à gauche de $\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A$.

Soit $(\psi_1, a_1) \notin \mathcal{M}_{x_0}$, c'est-à-dire $\psi_1(x_0) + a_1 \notin \mathcal{M}$. Puisque $\mathcal{M}$ est maximal dans A on a:

$$\exists m \in \mathcal{M}; \exists b_2 \in A; m + b_2 (\psi_1(x_0) + a_1) = e.$$

Alors:

$$\exists (\psi, a) \in \mathcal{M}_{x_0}; \exists (0, a_2) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A; (\psi, a) + (0, a_2)(\psi_1, a_1) = (0, e).$$

Il suffit de prendre $\psi = -b_2\psi_1$, $a = m + b_2(\psi_1(x_0))$ et $a_2 = b_2$. On déduit alors que $\mathcal{M}_{x_0}$ est maximal dans $\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A$. $\square$

Remarque. On démontre de même que,

$$\mathcal{M}_{x_0}^i = \{ (\psi, a) \in \mathcal{K}([-i, i], A) \times A \mid \Psi(x_0) + a \in \mathcal{M} \}$$

est un idéal à gauche maximal de $\mathcal{K}([-i, i], A) \times A$.

Corollaire 16. Si A est semi-simple alors $\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A$ (resp. $\mathcal{K}([-i, i], A) \times A$, ($i \geq 1$)) est semi-simple.

Preuve. D'après la proposition précédente on a,

$$\text{Rad}(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A) \subset \bigcap_{x_0 \in \mathbb{R}, \mathcal{M} \in \mathbf{M}} \{ (\psi, a) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A \mid \psi(x_0) + a \in \mathcal{M} \}$$

où $\mathbf{M}$ désigne l'ensemble des idéaux à gauche maximaux de A . Puisque A est semi-simple on déduit de l'inclusion précédente que,

$$\text{Rad}(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A) \subset \bigcap_{x_0 \in \mathbb{R}} \{ (\psi, a) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A \mid \psi(x_0) + a = 0 \}$$

On obtient $a = 0$ et par suite $\psi = 0$. $\square$

Récapitulation. Si $(A, \mathcal{T})$ est une algèbre $Q\text{-}\mathcal{F}$ semi-simple non isomorphe à une algèbre de Banach alors, $(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A, \tau_1)$ est une algèbre $Q\text{-}\mathcal{LF}$ semi-simple complète qui n'est pas une a.l.m.c.; puisque τ_1 n'est pas métrisable car on a une limite inductive stricte d'espaces de Fréchet, il n'existe aucune topologie d'algèbre $Q\text{-}\mathcal{F}$ sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A$; d'après ([20], 4, p.402) il n'existe sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A$ aucune topologie d'algèbre limite inductive d'une suite d'algèbres de Banach.

Comme exemple d'algèbres $(A, \mathcal{T})$, on peut considérer l'algèbre $C^\infty([0, 1], E)$ des fonctions qui sont indéfiniment dérivables sur $[0, 1]$ à valeurs dans une algèbre de Banach unitaire semi-simple non nécessairement commutative $(E, \parallel \parallel)$, qu'on munit de la famille des semi-normes $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par:

$$\forall f \in C^\infty([0, 1], E), \forall n \in \mathbb{N}, p_n(f) = \sup_{k \leq n, t \in [0, 1]} (\|f^{(k)}(t)\|).$$

Si A est en outre commutative; d'après la proposition 9 il n'existe aucune topologie d'algèbre $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A$; d'après ([29], C.7.5.) l'application $(\psi, a) \mapsto (\psi, a)^{-1}$ définie dans le groupe $\text{Inv}(\mathcal{K}(\mathbb{R}, A) \times A)$ n'est pas continue.

Remarques.

- 1) L'exemple précédent montre qu'une algèbre localement convexe limite inductive localement convexe d'une suite d'algèbres localement convexes à multiplications globalement continues n'est pas nécessairement à multiplication globalement continue; ce qui contredit le résultat de ([21], Chapter 4, Lemma 2-2) dont la preuve est erronée.
- 2) Cet exemple a permis ([3]) de répondre négativement à la question (**) de la page 349 de [4].

3.2. Lien avec le résultat de [15]. Utilisant la théorie de la représentation, Guan dans [14] étend le lemme de Schur (théprème 3.9 de [8]) aux algèbres localement convexes métrisables complètes ayant tous leurs idéaux maximaux fermés. Il en déduit [15] un théorème d'unicité de structure pour de telles algèbres. Dans [30], l'auteur montre que si (A, τ) est une a.l.m.c. commutative complète et tonnelée, alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle ait tous ses idéaux maximaux fermés est qu'elle soit une Q -algèbre topologique. Nous montrons dans ce qui suit que cette condition est aussi nécessaire et suffisante dans le cas d'une algèbre topologique commutative métrisable et complète; ceci permet de déduire que dans le cas où une telle algèbre est localement convexe, elle se réduit à une algèbre Q - $\mathcal{F}$ d'après la proposition 8.3 de [26]. Le résultat de [15] reste tout de même d'intérêt car on ne sait pas si la propriété qui suit est encore vraie dans le cas non commutatif.

Proposition 17. *Soit (A, τ) une algèbre topologique métrisable complète. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) (A, τ) est une Q -algèbre topologique.
- (ii) Tout idéal maximal de A est fermé dans (A, τ) .

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii): Soit I un idéal de A ; on a $I \cap \text{Inv}(A) = \emptyset$, et puisque $\text{Inv}(A)$ est ouvert dans (A, τ) on a aussi $\bar{I} \cap \text{Inv}(A) = \emptyset$ et donc $\bar{I}$ est aussi un idéal de A . Si I est en plus maximal, on obtient $\bar{I} = I$, donc I est fermé dans (A, τ) .

(ii) $\Rightarrow$ (i): Soit $|\cdot|$ une pseudo-norme définissant la topologie τ de A et d la distance sur A associée à $|\cdot|$. On a pour tout $x, y \in A$, $d(x, y) = |x - y|$ et (A, d) est un espace métrisable complet uniformément isomorphe à (A, τ) .

On suppose que (A, τ) n'est pas une Q -algèbre topologique, alors $\text{Inv}(A)$ n'est pas un voisinage de e , donc

$$\forall n \geq 1 \quad \exists u_n \in A \setminus \text{Inv}(A) \quad d(u_n, e) < \frac{1}{n}.$$

On obtient une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'éléments non inversibles de A qui converge vers e .

On va extraire de cette suite une suite $(u_{n_p})_{p \geq 1}$ telle que $d(e, u_{n_1}) < 1$ et :

$$\forall p > 1 \quad d(e, u_{n_p}) < 2^{-(p-1)}$$

$$\forall 1 \leq k \leq p-1 \quad d(u_{n_k} \cdots u_{n_{p-1}}, u_{n_k} \cdots u_{n_p}) < 2^{-(p-1)}.$$

Nous allons faire une construction par récurrence :

u_{n_1} existe car $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers e .

Construction de u_{n_2} : l'application $a \mapsto u_{n_1}a$ de A dans A est continue en e , donc

$$\exists 0 < \eta < 2^{-1} \quad d(e, a) < \eta \Rightarrow d(u_{n_1}, u_{n_1}a) < 2^{-1} \quad (*)$$

et $\exists n_2 > n_1$ $d(e, u_{n_2}) < \eta$ car $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers e ; d'après $(*)$ on obtient

$$d(e, u_{n_1}) < \eta < 2^{-1} \quad \text{et} \quad d(u_{n_1}, u_{n_1}u_{n_2}) < 2^{-1}.$$

Supposons $u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_{p-1}}$ construits.

Construction de u_{n_p} : l'application

$$a \mapsto (u_{n_1}u_{n_2} \cdots u_{n_{p-1}}a, u_{n_2}u_{n_3} \cdots u_{n_{p-1}}a, \dots, u_{n_{p-1}}a)$$

de A dans A^{p-1} est continue en e , donc

$$\exists 0 < \eta < 2^{-(p-1)} \quad d(e, a) < \eta \Rightarrow \sum_{k=1}^{p-1} d(u_{n_k} \cdots u_{n_{p-1}}, u_{n_k} \cdots u_{n_p}) < 2^{-(p-1)} \quad (**)$$

et $\exists n_p > n_{p-1}$ $d(e, u_{n_p}) < \eta$ car $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers e ; d'après $(**)$ on obtient

$$d(e, u_{n_p}) < 2^{-(p-1)} \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq k \leq p-1 \quad d(u_{n_k} \cdots u_{n_{p-1}}, u_{n_k} \cdots u_{n_p}) < 2^{-(p-1)}.$$

Pour tout $k \geq 1$ fixé, la suite $(u_{n_k}u_{n_{k+1}} \cdots u_{n_p})_{p \geq k}$ est une suite de Cauchy; en effet, si $q \geq p \geq k$ on a

$$d(u_{n_k} \cdots u_{n_p}, u_{n_k} \cdots u_{n_q}) \leq \sum_{i=p}^{q-1} d(u_{n_k} \cdots u_{n_i}, u_{n_k} \cdots u_{n_{i+1}}) \leq \sum_{i=p}^{q-1} 2^{-i}.$$

donc cette suite converge dans (A, τ) vers un élément qu'on va noter e_k . On obtient ainsi une suite $(e_k)_{k \geq 1}$ qui vérifie $\forall k \geq 1$ $e_k = u_{n_k}e_{k+1}$; et on a:

$$\begin{aligned} d(e_k, e) &\leq d(e, u_{n_k}) + \sum_{p=k}^{\infty} d(u_{n_k} \cdots u_{n_p}, u_{n_k} \cdots u_{n_{p+1}}) \\ &\leq 2^{-(k-1)} + \sum_{p=k}^{\infty} 2^{-p} \\ &\leq 2^{-(k-2)}. \end{aligned}$$

Donc la suite $(e_k)_{k \geq 1}$ converge vers e .

Pour $k \geq 1$ on considère l'idéal Ae_k qui est un idéal propre de A car u_{n_k} n'est pas inversible dans A . Puisque $\forall k \geq 1$ $e_k = u_{n_k}e_{k+1}$, la suite des idéaux $(Ae_k)_{k \geq 1}$ est croissante. Alors $\bigcup_{k \geq 1} Ae_k$ est un idéal propre de A dense dans A car la suite $(e_k)_{k \geq 1}$

converge vers e . D'où l'existence d'idéaux maximaux denses dans (A, τ) , il suffit de prendre un idéal maximal contenant $\bigcup_{k \geq 1} Ae_k$. $\square$

Remarques.

- 1) Nous ignorons si le résultat de la proposition précédente reste vrai dans le cas non commutatif.
- 2) Si une algèbre (A, τ) vérifie les hypothèses de la proposition précédente et est en plus localement convexe, on déduit de cette proposition et de la proposition 8.3 de [26] que (A, τ) est une algèbre $Q\text{-}\mathcal{F}$.

Remerciements. Nous remercions J. Esterle d'avoir attiré notre attention sur le lemme 1.

English extended abstract. Let A and A' be two complex algebras, A' being semi-simple. In [19], Johnson shows, using the algebra representation theory, that if $\|\cdot\|_1$ and $\|\cdot\|_2$ are two Banach norms on A and A' respectively and if φ is an algebra morphism of $(A, \|\cdot\|_1)$ onto $(A, \|\cdot\|_2)$ then φ is continuous.

Using a technique on subharmonic functions, Aupetit gives another proof of this theorem in [6]. Using the same technique and applying a result of [11] which we establish here in another way (Lemma 1) and a closed graph theorem of [13], we show that if (A, τ_1) is a locally convex inductive limit of Fréchet Q -algebras and if (A', τ_2) is a locally convex inductive limit of a sequence of Fréchet Q -algebras ($Q\text{-}\mathcal{LF}$ algebra) then every algebra morphism φ from (A, τ_1) onto (A', τ_2) is continuous (Theorem 7).

We deduce the uniqueness of topology for $Q\text{-}\mathcal{LF}$ algebras (Corollary 8); and then generalize the results shown in [19], ([6], remark 3), [18], concerning the uniqueness of topology for Banach algebras, for Fréchet Q -algebras, for commutative multiplicatively convex bornological algebras with countable bases of bornology and for locally convex inductive limit of sequence of Banach algebras.

Recall that the uniqueness of topology for Fréchet commutative algebras was proved in [10]. This result which remains unknown for $\mathcal{LF}$ commutative algebras namely the commutative algebras locally convex inductive limit of Fréchet algebras.

Two analogous results in automatic continuity have recently been published. The first one [12] is based on the principal theorem of [23]; the proof of this result uses effectively the locally multiplicative convexity of the algebra. In this paper (Section 3.1), we give examples of $Q\text{-}\mathcal{LF}$ algebras which are not LFQ algebras in the sense of ([21], p. 301), and so the result of [12] does not apply.

The second result [15] which generalizes Johnson's Theorem to locally convex complete metrizable algebras with closed maximal ideals, uses the Schur Lemma which has been shown for these algebras in [14].

We show in this article (Proposition 17) that in the commutative case, locally convex complete metrizable algebras are actually Fréchet Q -algebras, so in this case we can deduce the result of [15] from [6] or from the present result.

We also discuss in our paper some properties of $Q\text{-}\mathcal{LF}$ algebras. In particular we show that a commutative algebra which is a locally convex inductive limit of Fréchet Q -algebras is a $Q\text{-}\mathcal{LF}$ algebra (Proposition 2), and that the commutativity is not necessary for having this property if the factors of the inductive limit are Banach algebras (Proposition 3).

Finally we show that such algebras are actually locally convex inductive limits of Banach algebras (Proposition 4), this last structure being minimal in the case when the algebra is semi-simple (Corollary 11).

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Akkar, *Etude spectrale et structure d'algèbres topologiques et bornologiques complètes*, Thèse Sc. Math. Université de Bordeaux I (1976).
2. ———, *Sur la structure des algèbres topologiques localement multiplicativement convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **279** (1974), 941–944.
3. M. Akkar et C. Nacir, *Structure m -convexe d'une algèbre limite inductive localement convexe d'algèbres de Banach*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **95** (1996).
4. A. Arosio, *Locally Convex Inductive Limits of Normed Algebras*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **51** (1974), 333–359.
5. B. Aupetit, *Propriétés spectrales des algèbres de Banach*, Lecture Notes in Math., vol. 735, Springer-Verlag, Berlin, 1979, pp. 709–727.
6. ———, *The uniqueness of the complete norm topology in Banach algebras and Banach Jordan algebras*, J. Funct. Anal. **47** (1982), 1–6.
7. C. A. Berenstein, R. Gay, *Complex Variables: An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 125, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
8. F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete normed algebras*, Ergebnisse der Mathematik, Band 80, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
9. N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques, Chapitres 1 à 5*, Masson, Paris.
10. R. Carpenter, *Uniqueness of topology for commutative semi-simple F -algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **29** (1971), 113–117.
11. J. Esterle, *Exposé du séminaire d'analyse fonctionnelle*, Département de Mathématiques de l'Université de Bordeaux 1 (janvier 1989).
12. M. Fragoulopoulou, *Uniqueness of topology for semisimple LFQ -algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1993), 963–969.
13. A. Grothendieck, *Espaces vectoriels topologiques*, 3a. Edicao Societate de Mathematica de S. Paulo, 1964.
14. B. Guan, *Primitive topological algebras and modules*, J. Math. Res. Exposition **8** (1988), 23–28.
15. ———, *Uniqueness of topology and continuity of systems of derivations on locally convex F -algebras*, Acta Math. Sinica **31** (1988), 577–583.
16. A. Guichardet, *Leçons sur certaines algèbres topologiques*, Gordon & Breach/Dunod, New York, 1967.
17. H. Hogbe-Nlend, *Théorie des bornologies et applications*, Lecture Notes in Math., vol. 213, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
18. ———, *Les fondements de la théorie spectrale des algèbres bornologiques*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **3** (1972), 19–56.
19. B. E. Johnson, *The uniqueness of the (complete) norm topology*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 407–409.
20. G. Köthe, *Topological vector spaces*, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
21. A. Mallios, *Topological Algebras. Selected Topics*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 124, North-Holland, Amsterdam, 1986.
22. E. A. Michael, *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **11** (1952), Amer. Math. Soc., Providence, RI.
23. T. J. Ransford, *A short proof of Johnson's uniqueness-of-norm theorem*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 487–488.

24. M. Raouyane, *Algèbres pseudo-Banach normalisées*, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B **38** (1986), 39–45.
25. C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras*, Original Edition 1960, D. van Nostrand Reinhold, R. E. Krieger Publishing Company, Huntington, NY, 1974.
26. L. Waelbroeck, *Topological vector spaces and algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 230, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
27. S. Warner, *Inductive limits of normed algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956), 190–216.
28. W. Zelazko, *Selected topics in topological algebras*, Lecture Notes, Series no. 31, Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus, Sept. 1971.
29. ———, *Banach algebras*, Elsevier Publishing Company, 1973.
30. ———, *On maximal ideals in commutative m -convex algebras*, Studia Math. **58** (1976), 291–298.

M. AKKAR ET C. NACIR
 UFR DE MATHÉMATIQUE ET INFORMATIQUE
 UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
 351 COURS DE LA LIBÉRATION
 33405 TALENCE CEDEX
 FRANCE