

NOTE SUR LA CAPACITABILITÉ DANS LES ESPACES D'ORLICZ

N. AÏSSAOUI

RÉSUMÉ. Si l'espace d'Orlicz $L_A(R^n)$ est réflexif, alors les ensembles analytiques sont $C_{k,A}$ -capacitables. Ceci améliore les résultats obtenus dans [3, 4] quand $L_A(R^n)$ est uniformément convexe pour la norme de Luxemburg.

ABSTRACT. If $L_A(R^n)$ is a reflexive Orlicz space, then analytic sets are $C_{k,A}$ -capacitable. This improves results obtained in [3, 4] when $L_A(R^n)$ is uniformly convex with respect to Luxemburg norm.

Introduction. Le but de cet article est d'améliorer les résultats de [3, 4] en supposant que l'espace d'Orlicz L_A est réflexif au lieu qu'il soit uniformément convexe pour la norme de Luxemburg.

Ainsi nous montrons que si A et A^* vérifient la condition Δ_2 , alors les ensembles analytiques sont $C_{k,A}$ -capacitables. De même lorsque l'espace d'Orlicz est réflexif, nous avons pour les ensembles analytiques, l'égalité $C'_{k,A}(X) = D_{k,A}(X)$. Pour la définition de $C'_{k,A}$, $C_{k,A}$ et $D_{k,A}$, voir les préliminaires.

Ceci a été possible grâce à une autre approche qui s'inspire de celle utilisée par [9] dans le cas des espaces L^p de Lebesgue. De plus nous obtenons une amélioration du théorème 6 de [4] qui donne l'écriture de la mesure de distribution en terme de la fonction distribution. Des applications de ces résultats, lorsque le noyau k est celui de Bessel, sont obtenues dans [2].

1. Préliminaires.

1) *Espaces d'Orlicz*

Soit a une fonction définie sur $[0, +\infty[$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $a(0) = 0$, $a(t) > 0$ si $t > 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = +\infty$;
- ii) a est continue à droite de tout point de $[0, +\infty[$;
- iii) a est croissante sur $[0, +\infty[$.

Pour $t \in R$, on pose :

$$A(t) = \int_0^{|t|} a(x) dx.$$

La fonction A est dite N -fonction.

Reçu le 19 septembre 1994 et, sous forme définitive, le 20 avril 1995.

On définit a^* sur $[0, +\infty[$ par

$$a^*(s) = \sup\{t : a(t) \leq s\}.$$

Alors a^* vérifie aussi les propriétés i), ii) et iii). On lui associe alors la N -fonction A^* définie pour tout $t \in R$, par

$$A^*(t) = \int_0^{|t|} a^*(x) dx.$$

A^* est appelée la N -fonction conjuguée de A .

Soit A une N -fonction et Ω un ouvert de R^n . On note $\mathcal{L}_A(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f , mesurables sur Ω et telles que

$$\int_{\Omega} A(f(x)) dx < \infty.$$

Cet ensemble est appelé une classe d'Orlicz.

On utilisera la notation

$$\rho(f, A, \Omega) = \int_{\Omega} A(f(x)) dx$$

et si $\Omega = R^n$, alors on notera

$$\rho(f, A) = \int A(f(x)) dx.$$

Soient A et A^* deux N -fonctions conjuguées et f une fonction mesurable définie presque partout sur Ω . La norme d'Orlicz de f est définie par :

$$\|f\|_A = \sup\left\{\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx : g \in \mathcal{L}_{A^*}(\Omega) \text{ avec } \rho(g, A^*, \Omega) \leq 1\right\}.$$

L'ensemble $L_A(\Omega)$ des fonctions f telles que $\|f\|_A < \infty$ est appelé espace d'Orlicz.

Lorsque $\Omega = R^n$, on écrira L_A au lieu de $L_A(R^n)$.

La norme de Luxemburg est définie sur $L_A(\Omega)$ par

$$|||f|||_A = \inf\{s > 0 : \int_{\Omega} A[f(x)/s] dx \leq 1\}.$$

Ces deux normes sont équivalentes; plus précisément si $f \in L_A(\Omega)$, alors

$$|||f|||_A \leq \|f\|_A \leq 2|||f|||_A.$$

Soit A une N -fonction. On dit que A vérifie la condition Δ_2 s'il existe une constante $C > 0$, telle que $A(2t) \leq CA(t)$ pour tout $t \geq 0$. C est évidemment supérieure à 2.

Rappelons que A vérifie la condition Δ_2 si et seulement si $\mathcal{L}_A = L_A$. De plus L_A est réflexif si et seulement si A et A^* vérifient la condition Δ_2 . Pour plus de détail, on pourra consulter les références classiques [1, 6, 7, 8].

2) Capacités dans les espaces d'Orlicz

Soit k une fonction positive et mesurable sur R^n , que nous appellerons noyau, et A une N -fonction. Pour $X \subset R^n$, on pose

$$C_{k,A}(X) = \inf\{A(\|f\|_A) : f \in L_A^+ \text{ et } k * f \geq 1 \text{ sur } X\}$$

$$C'_{k,A}(X) = \inf\{\|f\|_A : f \in L_A^+ \text{ et } k * f \geq 1 \text{ sur } X\}$$

où $k * f$ est le produit de convolution habituel. Le signe $+$ indique qu'il s'agit des éléments positifs de l'espace considéré. Alors $C'_{k,A}$ est une capacité au sens ordinaire et $C_{k,A} = A_o C'_{k,A}$ est appelée A -capacité.

Une fonction $f \in L_A^+$ telle que $k * f \geq 1$ sur X est appelée fonction test pour $C_{k,A}(X)$. Une fonction distribution de X pour $C_{k,A}$ est une fonction test f_o qui réalise l'infimum pour $C_{k,A}(X)$. Dans ce cas, $k * f_o$ est appelé potentiel de X pour $C_{k,A}$. Dans [4], il est montré que si A et A^* vérifient la condition Δ_2 , alors $C_{k,A}$ possède une unique fonction distribution de X pour tout X tel que $0 < C_{k,A}(X) < \infty$.

Une propriété P est dite vraie $C_{k,A}$ -quasi partout (en abrégé $C_{k,A}$ -q.p. ou (k, A) -q.p. s'il n'y a pas de confusion à faire) si $C_{k,A}(\neg P) = 0$ où $\neg P$ désigne l'ensemble où P n'est pas vérifiée.

Pour les propriétés de $C'_{k,A}$ et de $C_{k,A}$, voir [3].

Dans la suite $\mathcal{M}$ désignera l'espace vectoriel des mesures de Radon. $\mathcal{M}^+$ sera le cône des éléments positifs de $\mathcal{M}$. On notera $\mathcal{M}_1$ l'espace de Banach des mesures, muni de la norme $\|\mu\| = \text{variation totale de } \mu < \infty$. $\mathcal{M}_1^+$ sera le sous-ensemble de $\mathcal{M}_1$ formé des mesures positives.

$\mathcal{F}$ désignera la tribu des ensembles μ -mesurables pour toutes les mesures $\mu \in \mathcal{M}_1^+$.

Si $\mu \in \mathcal{M}_1^+$, on dira que μ est concentrée sur X si $\mu(Y) = 0$ pour tout Y μ -mesurable tel que $Y \subset^c X$.

Soient A et A^* deux N -fonctions conjuguées. Pour $X \in \mathcal{F}$, on pose :

$$D_{k,A}(X) = \sup\{\|\mu\| : \mu \in \mathcal{M}_1^+, \mu \text{ concentrée sur } X \text{ et } \|k * \mu\|_{A^*} \leq 1\}$$

où $k * \mu$ est le produit de convolution de k par μ défini par :

$$(k * \mu)(x) = \int k(x - y) d\mu(y).$$

Une mesure $\mu \in \mathcal{M}_1^+$ telle que μ est concentrée sur X et $\|k * \mu\|_{A^*} \leq 1$ est appelée mesure test pour $D_{k,A}(X)$. Si de plus $D_{k,A}(X) = \|\mu\|$, on dira que μ est une mesure de distribution pour $D_{k,A}(X)$ et que $k * \mu$ est un potentiel pour X relativement à $D_{k,A}$.

Pour les propriétés de $D_{k,A}$, on pourra voir [3, 4].

3) Capacité au sens de Choquet

Définition 1. Une fonction C d'ensembles est appelée capacité au sens de Choquet si elle vérifie les propriétés suivantes :

- i) C est croissante;
- ii) si $(X_n)_n$ est une suite croissante d'ensembles, alors $\sup_n C(X_n) = C(\bigcup_n X_n)$;

iii) si $(K_n)_n$ est une suite décroissante de compacts, alors

$$\inf_n C(K_n) = C\left(\bigcap_n K_n\right).$$

Soit C une capacité au sens de Choquet. Une partie X est dite capacitable si

$$C(X) = \sup\{C(K) : K \text{ compact et } K \subset X\}.$$

Le théorème de Choquet (voir [5]) dit que tout ensemble analytique (ou de Suslin) est capacitable.

2. Capacité et potentiel dans les espaces d'Orlicz. Nous commençons par rappeler le résultat suivant qui sera utilisé dans la suite.

Théorème 1 [3]. *Soit k un noyau et A une N -fonction. Alors*

- 1) $C_{k,A}$ et $C'_{k,A}$ sont croissantes.
- 2) Soit $(K_n)_n$ une suite décroissante de compacts et soit $K = \bigcap_n K_n$. Alors

$$\lim_n C_{k,A}(K_n) = C_{k,A}(K) \quad \text{et} \quad \lim_n C'_{k,A}(K_n) = C'_{k,A}(K).$$

Remarque. Pour montrer que $C_{k,A}$ et $C'_{k,A}$ sont des capacités au sens de Choquet, il suffit de montrer qu'elles vérifient iii) de la définition 1. Dans [3] il est montré que $C_{k,A}$ et $C'_{k,A}$ vérifient iii) si l'espace d'Orlicz L_A est uniformément convexe pour la norme de Luxemburg. Nous allons montrer qu'en fait il suffit qu'il soit réflexif ou, ce qui est équivalent, que A et A^* vérifient la condition Δ_2 . Pour cela nous allons avoir besoin d'un lemme.

Soit $S_{k,A}(X) = \{f \in L_A^+ : k * f \geq 1 \text{ sur } X\}$ et notons $\check{S}_{k,A}(X)$ l'adhérence de $S_{k,A}(X)$ pour la norme de L_A .

Lemme. *Soit $f \in L_A^+$. Alors $f \in \check{S}_{k,A}(X)$ si et seulement si $k * f \geq 1$ (k, A) -q.p. sur X .*

Preuve. Si $f \in \check{S}_{k,A}(X)$ alors il existe une suite $(f_n)_n$ dans L_A^+ telle que $k * f_n \geq 1$ sur X et $f_n \rightarrow f$ dans L_A^+ .

D'après [3, théorème 4], il existe une sous-suite $(f'_n)_n$ de la suite $(f_n)_n$ telle que

$$k * f'_n \rightarrow k * f \quad (k, A)\text{-q.p.}.$$

Donc $k * f \geq 1$ (k, A) -q.p. sur X .

Supposons que $k * f \geq 1$ (k, A) -q.p. sur X . Alors $X' = \{x \in X : k * f(x) < 1\}$ est tel que

$$C_{k,A}(X') = 0.$$

D'après [3, théorème 3], il existe $g \in L_A^+$ telle que $k * g = \infty$ sur X' .

Considérons la suite $(f_n)_n$ définie par

$$f_n = f + n^{-1}g.$$

Alors $f_n \rightarrow f$ dans L_A^+ et $k * f_n \geq 1$ sur X pour tout n . Ceci veut dire que $f \in \check{S}_{k,A}(X)$.

Le lemme est démontré. $\square$

Théorème 2. Soit A une N -fonction telle que A et A^* vérifient la condition Δ_2 . Soit $(X_n)_n$ une suite croissante d'ensembles et $X = \bigcup_n X_n$. Alors

$$\lim_n C_{k,A}(X_n) = C_{k,A}(X) \quad \text{et} \quad \lim_n C'_{k,A}(X_n) = C'_{k,A}(X).$$

Preuve. Il est évident que $\lim_n C'_{k,A}(X_n) \leq C'_{k,A}(X)$.

Pour montrer l'inégalité inverse, il suffit de se placer dans le cas où $\lim_n C'_{k,A}(X_n) = d < \infty$.

Posons pour tout n , $S_n = \check{S}_{k,A}(X_n)$. Alors $(S_n)_n$ est une suite décroissante d'ensembles fermés et convexes.

Posons

$$S = \bigcap_n S_n \quad \text{et} \quad B = \{f \in L_A^+ : |||f|||_A \leq d\}.$$

Alors

$$\forall n, S_n \cap B \neq \emptyset \text{ et } S_n \cap B \text{ est convexe et fermé dans } L_A.$$

Comme l'espace L_A est réflexif, B est faiblement compact et $\forall n, S_n \cap B$ est faiblement compact.

Donc $S \cap B$ est non vide.

Il existe alors $f_o \neq 0$ tel que $f_o \in S \cap B$. Nous en déduisons que

$$\forall n, f_o \in \check{S}_{k,A}(X_n) \quad \text{et} \quad |||f_o|||_A \leq d.$$

D'après le lemme précédent, $\forall n, k * f_o \geq 1(k, A)$ -q.p. sur X_n .

Donc

$$k * f_o \geq 1(k, A)\text{-q.p. sur } X.$$

Ceci entraîne que $f_o \in \check{S}_{k,A}(X)$. De plus $C'_{k,A}(X) \leq |||f_o|||_A \leq d$.

Le théorème est démontré. $\square$

Corollaire. Soit A une N -fonction telle A et A^* vérifient la condition Δ_2 . Soit $(X_n)_n$ une suite d'ensembles. Alors

$$C_{k,A}(\liminf X_n) \leq \liminf C_{k,A}(X_n) \quad \text{et} \quad C'_{k,A}(\liminf X_n) \leq \liminf C'_{k,A}(X_n).$$

Preuve. Soit $X = \liminf X_n = \bigcup_j (\bigcap_{l \geq j} X_l)$ et $Y_j = \bigcap_{l \geq j} X_l$.

Alors la suite $(Y_j)_j$ est croissante. Le théorème 2 précédent donne

$$\lim_j C_{k,A}(Y_j) = C_{k,A}(X) \quad \text{et} \quad \lim_n C'_{k,A}(Y_j) = C'_{k,A}(X).$$

Comme $C_{k,A}$ et $C'_{k,A}$ sont croissantes, nous avons

$$C_{k,A}(Y_j) \leq C_{k,A}(X_j) \quad \text{et} \quad C'_{k,A}(Y_j) \leq C'_{k,A}(X_j).$$

Par suite

$$C_{k,A}(\liminf X_n) \leq \liminf C_{k,A}(X_n) \quad \text{et} \quad C'_{k,A}(\liminf X_n) \leq \liminf C'_{k,A}(X_n).$$

Le corollaire est démontré. $\square$

Théorème 3. Soit A une N -fonction telle A et A^* vérifient la condition Δ_2 . Alors les ensembles analytiques sont $C_{k,A}$ -capacitables et $C'_{k,A}$ -capacitables.

Preuve. D'après la remarque et le théorème 2, $C_{k,A}$ et $C'_{k,A}$ sont des capacités au sens de Choquet. Le théorème de Choquet [5] donne le résultat. $\square$

Théorème 4.

- 1) Soit $D_{k,A}^*$ la capacité extérieure associée à $D_{k,A}$ et qui est définie par

$$D_{k,A}^*(X) = \inf\{D_{k,A}(O) : O \text{ ouvert et } X \subset O\}.$$

Alors pour tout ensemble X , on a

$$D_{k,A}^*(X) = C'_{k,A}(X).$$

- 2) Si A et A^* vérifient la condition Δ_2 , alors pour tout ensemble analytique X , on a

$$D_{k,A}(X) = C'_{k,A}(X).$$

Preuve. La partie 1) est démontrée dans [3, théorème 11]. Il s'agit donc de démontrer la partie 2) qui est la partie 2) du [3, théorème 11] lorsque l'espace d'Orlicz L_A est uniformément convexe pour la norme de Luxemburg.

2) Le théorème 3 et la partie 1) montrent que tout ensemble analytique est $D_{k,A}^*$ -capacitable. Or si X est analytique, $X \in \mathcal{F}$. D'après [3, théorème 10] nous avons

$$D_{k,A}(X) = \sup\{D_{k,A}(K) : K \text{ compact et } K \subset X\}$$

et d'après 1)

$$D_{k,A}^*(X) = \sup\{D_{k,A}(K) : K \text{ compact et } K \subset X\}.$$

Donc

$$D_{k,A}^*(X) = D_{k,A}(X).$$

Le théorème est démontré. $\square$

Remarque. Comme conséquence immédiate, nous obtenons une version améliorée du théorème 6 de [4] qui donne la mesure de distribution en terme de la fonction distribution en supposant seulement que l'espace L_A est réflexif à la place d'uniformément convexe pour la norme de Luxemburg.

English extended abstract. Let k be a kernel and A an N -function. If A and its conjugate satisfy the Δ_2 condition, then

$$\lim_n C_{k,A}(X_n) = C_{k,A}(X) \quad \text{and} \quad \lim_n C'_{k,A}(X_n) = C'_{k,A}(X)$$

if $(X_n)_n$ is an increasing sequence of subsets in R^n and $X = \bigcup_n X_n$. (See Theorem 2).

This improves Theorem 8 in [3] when A is uniformly convex N -function satisfying the Δ_2 condition.

As a consequence, we obtain the following results:

- 1) If L_A is a reflexive Orlicz space, then analytic sets are $C_{k,A}$ -capacitable and $C'_{k,A}$ -capacitable. (See Theorem 3).
- 2) i) If A is an N -function, then

$$D_{k,A}^*(X) = C'_{k,A}(X) \quad \text{for all sets } X.$$

- ii) If A and its conjugate satisfy the Δ_2 condition, then

$$D_{k,A}(X) = C'_{k,A}(X) \quad \text{for all analytic sets } X.$$

On the other hand we improve Theorem 6 in [4] which gives a representation of a $D_{k,A}$ -potential in term of $C_{k,A}$ -capacitary distribution, assuming that L_A is reflexive in place of uniformly convex with respect to Luxemburg norm.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.
2. N. Aïssaoui, *Potentiels de Bessel dans les espaces d'Orlicz*, En préparation.
3. N. Aïssaoui et A. Benkirane, *Capacités dans les espaces d'Orlicz*, Ann. Sci. Math. Québec **18** (1994), 1–23.
4. N. Aïssaoui et A. Benkirane, *Potentiel non linéaire dans les espaces d'Orlicz*, Ann. Sci. Math. Québec **18** (1994), 105–118.
5. G. Choquet, *Forme abstraite du théorème de capacitable*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **9** (1959), 83–89.
6. M. A. Krasnosel'Skii et Y. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff, Gröningen, 1961.
7. A. Kufner, O. John et S. Fucik, *Function spaces*, Academia, Prague, 1977.
8. W. A. I. Luxemburg, *Banach function spaces*, Thesis, Delft University, 1955.
9. Ju. G. Rešetnjak, *On the concept of capacity in the theory of functions with generalized derivatives*, Sibirsk. Mat. Ž. **10** (1969), 1109–1138.

N. AÏSSAOUI

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

B. P. 34A VILLE NOUVELLE

FÈS, MAROC.